

## Расчет стационарных вероятностей трехпоточковой модели управления доступом к ресурсам БШС с гистерезисами

И.И. Цитович\*, А.В. Чернушевич\*\*

\*Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Российская академия наук,  
Москва, Россия

\*\*Московский технический университет связи и информатики,  
Министерство российской федерации по связи и информатизации,  
Москва, Россия

Поступила в редколлегию 16.06.2011

**Аннотация**—Рассматривается задача вычисления стационарных вероятностей для упрощенной модели управления доступом к ресурсам беспроводной широкополосной сети (БШС) с разными порогами для отключения и включения доступа к ресурсам сети в зависимости от класса обслуживания. Исследованы три варианта взаимного расположения гистерезисов и для каждого вида расположения гистерезисов приведены алгоритмы вычисления стационарных вероятностей распределения объема используемого ресурса сети.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Усложнение характера и рост объема информационной нагрузки приводит к тому, что требуемое качество обслуживания может быть обеспечено только при использовании эффективных методов повышения пропускной способности. Одним из таких методов является метод дифференцированного обслуживания пользователей, возможности которого заложены уже в стандартах. Например, в беспроводных сетях передачи данных типа Wi-MAX и LTE предусмотрено разделение пользователей на сервисные классы, им предоставляются различные объемы ресурсов и разные дополнительные виды обслуживания. При этом снижение требований к объему ресурсов для каждого сервисного класса осуществляется дифференцировано [3, 8]. Это позволяет операторам оптимизировать использование ресурсов в сети и снижать тарифы, что приводит к увеличению числа пользователей.

В классических системах управления [4] выделяют состояние, при котором происходит включение управляющего воздействия, и состояние, при котором происходит выключение этого воздействия. Чтобы переключения управляющих воздействий не происходили слишком часто, выделяют некоторое количество состояний, описываемых гистерезисом, в которых возможно как наличие, так и отсутствие управляющих воздействий. Введение в рассмотрение гистерезиса усложняет задачу вычисления стационарных вероятностей случайного процесса, описывающего состояние сети, поскольку теперь некоторые состояния нужно различать для того, чтобы учесть доступ на обслуживание требований соответствующего потока.

В работе предлагается подход, основанный на упрощениях в описании модели функционирования звена БШС, которые обычно сводят соответствующий случайный процесс к процессу рождения и гибели [7]. В рассматриваемом случае это приводит к более сложной модели, чем рассмотренная в [2] модель, поскольку сейчас рассматриваются три сервисных класса. В работе показано, что в этом случае возможны три варианта взаимного расположения гистерезисов. Для каждого варианта получен алгоритм последовательного вычисления вероятностей состояний, аналогичный вычислению стационарных вероятностей для процесса рождения и гибели.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ДОСТУПОМ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

Предлагается следующая математическая модель для системы управления ресурсами сегмента беспроводной широкополосной сети, обслуживающей пользователей  $m$  сервисных классов. Имеется доступный ресурс объемом  $V$ , на который поступает  $m$  потоков заявок, каждый из них соответствует различным сервисным классам пользователей. Все потоки — стационарные пуассоновские процессы с интенсивностями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Время обслуживания вызовов — экспоненциальное, соответственно с параметрами  $a_i$ . Первому потоку доступны все  $V$  ресурсов; для обслуживания вызовов второго потока доступны только  $k_2$  из них, и т. д.; для всех  $m$  потоков  $k_m < V$ . Величина  $k_i$  отображает степень загрузки (т.е. количество ресурсов, выделяемых для каждого сервисного класса). При этом, если в момент поступления запроса  $i$ -го сервисного класса все  $k_i$  ресурсов заняты — запрос получает отказ. Вероятность отказа в обслуживании составляет  $q_i$ , при этом запросы могут вернуться в систему с настойчивостью  $H_i$  и интенсивностью повторения  $\mu_r$ . Наряду с  $k_i$  для каждого сервисного класса вводится объем занятых в данный момент ресурсов  $f_i < k_i$ , при достижении которого снимается запрет на доступ требований  $i$ -го потока к ресурсам сети. В результате задается функционал качества работы сегмента БШС и определяется каждое оптимальное значение  $k_i$  и  $f_i$ .

Для задания марковского процесса функционирования системы вводится для каждого потока дополнительная характеристика  $I_i$  — состояние доступа к ресурсам сети для  $i$ -го потока. Если  $I_i = 0$ , то обслуживание требований этого потока не производится, а если  $I_i = 1$ , то требование обслуживается. Таким образом, состояние системы описывается вектором  $\mathbf{x} = (i_1, j_1, I_1, \dots, i_m, j_m, I_m)$ , где  $i_1$  — количество устройств, занятых обслуживанием требований 1-го класса,  $j_1$  — число требований 1-го класса, повторяющих заявки на обслуживание и т.д. Изменение значения признака  $I_i$  происходит следующим образом: если  $I_i = 1$  и  $i_1 + \dots + i_m \geq k_i$ , то  $I_i$  переключается в состояние 0, а если  $I_i = 0$  и  $i_1 + \dots + i_m \leq f_i$ , то  $I_i$  переключается в состояние 1.

Вид состояний получающегося марковского процесса ясно показывает, что точное решение задачи в представленном виде невозможно, если число возможных каналов обслуживания  $V$  велико. Поэтому предлагается рассмотреть упрощенную модель, эффективность применения которой исследована в [2]. Дальнейшее ее упрощение позволит перейти к процессу рождения и гибели с гистерезисами.

## 3. УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ

Весь процесс функционирования сегмента БШС может быть сведен к взаимодействию пользователей трех классов. С учетом данного фактора при дальнейших исследованиях будет рассмотрена трехпотоковая модель, которая представляет собой процесс рождения и гибели с гистерезисом. Выделено четыре подмножества состояний системы:

- $S^{++}$  — когда обслуживаются запросы всех трех сервисных классов;
- $S^{+-}$  — когда прекращаются обслуживаться запросы низшего сервисного класса;
- $S^{--}$  — когда обслуживаются запросы пользователей только 1 сервисного класса;
- $S^{-+}$  — когда обслуживаются запросы пользователей только первого и третьего сервисных классов.

