Информационные процессы, Том 11, № 2, 2011, стр. 277–290.

Подходы к исследованию формальных контекстов

С.Ю. Соловьев, Д.Е. Стельмашенко

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 17.06.2011

Аннотация—В статье рассматривается задача конструирования неизвестного формального контекста по его локальным фрагментам, каждый из которых также является формальным контекстом. Показывается, что при целенаправленном формировании локальных контекстов задача разрешима в определенных пределах.

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории формальных понятий [1] предлагается подход к построению понятийных структур проблемных областей на основании так называемых формальных контекстов. В сущности формальный контекст есть отчет о полевых исследованиях, в котором перечисляются встреченные объекты и их признаки-характеристики. Обычно отчеты такого рода не бывают полными, и аналитики вынуждены решать задачу сведения в единое целое наблюдений, полученных в разных полевых исследованиях. В настоящей работе предлагаются подходы к решению этой задачи с использованием аппарата формальных понятий.

2. ФОРМАЛЬНЫЕ КОНТЕКСТЫ И ФОРМАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

Согласимся использовать букву N для обозначения множества некоторых элементов, именуемых признаками. В примерах для конкретных значений признаков будем использовать целые числа. Относительно множества N известно, что оно состоит из двух фиксированных подмножеств N_1 и N_2. $N = N_1 \cup N_2$. Условие $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ не предполагается. Кроме того, в дальнейшем будем рассматривать и другие подмножества признаков, для обозначения которых используется буква N с индексами.

Подмножества признаков будем называть объектами, а для их обозначения будем использовать строчные буквы латинского алфавита: a, b, c и т.д. $a \subseteq N$, $b \subseteq N$ и т.д.

Любой объект a можно однозначно представить в виде объединения двух подмножеств $a_1 = a \cap N_1$ и $a_2 = a \cap N_2$. Для удобства обозначений вместо $a = a_1 \cup a_2$ будем писать $a = a_1 + a_2$, понимая,
что существует (фиксированное) представление множества признаков N
в виде объединения множеств N_1 и N_2, и
что $a_1 = a \cap N_1$ и $a_2 = a \cap N_2$.

Учитывая особую роль нижних индексов в обозначениях объектов, согласимся для именования конкретных объектов использовать строчные буквы греческого алфавита: α, β, γ и т.д.

Непустые подмножества объектов будем называть классами, а для их обозначения будем использовать заглавные буквы латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Если множества N_1 и N_2 известны, то любой класс A однозначно порождает классы

$$A_1 = \{a_1 \mid a_1 + a_2 \in A\} \equiv \{a \cap N_1 \mid a \in A\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{a_2 \mid a_1 + a_2 \in A\} \equiv \{a \cap N_2 \mid a \in A\}.$$

Пусть A – класс, c – множество признаков. Введем операции $Con(A)$ и $A[c]$ следующим образом:

$$Con(A) = \bigcap_{a \in A} a, \qquad A[c] = \{\ a\ \in\ A \mid c\ \subseteq\ a\ \}$$

Определение 1. Формальным контекстом или просто контекстом называется пара $< D, N >$, где D – класс объектов, N – множество признаков и $D\ \subseteq\ 2^N$.

Отметим два обстоятельства.

Во-первых, будем полагать, что для любого формального контекста $< D, N >$ выполняется:

$$Con(D) = \emptyset. \tag{1}$$

Требование (1) не ограничивает общности рассмотрения, поскольку при наличии у объектов общей части ее можно предварительно "вывести за рамки рассмотрения" и "вернуть" в нужный момент.

Во-вторых, в определении контекста ведущая роль принадлежит классу объектов, а N однозначно определяется как $\{\ n\ \in\ d \mid d\ \in\ D\ \}$. Это обстоятельство позволяет задавать контексты перечислением объектов из D. В связи с этим фразу "контекст D" будем понимать как "контекст, образованный классом D и признаками, входящими в его объекты".

Пример 1. Приведем четыре способа задания одного и того же формального контекста $< D_S, N_S >$.