Последний случай возникает в той ситуации, когда гистерезис управления доступом для требований второго потока является настолько широким, что содержит внутри себя гистерезис для третьего потока. Такая ситуация возможна в тех случаях, когда необходимо обеспечить стабильность режимов обслуживания требований второго потока.

Первое упрощение состоит в пуассоновской замене потока повторных требований: предполагается, что поступает поток общей интенсивности  $\lambda_i + x_i$ , где  $x_i$  — интенсивность дополни-

тельного потока, обусловленного повторными попытками, которую нужно искать как решение уравнения

$$x_i = (\lambda_i + x_i)H_iP_i, \quad (1)$$

в котором  $P_i$  — вероятность отказа в обслуживании требований  $i$ -го потока. Поскольку вероятность  $P_i$  сама зависит от дополнительной интенсивности поступающего потока повторных требований, то значение интенсивности нужно искать методом последовательных приближений [7].

Второе упрощение аналогично [2] и состоит в замене времени обслуживания всех требований на 1 за счет перерасчета интенсивностей поступления требований таким образом, что среднее значение занятого ресурса требованиями  $i$ -го потока остается без изменений (некоторые аспекты точности такого упрощения исследованы в [5]). Это означает, что новые интенсивности потоков будут  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ , где  $\Lambda_i = (\lambda_i + x_i)a_i$ ,  $a_i$  — средний объем ресурса, используемого требованиями  $i$ -го потока.

После таких упрощений состояния процесса задаются одним параметром  $v$  — объем используемого ресурса. Вместе с тем, для учета ограничений на доступ к ресурсам сети необходимо различать состояния, когда обслуживаются или не обслуживаются требования соответствующего потока.

Наиболее сложный для исследования третий вариант, когда обслуживание третьего потока прекращается раньше, но и включается раньше, чем у второго потока. В принятых обозначениях это означает, что  $k_1 = V, V > k_2 > k_3, 0 < f_2 < f_3$ . В этом случае ширина гистерезиса у второго потока больше и она содержит весь гистерезис третьего потока. Для объема задействованного ресурса  $0, \dots, f_2 - 1$  и  $k_2, \dots, V$  возможен только один тип состояний. Первая группа состояний такова, что в этом случае обслуживаются все требования, поэтому их будем для единообразия обозначать  $0^{++}, \dots, (f_2 - 1)^{++}$ , а во второй группе обслуживаются только требования первого потока, поэтому их будем обозначать  $(k_2)^{--}, \dots, V^{--}$ . Состояния с объемом задействованного ресурса  $f_2, \dots, f_3 - 1$  и  $k_3, \dots, k_2 - 1$  могут находиться в двух типах состояниях: когда в них обслуживаются или не обслуживаются требования второго потока. Первая группа состояний такова, что здесь требования третьего потока обслуживаются всегда, а вторая — требования третьего потока не обслуживаются никогда. Поэтому нужно различать  $(f_2)^{++}, \dots, (f_3 - 1)^{++}$  и  $(f_2)^{-+}, \dots, (f_3 - 1)^{-+}$ . Первый случай — это состояния, когда обслуживаются требования всех потоков, а второй — когда не обслуживают требования только второго потока. Для второй группы состояний получаем  $(k_3)^{+-}, \dots, (k_2 - 1)^{+-}$  и  $(k_3)^{-+}, \dots, (k_2 - 1)^{-+}$ . Первая группа состояний — это состояния, когда не обслуживаются требования только третьего потока, а второй — когда обслуживаются требования только первого потока. Наконец, состояния с объемом задействованного ресурса  $f_3, \dots, k_3 - 1$  могут быть четырех различных типов, которые обозначаются  $(f_3 + 1)^{++}, \dots, (k_3 - 1)^{++}$ ,  $(f_3 + 1)^{+-}, \dots, (k_3 - 1)^{+-}$ ,  $(f_3 + 1)^{-+}, \dots, (k_3 - 1)^{-+}$  и  $(f_3 + 1)^{--}, \dots, (k_3 - 1)^{--}$ .

Таким образом, возникают четыре группы состояний, которые обозначим через  $S^{++} = \{0^{++}, \dots, (k_3 - 1)^{++}\}$ ,  $S^{-+} = \{(f_2 + 1)^{-+}, \dots, (k_3 - 1)^{-+}\}$ ,  $S^{+-} = \{(f_3 + 1)^{+-}, \dots, (k_2 - 1)^{+-}\}$ ,  $S^{--} = \{(f_3 + 1)^{--}, \dots, V^{--}\}$ .

Из состояния  $v^{++}$  переход в состояние  $(v + 1)^{++}$  происходит с интенсивностью  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$  если  $v < k_3 - 1$ . Переход из состояния  $(k_3 - 1)^{++}$  происходит в состояние  $k_3^{+-}$  с интенсивностью  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$ .

Из состояния  $v^{+-}$  переход в состояние  $(v + 1)^{+-}$  происходит с интенсивностью  $\Lambda_1 + \Lambda_2$ , если  $f_3 < v < k_2 - 1$ . Далее, переход из состояния  $(k_2 - 1)^{+-}$  происходит в состояние  $k_2^{--}$  с интенсивностью  $\Lambda_1 + \Lambda_2$ .

Из состояния  $v^{-+}$  переход в состояние  $(v+1)^{-+}$  происходит с интенсивностью  $\Lambda_1 + \Lambda_3$ , если  $f_2 < v < k_3 - 1$ . Переход из состояния  $(k_3 - 1)^{-+}$  происходит в состояние  $k_3^{--}$  с интенсивностью  $\Lambda_1 + \Lambda_3$ .

Наконец, из состояния  $v^{--}$  переход в состояние  $(v+1)^{--}$  происходит с интенсивностью  $\Lambda_1$ .

Освобождение устройств происходит со следующими интенсивностями. Из состояний  $v^{--}$  переход в состояние  $(v-1)^{+-}$  происходит с интенсивностью  $v$ , если  $f_3 + 1 \leq v \leq V$ . Переход из состояния  $(f_3 + 1)^{--}$  происходит в состояние  $f_3^{--}$  с интенсивностью  $f_3 + 1$ . Из состояний  $v^{-+}$  переход в состояние  $(v-1)^{-+}$  происходит с интенсивностью  $v$ , если  $f_2 + 1 \leq v \leq k_3$ . Переход из состояния  $(f_2 + 1)^{-+}$  происходит в состояние  $f_2^{++}$  с интенсивностью  $f_2 + 1$ . Аналогично, из состояний  $v^{+-}$  переход в состояние  $(v-1)^{+-}$  происходит с интенсивностью  $v$ , если  $f_3 + 1 \leq v \leq k_2$ . Переход из состояния  $(f_3 + 1)^{+-}$  происходит в состояние  $f_3^{++}$  с интенсивностью  $f_3 + 1$ . Наконец, из состояний  $v^{++}$  переход в состояние  $(v-1)^{++}$  происходит с интенсивностью  $v$ , если  $1 \leq v \leq k_3$ .

Если использовать наиболее строгий по отношению к третьему потоку режим, когда выполняются условия  $k_1 = V, V > k_2 > f_2 > k_3 > f_3$ , то в этом случае ситуация будет более простой, поскольку возникают два гистерезиса, которые не пересекаются. В этом случае ситуация более напоминает задачу, рассмотренную в [2]. В этом случае обслуживание требований третьего потока наиболее ограничено: их обслуживание возможно лишь в тех случаях, когда нет ограничений на обслуживание требований второго потока. Теперь возможны только три типа состояний:  $v^{++}$  — когда обслуживаются требования всех потоков,  $v^{+-}$  — когда не обслуживаются требования третьего потока и  $v^{--}$  — когда обслуживаются требования только первого потока. Состояния  $0, \dots, f_3$  могут быть только в одном состоянии  $v^{++}$ , состояния  $f_3, \dots, k_3 - 1$  могут быть в двух состояниях  $v^{++}$  и  $v^{+-}$ ,  $k_3, \dots, f_2 - 1$  — только в одном состоянии  $v^{+-}$ ,  $f_2, \dots, k_2 - 1$  — в двух состояниях  $v^{+-}$  и  $v^{--}$  и, наконец,  $k_2, \dots, V$  могут быть только в одном состоянии  $v^{--}$ .

В этом случае возможны три группы состояний  $S^{++}$ ,  $S^{+-}$  и  $S^{--}$ , соответствующие перечисленным выше видам состояний, т.е.  $S^{++} = \{0^{++}, \dots, (k_3 - 1)^{++}\}$ ,  $S^{+-} = \{f_3^{+-}, \dots, (k_2 - 1)^{+-}\}$ ,  $S^{--} = \{f_2^{--}, \dots, V^{--}\}$ .

Второй вариант режима обслуживания состоит в том, что гистерезисы пересекаются: начало запрета на обслуживание требований третьего потока находится после уровня, когда начинается обслуживание требований второго потока, т.е.  $k_1 = V, V > k_2 > k_3 > f_2 > f_3$ . И в этом случае возможны только три типа состояний:  $v^{++}$  — когда обслуживаются требования всех потоков,  $v^{+-}$  — когда не обслуживаются требования третьего потока и  $v^{--}$  — когда обслуживаются требования только первого потока. Состояния  $0, \dots, f_3$  могут быть только в одном состоянии  $v^{++}$ , состояния  $f_3 + 1, \dots, f_2$  могут быть в двух состояниях  $v^{++}$  и  $v^{+-}$ ,  $f_2 + 1, \dots, k_3 - 1$  — в трех состояниях  $v^{++}$ ,  $v^{+-}$  и  $v^{--}$ ,  $k_3, \dots, k_2 - 1$  — в двух состояниях  $v^{+-}$  и  $v^{--}$ , а  $k_2, \dots, V$  — только в состоянии  $v^{--}$ . Вместе с тем, в этом случае необходимо исследовать общий участок для обоих гистерезисов, состоящий из состояний  $f_2^{+-}, \dots, k_2^{+-}$ .

Интенсивности переходов между состояниями для первого и второго вариантов вычисляются аналогично тому, как это делалось для третьего варианта с учетом типов состояний. Отметим, что для этих вариантов решение системы уравнений равновесия несколько проще, поскольку в этих случаях необходимо найти только 2 неизвестные величины, которые задают перетекания вероятностей между типами состояний.

#### 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В СЛУЧАЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ГИСТЕРЕЗИСОВ

Пусть  $p_v^{++}$  — вероятность пребывания в состоянии  $v^{++}$ ,  $v^{++} \in S^{++}$ ,  $p_v^{+-}$  — вероятность пребывания в состоянии  $v^{+-}$ ,  $v^{+-} \in S^{+-}$ ,  $p_v^{--}$  — вероятность пребывания в состоянии  $v^{--}$ ,  $v^{--} \in S^{--}$ .

Для составления системы уравнений статистического равновесия необходимо рассмотреть 7 случаев состояний, когда отсутствует ветвление (т.е. выход из множеств  $S^{++}$ ,  $S^{+-}$  и  $S^{--}$  или вход в эти множества).

Сначала выпишем уравнения, которые являются стандартными для процесса рождения и гибели:

$$p_v^{++}v = p_{v-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad v = 1, \dots, f_3, \quad (2)$$

$$p_v^{+-}v = p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad v = f_3 + 1, \dots, f_2 - 1, \quad (3)$$

$$p_v^{--}v = p_{v-1}^{--}\Lambda_1, \quad v = f_2 + 2, \dots, V; \quad (4)$$

$$x_1 = p_{f_3+1}^{+-}(f_3 + 1) = p_{k_3-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad (5)$$

$$x_2 = p_{f_2+1}^{--}(f_2 + 1) = p_{k_2-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2); \quad (6)$$

которые являются следствием того факта, что не должно быть “перетекания” вероятностей между множествами состояний между множествами состояний  $S^{++}$  и  $S^{+-}$  и  $S^{+-}$  и  $S^{--}$  соответственно;

$$p_v^{++}v + x_1 = p_{v-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad v = f_3 + 1, \dots, k_3 - 1, \quad (7)$$

$$p_v^{+-}v - x_1 = p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad v = f_3 + 2, \dots, k_3 - 1, \quad (8)$$