Первый способ. Контекст есть пара множеств:

$$\begin{aligned} D_S\ &=\ \{\ \{\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\ \},\ \{\ 0,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8\ \},\ \{\ 0,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9\ \},\ \{\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9\ \},\\ &\qquad \{\ 0,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9\ \}\ \},\\ N_S\ &=\ \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ \}. \end{aligned}$$

Второй способ. Контекст можно задавать перечислением составляющих его объектов:

$$\begin{aligned} \alpha\ &=\ \{\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\ \},\\ \beta\ &=\ \{\ 0,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8\ \},\\ \gamma\ &=\ \{\ 0,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9\ \},\\ \delta\ &=\ \{\ 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9\ \},\\ \epsilon\ &=\ \{\ 0,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9\ \}. \end{aligned}$$

Третий способ. Контекст можно задавать таблицей "объект-признак" :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	×		×		×		×		×	
β	×		×			×		×	×	
γ	×			×	×			×		×
δ		×	×			×	×			×
ϵ	×			×		×	×			×

Четвертый способ. В некоторых случаях контекст можно задавать таблицей "объект-свойство" :

	0|1	2|3	4|5	6|7	8|9
α	0	2	4	6	8
β	0	2	5	7	8
γ	0	3	4	7	9
δ	1	2	5	6	9
ϵ	0	3	5	6	9

Таблица "объект-свойство" получается в результате "соединения" нескольких признаков в одно свойство. В примере таких свойств оказалось пять: 0|1, 2|3, 4|5, 6|7 и 8|9. Вообще говоря, таблица "объект-свойство" существует не для всех контекстов, а свойства могут соединять и более двух признаков.

Если в примерах:

– класс объектов можно задать перечислением уникальных имен его объектов, то такой класс будем записывать в виде строки, состоящей из имен объектов, игнорируя фигурные скобки и запятые. То есть $\alpha\ \beta\ \gamma$ вместо $\{\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\ \}$ и т.д.
– некоторый объект состоит только из цифр, то будем его записывать в виде строки символов, игнорируя фигурные скобки и запятые. То есть 056 вместо $\{\ 0,\ 5,\ 6\ \}$ и т.д.

Определение 2. Формальным понятием в контексте $< D, N >$ называется такой класс объектов A, $A \subseteq D$, для которого справедливо равенство $A = \{\ d \in D \mid Con(A)\ \subseteq d\ \}$. При этом множество $Con(A)$ называется содержанием формального понятия A.

В некоторых случаях [2,3] понятие рассматривается как пара или n-ка, обладающая, помимо прочего, объемом (экстентом, экстенсионалом, ext) и содержанием (интентом, интенсионалом, int). В настоящем изложении

– понятие и его объем не различаются, а
– пара множеств A и $Con(A)$, где A - понятие, именуется понятием-в-полной-форме или пф-понятием.

С использованием операции $D[\cdot]$ можно привести два эквивалентных определения формального понятия:

–1– В контексте $< D, N >$ класс A есть формальное понятие
тогда и только тогда, когда $A = D[Con(A)]$.
–2– В контексте $< D, N >$ класс $D[c]$ есть формальное понятие
тогда и только тогда, когда $c = Con(D[c])$.

Как следует из требования (1), в любом формальном контексте $< D, N >$ класс D является формальным понятием, а его содержание есть пустое множество $\emptyset$.

Если множества D и N содержат соответственно m и k элементов, то контекст $< D, N >$ может порождать не более $min(2^m, 2^k)$ понятий.

Пример 2. Приведем два формальных контекста $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$, порождающие 6 и 11 понятий соответственно.

Контекст

$< D_1, N_1 >$	0	1	2	3
ε	×		×	
ζ	×			×
η		×	×	

Понятие	*Содержание*
$\varepsilon\ \zeta\ \eta$	$\emptyset$
$\varepsilon\ \zeta$	0
ε	02
ζ	03

Понятие	*Содержание*
η	12
$\varepsilon\ \eta$	2

Контекст

$< D_2, N_2 >$	4	5	6	7	8	9
θ	×		×		×	
ϑ		×		×	×	
ι	×			×		×
κ		×	×			×

Понятие	*Содержание*
$\theta\ \vartheta\ \iota\ \kappa$	$\emptyset$
$\theta\ \iota$	4
θ	468
ι	479
$\vartheta\ \kappa$	5
κ	569

Понятие	*Содержание*
ϑ	578
$\theta\ \kappa$	6
$\vartheta\ \iota$	7
$\theta\ \vartheta$	8
$\iota\ \kappa$	9

В контексте $< D_1, N_1 >$ формальным понятием не является класс $\{\ \zeta,\ \eta\ \}$.