которые являются следствием того факта, что для состояний, включенных в гистерезис, нужно учитывать “циркулирование” вероятности в первом гистерезисе,

$$p_v^{+-}v + x_2 = p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad v = f_2 + 1, \dots, k_2 - 1, \quad (9)$$

$$p_v^{--}v - x_2 = p_{v-1}^{--}\Lambda_1, \quad v = f_2 + 2, \dots, k_2, \quad (10)$$

которые являются следствием того факта, что для состояний, включенных в гистерезис, нужно учитывать “циркулирование” вероятности во втором гистерезисе. Кроме того, естественно, нужно включить уравнение нормировки

$$\sum_{v=0}^{k_3-1} p_v^{++} + \sum_{v=f_3+1}^{k_2-1} p_v^{+-} + \sum_{v=f_2+1}^V p_v^{--} = 1. \quad (11)$$

Решение этой системы уравнений можно получить следующим образом. Вероятности состояний, участвующих в первом гистерезисе, можно выразить через  $x_1$  следующим образом: из уравнений (5) и (7) следует

$$p_{k_3-1}^{++} = \frac{x_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}, \quad (12)$$

$$p_v^{++} = \frac{p_{v+1}^{++}(v+1) + x_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}, \quad v = f_3, \dots, k_3 - 2, \quad (13)$$

из уравнений (5) и (8) следует, что

$$p_{f_3+1}^{+-} = \frac{x_1}{f_3 + 1}, \quad (14)$$

$$p_v^{+-} = \frac{p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + x_1}{v}, \quad v = f_3 + 2, \dots, k_3. \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) следует, что последовательно используя (15) можно выразить  $p_{k_3}^{+-}$  через  $x_1$ :

$$p_{k_3}^{+-} = C_1 x_1. \quad (16)$$

Аналогично, вероятности состояний, участвующих во втором гистерезисе, можно выразить через  $x_2$  следующим образом: из уравнений (6) и (9) следует

$$p_{k_2-1}^{+-} = \frac{x_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2}, \quad (17)$$

$$p_v^{+-} = \frac{p_{v+1}^{+-}(v+1) + x_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2}, \quad v = f_2, \dots, k_2 - 2, \quad (18)$$

из уравнений (6) и (10) следует, что

$$p_{f_2+1}^{--} = \frac{x_2}{f_2 + 1}, \quad (19)$$

$$p_v^{--} = \frac{p_{v-1}^{--}\Lambda_1 + x_2}{v}, \quad v = f_2 + 2, \dots, k_2. \quad (20)$$

Из уравнений (17) и (18) следует, что последовательно используя (18) можно выразить  $p_{f_2}^{+-}$  через  $x_2$ :

$$p_{f_2}^{+} = C_2 x_2. \quad (21)$$

Соотношение между  $x_1$  и  $x_2$  вычисляется на основании уравнений статистического равновесия на участке между гистерезисами. Используя уравнения статистического равновесия на участке между гистерезисами (3), получаем:

$$p_v^{+-} = p_{k_3}^{+-} \frac{(k_3 + 1) \dots (v + 1)}{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{v-k_3}}, \quad v = k_3 + 1, \dots, f_2, \quad (22)$$

поэтому

$$p_{f_2}^{+-} = p_{k_3}^{+-} \frac{(k_3 + 1) \dots (f_2 + 1)}{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{f_2-k_3}}. \quad (23)$$

Значит из (16), (21) и (23) следует, что

$$x_2 = \frac{C_1}{C_2} \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{f_2-k_3}}{(k_3 + 1) \dots (f_2 + 1)} x_1. \quad (24)$$

Подставив значение  $x_2$  в формулы (9) и (10) для вычисления стационарных вероятностей состояний, участвующих во втором гистерезисе, получаем выражения для всех вероятностей, выраженные через пока неизвестную величину  $x_1$ .

Заметим, что вероятности состояний  $v^{++}$ ,  $v = 0, \dots, f_3 - 1$ , могут быть вычислены через вероятность  $p_{f_3}^{++}$  на основании уравнений (2) следующим образом:

$$p_v^{++} = p_{f_3}^{++} \frac{f_3 \dots (v + 1)}{(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)^{f_3-v}}, \quad v = 0, \dots, f_3 - 1,$$

а вероятности состояний  $v^{--}$ ,  $v = k_2 + 1, \dots, V$ , могут быть вычислены через вероятность  $p_{k_2}^{--}$  на основании уравнений (8) следующим образом:

$$p_v^{--} = p_{k_2}^{--} \frac{k_2 \dots (v-1)}{\Lambda_1^{v-k_2}}, \quad v = k_2 + 1, \dots, V.$$

Подставляя полученные значения стационарных вероятностей в условие нормировки (11), находим значение  $x_1$ , что позволяет вычислить стационарные вероятности, просто разделив полученные их значения на их общую сумму.

Таким образом, алгоритм вычисления стационарных вероятностей в этом случае выглядит следующим образом.

1. Полагаем  $x_1 = 1$ .
2. Вычисляем  $p_{f_3+1}^{+-}$  по формуле (14).
3. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле (15),  $v = f_3 + 2, \dots, k_3$ .
4. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле  $p_v^{+-} = \frac{p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{v}$ ,  $v = k_3 + 1, \dots, f_2$ .
5. Полагаем  $x_2 = 1$ .
6. Вычисляем  $p_{f_3+1}^{+-}$  по формуле (14).
7. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле (15),  $v = f_3 + 2, \dots, k_3$ .
8. Вычисляем  $x_2$  по формуле (24).
9. Умножаем все вероятности, вычисленные в п. 6 и 7, на новое значение  $x_2$ .
10. Вычисляем  $p_{f_2+1}^{--}$  по формуле (19).
11. Вычисляем  $p_v^{--}$  по формуле (20),  $v = f_2 + 2, \dots, k_2$ .
12. Вычисляем  $p_v^{--}$  по формуле  $p_v^{--} = \frac{p_{v-1}^{--}\Lambda_1}{v}$ ,  $v = k_2 + 1, \dots, V$ .
13. Вычисляем  $p_{k_3-1}^{++}$  по формуле (12).
14. Вычисляем  $p_v^{++}$  по формуле (13),  $v = k_3 - 2, \dots, f_3$ .
15. Вычисляем  $p_v^{++}$  по формуле  $p_v^{++} = \frac{p_{v+1}^{++}(v+1)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}$ ,  $v = f_3 - 1, \dots, 0$ .
16. Вычисляем сумму всех вероятностей по формуле (11).
17. Обратную величину суммы полагаем равной  $x_1$ .
18. Умножаем все вероятности на  $x_1$ .

## 5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В СЛУЧАЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ГИСТЕРЕЗИСОВ

Для составления системы уравнений статистического равновесия необходимо рассмотреть 7 случаев состояний, когда отсутствует ветвление (т.е. выход из множеств  $S^{++}$ ,  $S^{+-}$  и  $S^{--}$  или вход в эти множества).

Сначала выпишем уравнения, которые являются стандартными для процесса рождения и гибели:

$$p_v^{++}v = p_{v-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad v = 1, \dots, f_3, \quad (25)$$

$$p_v^{--}v = p_{v-1}^{--}\Lambda_1, \quad v = k_2 + 2, \dots, V; \quad (26)$$

аналогичные (2) и (4),

$$x_1 = p_{f_3+1}^{+-}(f_3 + 1) = p_{k_3-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad (27)$$

$$x_2 = p_{f_2+1}^{--}(f_2 + 1) = p_{k_2-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2); \quad (28)$$

которые являются следствием того факта, что не должно быть “перетекания” вероятностей между множествами состояний между множествами состояний  $S^{++}$  и  $S^{+-}$  и  $S^{+-}$  и  $S^{--}$  соответственно, аналогичные (5) и (6);

$$p_v^{++}v + x_1 = p_{v-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad v = f_3 + 1, \dots, k_3 - 1, \quad (29)$$

$$p_v^{+-}v - x_1 = p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad v = f_3 + 2, \dots, f_2, \quad (30)$$

которые являются следствием того факта, что для состояний, включенных в гистерезис, нужно учитывать “циркулирование” вероятности  $x_1$  в первом гистерезисе (эти уравнения аналогичны (7) и (8), однако теперь изменены границы применимости уравнения (8)),

$$p_v^{+-}v + x_2 = p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad v = k_3 + 1, \dots, k_2 - 1, \quad (31)$$

$$p_v^{--}v - x_2 = p_{v-1}^{--}\Lambda_1, \quad v = f_2 + 2, \dots, k_2, \quad (32)$$

которые являются следствием того факта, что для состояний, включенных в гистерезис, нужно учитывать “циркулирование” вероятности  $x_2$  во втором гистерезисе (эти уравнения аналогичны (9) и (10), однако теперь изменены границы применимости уравнения (9)). Что же касается уравнения (3), то теперь оно изменилось, поскольку необходимо учитывать “циркулирование” вероятностей  $x_1$  и  $x_2$ , поскольку этот участок состояний принадлежит обоим гистерезисам. Вместо уравнений (3) получаем

$$p_v^{+-}v + x_2 = p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + x_1, \quad v = f_2 + 1, \dots, k_3. \quad (33)$$

Кроме того, естественно, нужно включить уравнение нормировки

$$\sum_{v=0}^{k_3-1} p_v^{++} + \sum_{v=f_3+1}^{k_2-1} p_v^{+-} + \sum_{v=f_2+1}^V p_v^{--} = 1, \quad (34)$$

которое в данном случае совпадает с (11).

Как и раньше, необходимо найти соотношение между  $x_1$  и  $x_2$ . Для этого нужно использовать состояния из множества  $S^{+-}$ . Из уравнений (27) и (30) следует, что

$$p_{f_3+1}^{+-} = \frac{x_1}{f_3 + 1}, \quad (35)$$

$$p_v^{+-} = \frac{p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + x_1}{v}, \quad v = f_3 + 2, \dots, f_2, \quad (36)$$

поэтому последовательно используя (36) можно выразить  $p_{f_2}^{+-}$  через  $x_1$

$$p_{f_2}^{+-} = C_1 x_1. \quad (37)$$

Аналогично, вероятности состояний, участвующих во втором гистерезисе, можно выразить через  $x_2$  следующим образом: из уравнений (28) и (31) следует

$$p_{k_2-1}^{+-} = \frac{x_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2}, \quad (38)$$

$$p_v^{+-} = \frac{p_{v+1}^{+-}(v+1) + x_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2}, \quad v = k_3, \dots, k_2 - 2, \quad (39)$$

поэтому последовательно используя (39) можно выразить  $p_{k_3}^{+-}$  через  $x_2$

$$p_{k_3}^{+-} = C_2 x_2. \quad (40)$$

Соотношение между  $x_1$  и  $x_2$  вычисляется на основании уравнений статистического равновесия на общем участке гистерезисов (33). Из этого уравнения следует, что при использовании обозначения  $y = \frac{x_2}{x_1}$

$$p_v^{+-} = \frac{x_1 \{C_1(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{v-f_2} + (1-y)[(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{v-f_2-1} + (f_2+1)(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{v-f_2-2} + \dots + (f_2+1) \dots (v-1)]\}}{\{(f_2+1) \dots v\}} \quad (41)$$

Значит

$$p_{k_3}^{+-} = \frac{x_1 \{C_1(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2} + (1-y)[(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2-1} + (f_2+1)(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2-2} + \dots + (f_2+1) \dots (k_3-1)]\}}{\{(f_2+1) \dots k_3\}} \quad (42)$$

и из (37), (40) и (42) получаем следующее уравнение для  $y$

$$\begin{aligned} & \{C_1(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2} + (1-y)[(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2-1} + \\ & + (f_2+1)(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2-2} + \dots + (f_2+1) \dots (k_3-1)]\} / \\ & \quad / \{(f_2+1) \dots k_3\} = \\ & \quad = C_2 y. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} y = & \{C_1(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2-1} + \\ & + (f_2+1)(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2-2} + \dots + (f_2+1) \dots (k_3-1)\} / \\ & \quad / \{C_2(f_2+1) \dots k_3 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2-1} + \\ & + (f_2+1)(\Lambda_1 + \Lambda_2)^{k_3-f_2-2} + \dots + (f_2+1) \dots (k_3-1)\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставив значение  $x_2$  в формулы (31) и (32) для вычисления стационарных вероятностей состояний, участвующих во втором гистерезисе, получаем выражения для всех вероятностей, выраженные через пока неизвестную величину  $x_1$ .