В контексте $< D_2, N_2 >$ формальными понятиями не являются классы $\{\ \theta,\ \vartheta,\ \iota\ \}$, $\{\ \theta,\ \vartheta,\ \kappa\ \}$, $\{\ \theta,\ \iota,\ \kappa\ \}$ и $\{\ \vartheta,\ \iota,\ \kappa\ \}$.

Пусть $< D, N >$ - формальный контекст. Будем обозначать
D^F – множество всех понятий в контексте D;
D^C – множество содержаний понятий в контексте D; $\qquad D^C = \{\ Con(A) \mid A \in D^F\ \}$.

В примере 2

для контекста $< D_1, N_1 >$ $\quad D_1^F = \{\ \varepsilon\zeta\eta,\ \varepsilon\zeta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \varepsilon\eta\ \}$ и
$D_1^C = \{\ \emptyset,\ 0,\ 02,\ 03,\ 12,\ 2\ \}$,

для контекста $< D_2, N_2 >$ $\quad D_2^F = \{\ \theta\vartheta\iota\kappa,\ \theta\iota,\ \theta,\ \iota,\ \vartheta\kappa,\ \kappa,\ \vartheta,\ \theta\kappa, \vartheta\iota,\ \theta\vartheta,\ \iota\kappa\ \}$ и
$D_2^C = \{\ \emptyset,\ 4,\ 468,\ 479,\ 5,\ 569,\ 578,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ \}$.

3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ФОРМАЛЬНЫХ КОНТЕКСТОВ

Приведем минимально необходимый набор формальных свойств, присущих операциям над формальными контекстами и их компонентами.

Свойство 1. *Если A – класс объектов, составленных из признаков множества $N = N_1 \cup N_2$, то*
$$N_1 \cap Con(A) = Con(A_1);$$
$$N_2 \cap Con(A) = Con(A_2);$$
$$Con(A) = Con(A_1) \cup Con(A_2).$$

Действительно,

$$Con(A_i) = \bigcap_{a_1+a_2 \in A} a_i = \bigcap_{a \in A} (N_i \cap a) = N_i \cap \bigcap_{a \in A} a = N_i \cap Con(A), \qquad i = 1, 2;$$
$$\begin{aligned} Con(A_1) \cup Con(A_2) &= (N_1 \cap Con(A)) \cup (N_2 \cap Con(A)) = \\ &= (N_1 \cup N_2) \cap Con(A) = \\ &= Con(A). \end{aligned}$$

Свойство 2. *Если два множества признаков c_1 и c_2 связаны отношением $c_1 \subseteq c_2$, то $\quad D[c_1] \supseteq D[c_2]$.*

Действительно, $b \in D[c_2]$ эквивалентно $c_2 \subseteq b \in D$, откуда $c_1 \subseteq c_2 \subseteq b \in D$, и $c_1 \subseteq b \in D$, что эквивалентно $b \in D[c_1]$.

Свойство 3. *Если для некоторого множества признаков c, $D[c] \neq \emptyset$, то $\quad D[c]$ – понятие в контексте $< D, N >$.*

Так как $c \subseteq Con(D[c])$, то возможно одно из двух:
– либо $c = Con(D[c])$, тогда пара $D[c]$ и c есть пф-понятие;
– либо $c \subset Con(D[c])$, то есть $Con(D[c]) = c \cup c'$ и тогда:
 ◦ с одной стороны, все элементы $D[c]$ имеют вид $c \cup c' \cup d'$, и следовательно $\quad D[c] \subseteq D[c + c']$;
 ◦ с другой стороны, $D[c] \supseteq D[c + c']$, что следует из свойства 2;
то есть пара $D[c]$ и $c + c'$ есть пф-понятие.

Свойство 4. (Альтернативная форма свойства 3)
Для любого множества признаков с из контекста $< D, N >$ возможно одно из трех:

Случай 1. $D[c] = \emptyset$, *то есть* $D[c]$ *не является понятием;*
Случай 2. $D[c] \neq \emptyset$ *и* $c \subset Con(D[c])$, *то есть* $D[c]$ *– понятие в контексте* $< D, N >$;
Случай 3. $D[c] \neq \emptyset$ *и* $c = Con(D[c])$, *то есть* $D[c]$ *и* c *– пф-понятие.*

Свойство 5. *Для любого контекста* $< D, N >$ *имеет место* $D \subseteq D^C$.