Из уравнений (28) и (32) следует, что

$$p_{f_2+1}^{--} = \frac{x_2}{f_2+1}, \quad (44)$$

$$p_v^{--} = \frac{p_{v-1}^{--} \Lambda_1 + x_2}{v}, \quad v = f_2+2, \dots, k_2. \quad (45)$$

Заметим, что вероятности состояний  $v^{++}, v = 0, \dots, f_3-1$ , могут быть вычислены через вероятность  $p_{f_3}^{++}$  на основании уравнений (25) следующим образом:

$$p_v^{++} = p_{f_3}^{++} \frac{f_2 \dots (v+1)}{(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)^{f_3-v}}, \quad v = 0, \dots, f_3-1,$$

а вероятности состояний  $v^{--}, v = k_2+1, \dots, V$ , могут быть вычислены через вероятность  $p_{k_2}^{--}$  на основании уравнений (26) следующим образом:

$$p_v^{--} = p_{k_2}^{--} \frac{k_2 \dots (v-1)}{\Lambda_1^{v-k_2}}, \quad v = k_2+1, \dots, V.$$

Подставляя полученные значения стационарных вероятностей в условие нормировки (34), находим значение  $x_1$ , что позволяет вычислить стационарные вероятности, просто разделив полученные их значения на их общую сумму.

Таким образом, алгоритм вычисления стационарных вероятностей в этом случае выглядит следующим образом.

1. Полагаем  $x_1 = 1$ .
2. Вычисляем  $p_{f_3+1}^{+-}$  по формуле (35).
3. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле (36),  $v = f_3 + 2, \dots, f_2$ .
4. Полагаем  $x_2 = 1$ .
5. Вычисляем  $p_{k_2-1}^{+-}$  по формуле (38).
6. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле (39),  $v = k_2 - 2, \dots, k_3$ .
7. Вычисляем  $y$  по формуле (43).
8. Полагаем  $x_2 = y$ .
9. Вычисляем  $p_{k_2-1}^{+-}$  по формуле (38).
10. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле (39),  $v = k_2 - 2, \dots, k_3$ .
11. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле (41),  $v = f_2 + 1, \dots, k_3$ .
12. Вычисляем  $p_{k_3-1}^{++}$  по формуле  $p_{k_3-1}^{++} = \frac{x_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}$ .
13. Вычисляем  $p_v^{++}$  по формуле  $p_v^{++} = \frac{p_{v+1}^{++}(v+1) + x_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}$ ,  $v = k_3 - 2, \dots, f_3$ .
14. Вычисляем  $p_v^{++}$  по формуле  $p_v^{++} = \frac{p_{v+1}^{++}(v+1)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}$ ,  $v = f_3 - 1, \dots, 0$ .
15. Вычисляем  $p_{f_2-1}^{--}$  по формуле (44).
16. Вычисляем  $p_v^{--}$  по формуле (45),  $v = f_2 + 2, \dots, k_2$ .
17. Вычисляем  $p_v^{--}$  по формуле  $p_v^{--} = \frac{p_{v-1}^{--}\Lambda_1}{v}$ ,  $v = k_2 + 1, \dots, V$ .
18. Вычисляем сумму всех вероятностей по формуле (34).
19. Обратную величину суммы полагаем равной  $x_1$ .
20. Умножаем все вероятности на  $x_1$ .

## 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В СЛУЧАЕ, КОГДА ОДИН ГИСТЕРЕЗИС СОДЕРЖИТ ВНУТРИ СЕБЯ ДРУГОЙ ГИСТЕРЕЗИС

В рассматриваемой ситуации возможны уже 10 видов уравнений статистического равновесия. Для их выписывания необходимо, как и в предыдущих случаях, ввести интенсивность “перетекания вероятности” между группами состояний. Пусть  $x_1$  — интенсивность “перетекания вероятности” из группы состояний  $S^{+-}$  в группу  $S^{--}$ ,  $x_2$  — из группы состояний  $S^{+-}$  в группу  $S^{++}$ ,  $x_3$  — из группы состояний  $S^{-+}$  в группу  $S^{--}$ ,  $x_4$  — из группы состояний  $S^{++}$  в группу  $S^{+-}$ ,  $x_5$  — из группы состояний  $S^{--}$  в группу  $S^{-+}$  и  $x_6$  — из группы состояний  $S^{-+}$  в группу  $S^{++}$ . Тогда получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}x_6 &= x_1; \\x_4 &= x_1 + x_2; \\x_5 &= x_1 + x_3.\end{aligned}$$

Следовательно, для определения стационарных вероятностей необходимо найти значения трех неизвестных  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ .

Для состояний  $0^{++}, \dots, (f_2 - 1)^{++}$  получаем стандартные уравнения статистического равновесия для процесса рождения и гибели:

$$p_v^{++}v = p_{v-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad v = 1, \dots, f_3, \quad (46)$$

а для состояний  $k_2, \dots, V$

$$p_v^{--}v = p_{v-1}^{--}\Lambda_1, \quad v = k_2 + 2, \dots, V. \quad (47)$$

Кроме того, естественно, нужно включить уравнение нормировки

$$\sum_{v=0}^{k_3-1} p_v^{++} + \sum_{v=f_3+1}^{k_2-1} p_v^{+-} + \sum_{v=f_2+1}^{k_3-1} p_v^{-+} + \sum_{v=f_3+1}^V p_v^{--} = 1. \quad (48)$$

Для всех остальных состояний при выводе уравнений статистического равновесия нужно учитывать циркуляцию вероятностей, которая на различных участках множества состояний будет различной. Поэтому в рассматриваемой ситуации решение задачи вычисления стационарных вероятностей оказывается более сложным, чем в первом случае. Для состояний  $(f_2)^{++}, \dots, (f_3 - 1)^{++}$  получаем уравнения статистического равновесия

$$p_v^{++}v + x_1 = p_{v-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad v = f_2 + 1, \dots, f_3, \quad (49)$$