Если $d_0 \in D$ и $d_0 = \emptyset$, то d_0 – содержание понятия D.
Если $d_0 \in D$ и $d_0 \neq \emptyset$, то d_0 – содержание понятия $D[d_0]$ и
– из определения $D[d_0]$ следует, что $Con(D[d_0]) \supseteq d_0$;
– из $d_0 \in D$ следует, что $Con(D[d_0]) \subseteq d_0$ и $D[d_0] \neq \emptyset$.
В обоих "если" $d_0 \in D^C$. Свойство установлено.

Свойство 6. *Для любого контекста* $< D, N >$ *имеет место* $D^C = (D^C)^C$.

Из свойства 5 для контекста D^C следует: $D^C \subseteq (D^C)^C$.
Установим обратное вложение. Пусть $d' \in (D^C)^C$.
В этом случае существует понятие A' из $(D^C)^F$ такое, что $Con(A') = d'$.
Понятие A', вообще говоря, состоит из двух частей $B' = A' \cap D$ и $B'' = A' \cap (D^C \setminus D)$.
Каждый элемент b из B'' по определению множества D^C представляет собой содержание некоторого понятия B_b в контексте D.

$$A' = B' \cup B'' = B' \cup \bigcup_{b \in B''} Con(B_b), \qquad Con(A') = Con(B') \cap \bigcap_{b \in B''} Con(B_b) = d'.$$

Определим класс C в контексте D следующим образом:

$$C = B' \cup \bigcup_{b \in B''} B_b \cup B''', \quad \text{где} \quad B''' = \{ \, d \in D \mid d' \subseteq d \, \}.$$

$$B' \cup \bigcup_{b \in B''} B_b \subseteq B''', \quad \text{поэтому} \quad C = B'''.$$

$$Con(C) = Con(B') \cap \bigcap_{b \in B''} Con(B_b) \cap Con(B''') = Con(A') \cap Con(B''') = d' \cap Con(B''') = d'.$$

Следовательно C есть понятие в контексте D^C и $Con(C) = d'$, что означает $d' \in D^C$ и $D^C \supseteq (D^C)^C$. Свойство установлено.

Свойство 7. *Если для некоторого понятия* A *в контексте* $< D, N >$ *и*
для некоторого множества признаков c, $c \subseteq N$,
имеет место $A \subseteq D[c]$,
тогда $Con(A) \supseteq c$.

Покажем это. Учитывая, что A – понятие, и все объекты a из A (как элементы $D[c]$) можно представить в виде $a = c \cup a'$, имеем:

$$Con(A) = \bigcap_{a \in A} a = \bigcap_{c \cup a' \in A} (c \cup a') = c \cup \bigcap_{c \cup a' \in A} a', \quad \text{то есть} \quad Con(A) \supseteq c.$$

Так, в примере 1:
▷ для $A = \{\delta, \epsilon\}$, $c = \{6, 9\}$ имеет место $A = D[c] = \{\delta, \epsilon\}$ и $Con(A) = \{5, 6, 9\} \supset c$;
▷ для $A = \{\alpha\}$, $c = \{0, 2\}$ имеет место $A \subset D[c] = \{\alpha, \beta\}$ и $Con(A) = \{0, 2, 4, 6, 8\} \supset c$.

Согласно свойству 3 $D[c]$ есть понятие и $D[c] = D[Con(D[c])]$, поэтому из свойства 7 следует $Con(A) \supseteq Con(D[c])$, что соответствует известному в логике закону обратного отношения между содержанием и объемом понятия [4].

4. ГЛОБАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ КОНТЕКСТЫ

Для заданного глобального контекста $< D, N >$ представление признаков N в виде двух подмножеств N_1 и N_2 однозначно порождает пару локальных контекстов
$< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$, где $D_1 = \{d_1 \mid d_1 + d_2 \in D\}$ и $D_2 = \{d_2 \mid d_1 + d_2 \in D\}$.

Обратная задача, задача конструирования глобального контекста $< D, N >$ по двум известным локальным контекстам, вообще говоря, не имеет единственного решения. Так, для локальных контекстов $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$ из примера 2 можно построить 2161 порождающих их глобальных контекстов. Одним из 2161 контекстов является – это легко проверить – контекст $< D_S, N_S >$ из примера 1. Понятно, что для удовлетворительного решения обратной задачи потребуется привлекать дополнительную информацию о неизвестном глобальном контексте. В свою очередь, виды полезной дополнительной информации и способы ее использования проявляют себя в закономерностях связей между локальными и глобальными контекстами. В [5] приводятся два утверждения

Утверждение 1. *Если A – формальное понятие в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$, то в контексте $< D_1, N_1 >$ существует понятие B_1 (см.[1]), для которого $Con(B_1) = Con(A_1)$.*

Утверждение 2.
Пусть (а) $< D, N_1 \cup N_2 >$ – формальный контекст;
(б) B_1 – формальное понятие в контексте $< D_1, N_1 >$;
(в) B_2 – формальное понятие в контексте $< D_2, N_2 >$.
Тогда класс $B = \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1$ и $b_2 \in B_2\}$
является формальным понятием[2] в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$.

Из утверждения 2 вытекает

Следствие 1. *Если B_1 – понятие в контексте $< D_1, N_1 >$, то в контексте $< D, N >$ существует формальное понятие B, для которого $Con(B_1) \subseteq Con(B)$.*

Доказательство. Положим

$$B_2 = D_2 \quad \text{и} \quad B = \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1,\ b_2 \in D_2\ \} = \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1\ \}$$

Поскольку B_1 – понятие, то существует $a_1 \colon a_1 \in B_1 \subseteq D_1$.
Поскольку $a_1 \in D_1$, то существует $a_2 \colon a_1 + a_2 \in D$.
Из определения B следует, что $a_1 + a_2 \in B$, то есть $B \neq \emptyset$.
Поскольку $B \neq \emptyset$, то из утверждения 2 следует, что B – понятие в контексте $< D, N >$.
По определению понятия B каждый его элемент имеет вид $Con(B_1) \cup b_1' \cup b_2$,
поэтому $Con(B_1) \subseteq Con(B)$. Следствие доказано.

Существенное условие утверждения 2 состоит в том, что в класс B включаются исключительно элементы из D: "$b_1 + b_2 \in D$". Это условие ограничивает возможности применения утверждения 2 для целей конструирования неизвестного глобального контекста $< D, N_1 \cup N_2 >$ по известным локальным контекстам.

Несколько ослабить зависимость от полного знания глобального контекста можно за счет использования функций q_1 и q_2, играющих роль "свидетельств о происхождении" элементов D_1 и D_2.

$$q_1 : D_1 \to 2^D \qquad q_1(b_1) = \{\ a_1 + a_2 \in D \mid a_1 = b_1\ \},$$
$$q_2 : D_2 \to 2^D \qquad q_2(b_2) = \{\ a_1 + a_2 \in D \mid a_2 = b_2\ \}.$$

[1] $B_1 = D_1[Con(A_1)]$
[2] Если $B = \emptyset$, то B не является классом, и утверждение 2 к нему не относится.

В выкладках более удобны производные от q_1 и q_2 функции p_1 и p_2, отображающие подклассы объектов из D_1 и D_2 в подклассы из D.

$$p_1 : 2^{D_1} \to 2^D \qquad p_1(A_1) = \bigcup_{a_1 \in A_1} q(a_1),$$
$$p_2 : 2^{D_2} \to 2^D \qquad p_2(A_2) = \bigcup_{a_2 \in A_2} q(a_2).$$

Множество $p_i(A_i)$ составляют все такие объекты из D, которые "объясняют" объекты из A_i. Можно считать, что $p_i(A_i)$ – объекты-родители класса A_i.

Пример 3. Предположим, что локальные контексты $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$, приведенные в примере 2, получены из глобального контекста $< D_S, N_S >$, приведенного в примере 1. Тогда можно однозначно определить функции q_1 и q_2, а также функции p_1 и p_2[3].

b_1	$q_1(b_1)$
ε	$\alpha\ \beta$
ζ	$\gamma\ \epsilon$
η	δ

b_2	$q_2(b_2)$
θ	α
ϑ	β
ι	γ
κ	$\delta\ \epsilon$

A_1	$p_1(A_1)$
$\varepsilon\ \zeta\ \eta$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$
$\varepsilon\ \zeta$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \epsilon$
ε	$\alpha\ \beta$
ζ	$\gamma\ \epsilon$
η	δ
$\varepsilon\ \eta$	$\alpha\ \beta\ \delta$