а для  $(f_2)^{-+}, \dots, (f_3 - 1)^{-+}$

$$p_v^{-+}v - x_1 = p_{v-1}^{-+}(\Lambda_1 + \Lambda_3), \quad v = f_2 + 1, \dots, f_3. \quad (50)$$

Для группы состояний  $(k_3 + 1)^{+-}, \dots, (k_2 - 1)^{+-}$  получаем уравнения статистического равновесия

$$p_v^{+-}v + x_1 = p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad v = k_3 + 1, \dots, k_2 - 1, \quad (51)$$

а для  $(k_3 + 1)^{--}, \dots, (k_2 - 1)^{--}$ :

$$p_v^{--}v - x_1 = p_{v-1}^{--}\Lambda_1, \quad v = k_3 + 1, \dots, k_2 - 1. \quad (52)$$

Наконец, для состояний  $(f_3 + 1)^{++}, \dots, (k_3 - 1)^{++}$  получаем уравнения статистического равновесия

$$p_v^{++}v + x_1 + x_2 = p_{v-1}^{++}(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3), \quad v = f_3 + 1, \dots, k_3 - 1, \quad (53)$$

для  $(f_3 + 1)^{+-}, \dots, (k_3 - 1)^{+-}$  —

$$p_v^{+-}v - x_2 = p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad v = f_3 + 1, \dots, k_3 - 1, \quad (54)$$

для  $(f_3 + 1)^{-+}, \dots, (k_3 - 1)^{-+}$  —

$$p_v^{-+}v + x_3 = p_{v-1}^{-+}(\Lambda_1 + \Lambda_3), \quad v = f_3 + 1, \dots, k_3 - 1, \quad (55)$$

и для  $(f_3 + 1)^{--}, \dots, (k_3 - 1)^{--}$  —

$$p_v^{--}v - x_1 - x_3 = p_{v-1}^{--}\Lambda_1, \quad v = f_3 + 1, \dots, k_3 - 1. \quad (56)$$

Неизвестные  $x_2$  и  $x_3$  могут быть выражены через  $x_1$  следующим образом. Из определения  $x_1$  следует, что

$$p_{k_2-1}^{+-} = \frac{x_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2}, \quad (57)$$

а из уравнений (51)

$$p_v^{+-} = \frac{p_{v+1}^{+-}(v+1) + x_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2}, \quad v = k_3, \dots, k_2 - 2, \quad (58)$$

поэтому последовательно используя (58) можно выразить  $p_{k_3}^{+-}$  через  $x_1$

$$p_{k_3}^{+-} = C_1 x_1. \quad (59)$$

С другой стороны,

$$p_{f_3+1}^{+-} = \frac{x_2}{f_3 + 1}, \quad (60)$$

и из уравнений (54) получаем

$$p_v^{+-} = \frac{p_{v-1}^{+-}(\Lambda_1 + \Lambda_2) + x_2}{v}, \quad v = f_3 + 2, \dots, k_3, \quad (61)$$

поэтому последовательно используя (58) можно выразить  $p_{k_3}^{+-}$  через  $x_2$

$$p_{k_3}^{+-} = C_2 x_2. \quad (62)$$

Таким образом, из (59) и (62) получаем искомое соотношение

$$x_2 = \frac{C_1}{C_2} x_1. \quad (63)$$

Аналогично находим выражение для  $x_3$  через  $x_1$ , воспользовавшись состояниями  $S^{-+}$ . Из определения  $x_1$  следует, что

$$p_{f_2+1}^{-+} = \frac{x_1}{f_2 + 1}, \quad (64)$$

а из уравнений (50) получаем

$$p_v^{-+} = \frac{p_{v-1}^{-+}(\Lambda_1 + \Lambda_3) + x_1}{v}, \quad v = f_2 + 2, \dots, f_3, \quad (65)$$

поэтому последовательно используя (65) можно выразить  $p_{k_3}^{-+}$  через  $x_1$

$$p_{f_3}^{-+} = C_3 x_1. \quad (66)$$

С другой стороны,

$$p_{k_3-1}^{-+} = \frac{x_3}{\Lambda_1 + \Lambda_3}, \quad (67)$$

и из уравнений (55) получаем

$$p_v^{-+} = \frac{p_{v+1}^{-+}(v+1) + x_3}{\Lambda_1 + \Lambda_3}, \quad v = f_3, \dots, k_3 - 2, \quad (68)$$

поэтому последовательно используя (68) можно выразить  $p_{k_3}^{-+}$  через  $x_3$

$$p_{f_3}^{-+} = C_4 x_3. \quad (69)$$

Таким образом, из (66) и (69) получаем искомое соотношение

$$x_3 = \frac{C_3}{C_4} x_1. \quad (70)$$

Осталось рассмотреть еще 6 участков, чтобы выразить все стационарные вероятности через  $x_1$ .

Для состояний  $(f_3 + 1)^{++}, \dots, (k_3 - 1)^{++}$  получаем из уравнения статистического равновесия (53)

$$p_v^{++} = \frac{p_{v+1}^{++}(v+1) + x_1 + x_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}, \quad v = k_3 - 2, \dots, f_3, \quad (71)$$

используя в качестве значения  $p_{k_3-1}^{++}$  величину  $\frac{x_1+x_2}{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3}$ , где  $x_2$  выражается через  $x_1$  по формуле (63).

Для состояний  $(f_2)^{++}, \dots, (f_3 - 1)^{++}$  получаем из уравнения статистического равновесия (49)

$$p_v^{++} = \frac{p_{v+1}^{++}(v+1) + x_1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}, \quad v = f_3 - 1, \dots, f_2, \quad (72)$$

используя в качестве значения  $p_{f_3}^{++}$  финальную величину, вычисленную по формуле (71).

Для состояний  $0^{++}, \dots, (f_2 - 1)^{++}$  из уравнений (46)

$$p_v^{++} = \frac{p_{v+1}^{++}(v+1)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}, \quad v = f_2 - 1, \dots, 0, \quad (73)$$

которые позволяют последовательно вычислять значения вероятностей через параметр  $x_1$ , используя вычисленное ранее по формуле (72) значение вероятности  $p_{f_3}^{++}$ .