A_2	$p_2(A_2)$
$\theta\ \vartheta\ \iota\ \kappa$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$
$\theta\ \iota$	$\alpha\ \gamma$
θ	α
ι	γ
$\vartheta\ \kappa$	$\beta\ \delta\ \epsilon$
κ	$\delta\ \epsilon$
ϑ	β
$\theta\ \kappa$	$\alpha\ \delta\ \epsilon$
$\vartheta\ \iota$	$\beta\ \gamma$
$\theta\ \vartheta$	$\alpha\ \beta$
$\iota\ \kappa$	$\gamma\ \delta\ \epsilon$

Свойство 8. *Если B_1 и B_2 – формальные понятия в контекстах $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$, то* $p_1(B_1) = \{\ b_1 + b_2 \in D \mid Con(B_1) \subseteq b_1\ \}$.
$p_2(B_2) = \{\ b_1 + b_2 \in D \mid Con(B_2) \subseteq b_2\ \}$.

В самом деле,
$$\begin{aligned} p_i(B_i) &= \{\ b_1 + b_2 \in D \mid b_i \in B_i\ \} = \\ &= \{\ b_1 + b_2 \in D \mid b_i \in \{\ d_i \mid Con(B_i) \subseteq d_i \in D_i\ \}\ \} = \\ &= \{\ b_1 + b_2 \in D \mid Con(B_i) \subseteq b_i \in D_i\ \} = \\ &= \{\ b_1 + b_2 \in D \mid Con(B_i) \subseteq b_i\ \}, \qquad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Утверждение 3.
Для любого формального понятия A в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$ существуют формальные понятия B_1 в контексте $< D_1, N_1 >$ и B_2 в контексте $< D_2, N_2 >$ такие, что (а) $Con(A) = Con(B_1) \cup Con(B_2)$;
(б) $A = p_1(B_1) \cap p_2(B_2)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное формальное понятие A в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$ и определим классы

$$B_1 = \{\ d_1 \mid Con(A_1) \subseteq d_1 \in D_1\ \}, \text{ где } A_1 = \{a_1 \mid a_1 + a_2 \in A\},$$
$$B_2 = \{\ d_2 \mid Con(A_2) \subseteq d_2 \in D_2\ \}, \text{ где } A_2 = \{a_2 \mid a_1 + a_2 \in A\}.$$

[3] p_1 и p_2 достаточно определить на понятиях соответствующих контекстов.

Из утверждения 1 следует, что B_1 и B_2 – формальные понятия в контекстах $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$ соответственно. Из свойства 1 и утверждения 1 (с учетом замечания) имеем:

$$Con(A) \; = \; Con(A_1) \; \cup \; Con(A_2) \; = \; Con(B_1) \; \cup \; Con(B_2)$$

Утверждение (a) доказано. Для завершения доказательства последовательно покажем, что
1) $p_1(B_1) = A + A'$, где $A' \subseteq D \setminus A$
2) $p_2(B_2) = A + A''$, где $A'' \subseteq D \setminus A$
3) $p_1(B_1) \cap p_2(B_2) = A$.

Первое. Рассмотрим произвольный объект a из A. $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$. Из $a_1 \in A_1$ следует, что $Con(A_1) \subseteq a_1$. Поэтому

$$a = a_1 + a_2 \in \{ \; b_1 + b_2 \in D \mid Con(A_1) \subseteq b_1 \; \}.$$

То есть, с учетом свойства 7, $a \in p_1(B_1)$, или $A \subseteq p_1(B_1)$, откуда следует 1).

Второе. Равенство 2) доказывается аналогично равенству 1).

Третье. $p_1(B_1) \cap p_2(B_2) = (A \cup A') \cap (A \cup A'') = A \cup$
$\cup \; (A \cap A') \cup (A \cap A'') \cup (A' \cap A'')$

$A \cap A' = \emptyset$, $A \cap A'' = \emptyset$ по определению множеств A' и A''.
Покажем, что $A' \cap A'' = \emptyset$. Допустим множество $A' \cap A''$ содержит объект c, что означает $c \notin A$, $Con(A_1) \subseteq c$ и $Con(A_2) \subseteq c$. Откуда $Con(A_1) \cup Con(A_2) \subseteq c$, то есть, с учетом свойства 7, $Con(A) \subseteq c$, что означает $c \in A$, а это противоречит допущению.
Поэтому $A' \cap A'' = \emptyset$ и $p_1(B_1) \cap p_2(B_2) = A$.
Утверждение 3 доказано[4].

Следствие 2. *Пусть* $< D, N_1 \cup N_2 >$ *– формальный контекст;*
D, N_1, N_2 *– фиксированные множества;*
c *– множество признаков; и*
для всех представлений $c = c_1 \cup c_2$ *класс* $D_1[c_1]$ *не является понятием.*
Тогда $D[c]$ *не является понятием в контексте* $< D, N_1 \cup N_2 >$.

Для доказательства достаточно предположить обратное – $D[c]$ является понятием в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$. Тогда из утверждения 3 следует существование представления $c = c_1 \cup c_2$, для которого $D[c]$ все-таки является понятием в контексте $< D, N_1 \cup N_2 >$.

Если глобальный контекст $< D, N_1 \cup N_2 >$ зафиксирован, то
○ каждое понятие B_1 в контексте $< D_1, N_1 >$ порождает множества $p_1(B_1)$ и $Con(B_1)$;
○ каждое понятие B_2 в контексте $< D_2, N_2 >$ порождает множества $p_2(B_2)$ и $Con(B_2)$;
○ каждая пара понятий B_1 и B_2 в контекстах $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$ порождает множества $p_1(B_1) \cap p_2(B_2)$ и $Con(B_1) \cup Con(B_2)$;
○ все множества, порожденные парами понятий, сводятся в таблицу $W(D_1, D_2)$[5], в которой:
 ▷ строки соответствуют множествам $p_1(B_1)$ и $Con(B_1)$;
 ▷ столбцы соответствуют множествам $p_2(B_2)$ и $Con(B_2)$;
 ▷ на пересечении строк и столбцов размещаются множества $p_1(B_1) \cap p_2(B_2)$ и $Con(B_1) \cup Con(B_2)$.

Пример 4. Будем полагать:
что в роли глобального контекста выступает $< D_S, N_S >$ из примера 1,
что локальными контекстами являются $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$ из примера 2, и

---

[4] Утверждение 3 можно также вывести из утверждения 1, приведенного в [5], и утверждения 18, приведенного в [6].
[5] Строго говоря, $W(D_1, D_2) = \{< p_1(B_1) \cap p_1(B_1),\ Con(B_1) \cup Con(B_2) > \mid B_1 \in D_1^F,\ B_2 \in D_2^F\}$, а таблица – лишь форма представления этого множества.

что функции p_1 и p_2 определены в примере 3.
В этом случае таблица $W(D_1, D_2)$ имеет вид:

	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$ $\emptyset$	$\alpha\ \gamma$ 4	α 468	γ 479	$\beta\ \delta\ \epsilon$ 5	$\delta\ \epsilon$ 569	β 578	$\alpha\ \delta\ \epsilon$ 6	$\beta\ \gamma$ 7	$\alpha\ \beta$ 8	$\gamma\ \delta\ \epsilon$ 9
$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$ $\emptyset$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$ $\emptyset$	$\alpha\ \gamma$ 4	α 468	γ 479	$\beta\ \delta\ \epsilon$ 5	$\delta\ \epsilon$ 569	β 578	$\alpha\ \delta\ \epsilon$ 6	$\beta\ \gamma$ 7	$\alpha\ \beta$ 8	$\gamma\ \delta\ \epsilon$ 9
$\alpha\ \beta\ \gamma\ \epsilon$ 0	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \epsilon$ 0	$\alpha\ \gamma$ 04	α 0468	γ 0479	$\beta\ \epsilon$ 05	ϵ 0569	β 0578	$\alpha\ \epsilon$ 06	$\beta\ \gamma$ 07	$\alpha\ \beta$ 08	$\gamma\ \epsilon$ 09
$\alpha\ \beta$ 02	$\alpha\ \beta$ 02	α 024	α 02468	$\emptyset$ 02479	β 025	$\emptyset$ 02569	β 02578	α 026	β 027	$\alpha\ \beta$ 028	$\emptyset$ 029
$\gamma\ \epsilon$ 03	$\gamma\ \epsilon$ 03	γ 034	$\emptyset$ 03468	γ 03479	ϵ 035	ϵ 03569	$\emptyset$ 03578	ϵ 036	γ 037	$\emptyset$ 038	$\gamma\ \epsilon$ 039
δ 12	δ 12	$\emptyset$ 124	$\emptyset$ 12468	$\emptyset$ 12479	δ 125	δ 12569	$\emptyset$ 12578	δ 126	$\emptyset$ 127	$\emptyset$ 128	δ 129
$\alpha\ \beta\ \delta$ 2	$\alpha\ \beta\ \delta$ 2	α 24	α 2468	$\emptyset$ 2479	$\beta\ \delta$ 25	δ 2569	β 2578	$\alpha\ \delta$ 26	β 27	$\alpha\ \beta$ 28	δ 29