Для  $(f_3 + 1)^{--}, \dots, (k_3 - 1)^{--}$  из уравнений (56) получаем

$$p_v^{--} = \frac{p_{v-1}^{--}\Lambda_1 + x_1 + x_3}{v}, \quad v = f_3 + 1, \dots, k_3, \quad (74)$$

используя в качестве значения  $p_{f_3+1}^{--}$  величину  $\frac{x_1+x_3}{f_3+1}$ , где  $x_3$  выражается через  $x_1$  по формуле (70); для  $(k_3 + 1)^{--}, \dots, (k_2 - 1)^{--}$ : из уравнений (52) получаем

$$p_v^{--} = \frac{p_{v-1}^{--}\Lambda_1 + x_1}{v}, \quad v = k_3 + 1, \dots, k_2, \quad (75)$$

используя в качестве значения  $p_{k_3}^{--}$  финальную величину, вычисленную по формуле (75); для состояний  $(k_2 + 1)^{--}, \dots, V^{--}$  — из уравнений (47) получаем

$$p_v^{--} = \frac{p_{v-1}^{--}\Lambda_1}{v}, \quad v = k_2 + 1, \dots, V, \quad (76)$$

используя в качестве значения  $p_{k_2}^{--}$  финальную величину, вычисленную по формуле (71).

Таким образом, алгоритм вычисления стационарных вероятностей в этом случае выглядит следующим образом.

1. Полагаем  $x_1 = 1$ .
2. Вычисляем  $p_{k_2-1}^{+-}$  по формуле (57).
3. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле (58),  $v = k_2 - 2, \dots, k_3$ .

4. Находим значение  $C_1$  по формуле (59).
5. Полагаем  $x_2 = 1$ .
6. Вычисляем  $p_{f_3+1}^{+-}$  по формуле (60).
7. Вычисляем  $p_v^{+-}$  по формуле (61),  $v = f_3 + 2, \dots, k_3$ .
8. Находим значение  $C_2$  по формуле (62).
9. Вычисляем  $x_2$  по формуле (63).
10. Пересчитываем все вероятности, вычисленные в п. 5 и 6, с новым значением  $x_2$ .
11. Вычисляем  $p_{f_2+1}^{-+}$  по формуле (64).
12. Вычисляем  $p_v^{-+}$  по формуле (65),  $v = f_2 + 2, \dots, f_3$ .
13. Находим значение  $C_3$  по формуле (66).
14. Полагаем  $x_3 = 1$ .
15. Вычисляем  $p_{k_3-1}^{-+}$  по формуле (67).
16. Вычисляем  $p_v^{-+}$  по формуле (68),  $v = k_3 - 2, \dots, f_3$ .
17. Находим значение  $C_4$  по формуле (69).
18. Вычисляем  $x_3$  по формуле (70).
19. Пересчитываем все вероятности, вычисленные в п. 12 и 13, с новым значением  $x_3$ .
20. Вычисляем  $p_{k_3-1}^{++} = \frac{x_1+x_2}{\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3}$ .
21. Вычисляем  $p_v^{++}$  по формуле (71),  $v = k_3 - 2, \dots, f_3$ .
22. Вычисляем  $p_v^{++}$  по формуле (72),  $v = f_3 - 1, \dots, f_2$ .
23. Вычисляем  $p_v^{++}$  по формуле (73),  $v = f_2 - 1, \dots, 0$ .
24. Вычисляем  $p_{f_3+1}^{--} = \frac{x_1+x_3}{f_3+1}$ .
25. Вычисляем  $p_v^{--}$  по формуле (74),  $v = f_3 + 2, \dots, k_3$ .
26. Вычисляем  $p_v^{--}$  по формуле (75),  $v = k_3 + 1, \dots, k_2$ .
27. Вычисляем  $p_v^{--}$  по формуле (76),  $v = k_2 + 1, \dots, V$ .
28. Вычисляем сумму всех вероятностей по формуле (48).
29. Обратную величину суммы полагаем равной  $x_1$ .
30. Умножаем все вероятности на  $x_1$ .

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании вычисленных стационарных вероятностей можно рассчитать такие характеристики как вероятность потерь требований каждого из потоков и вычислить средние значения стоимостных функционалов, описывающих доход от обслуживания требований соответствующих потоков.

В последующих работах будут приведены результаты численных исследований, позволяющих определить эффективность управления в зависимости от выбора варианта расположения гистерезисов.

Полученные алгоритмы позволяют получать оценки погрешности вычисления характеристик, если провести исследования, аналогичные [6].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрианов Г.А. Учет влияния повторных вызовов при интерпретации результатов измерения качества обслуживания. *Обзорные прикладной и промышленной математики*. 2010. Т. 17, вып. 2. С. 247–248.
2. Богомолова Н.Е., Чернушевич Я.В. Динамическое управление приоритетами при дифференцированном обслуживании абонентов в фиксированной инфраструктуре подвижной сети *Информационные процессы*. Т. 5, №3. 2005. С. 194–200.
3. Вишневецкий В.М., Портной С.Л., Шахнович И.В. *Энциклопедия WiMAX. Путь к 4G*. М.: Техносфера. 2009.

4. Лазарев В.Г., Лазарев Ю.В. *Динамическое управление потоками информации в сетях связи*. М.: Радио и связь. 1983.
5. Сегайер А. Численное исследование алгоритмов расчета вероятности потерь для многопоточковых моделей пакетных сетей *Информационные процессы*. Т. 9, № 3. 2005. С. 161–182.
6. Сегайер А., Цитович И.И. Об интервальных задачах для моделей пакетных сетей. *Обзорные прикладной и промышленной математики*. Т. 15. № 6. 2008. С. 1130–1131.
7. Степанов С.Н. *Численные методы расчета систем с повторными вызовами*. М.: Наука. 1983.
8. Тихвинский В.О., Терентьев С.В., Юрчук А.Б. *Сети мобильной связи LTE: технологии и архитектура*. М.: Эко-Трендз. 2010.