Из утверждения 3 следует, что все пф-понятия из глобального контекста $< D, N >$ содержатся в таблице $W(D_1, D_2)$.

Пример 5. (Продолжение примера 4.)
В таблице $W(D_1, D_2)$ выделены пф-понятия глобального контекста $< D_S, N_S >$, остальные ячейки таблицы заштрихованы.

	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$ $\emptyset$	$\alpha\ \gamma$ 4	α 468	γ 479	$\beta\ \delta\ \epsilon$ 5	$\delta\ \epsilon$ 569	β 578	$\alpha\ \delta\ \epsilon$ 6	$\beta\ \gamma$ 7	$\alpha\ \beta$ 8	$\gamma\ \delta\ \epsilon$ 9
$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$ $\emptyset$	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon$ $\emptyset$	/// ///	///// /////	///// /////	$\beta\ \delta\ \epsilon$ 5	$\delta\ \epsilon$ 569	///// /////	$\alpha\ \delta\ \epsilon$ 6	//// ////	//// ////	$\gamma\ \delta\ \epsilon$ 9
$\alpha\ \beta\ \gamma\ \epsilon$ 0	$\alpha\ \beta\ \gamma\ \epsilon$ 0	$\alpha\ \gamma$ 04	///// /////	///// /////	$\beta\ \epsilon$ 05	///// /////	///// /////	$\alpha\ \epsilon$ 06	$\beta\ \gamma$ 07	//// ////	///// /////
$\alpha\ \beta$ 02	//////// ////////	/// ///	α 02468	///// /////	///// /////	///// /////	β 02578	///// /////	//// ////	$\alpha\ \beta$ 028	///// /////
$\gamma\ \epsilon$ 03	//////// ////////	/// ///	///// /////	γ 03479	///// /////	ϵ 03569	///// /////	///// /////	//// ////	//// ////	$\gamma\ \epsilon$ 039
δ 12	//////// ////////	/// ///	///// /////	///// /////	///// /////	δ 12569	///// /////	///// /////	//// ////	//// ////	///// /////
$\alpha\ \beta\ \delta$ 2	$\alpha\ \beta\ \delta$ 2	/// ///	///// /////	///// /////	$\beta\ \delta$ 25	///// /////	///// /////	$\alpha\ \delta$ 26	//// ////	//// ////	///// /////

Всего в таблице $W(D_1, D_2)$ представлены 66 пар множеств, 20 из которых являются пф-понятиями контекста $< D_S, N_S >$, а остальные 46 пар таковыми не являются.

Из примеров 4 и 5 следует, что в таблице $W(D_1, D_2)$ могут присутствовать несколько ячеек с одним и тем же понятием, различающиеся только вторым множеством - кандидатом в содержание. Так, понятие $\{\ \alpha,\ \beta\ \}$ представлено в пяти ячейках в паре с множествами $02, 28, 8, 08$, и 028. Заметим, что из пяти пар только одна – $\{\ \alpha,\ \beta\ \}$ и 028 – является пф-понятием в контексте $< D_S, N_S >$, а остальные являются ложными пф-понятиями.

Связь между кандидатами на роль содержания одного и того же понятия устанавливает следующее

Утверждение 4.
Пусть (а) A, B_1 *и* B_2 *– формальные понятия в контекстах,*
$< D, N_1 \cup N_2 >$, $< D_1, N_1 >$ *и* $< D_2, N_2 >$, *соответственно;*
(б) $p_1(B_1) \ \cap \ p_2(B_2) \ = \ A$.
Тогда $Con(B_1) \ \cup \ Con(B_2) \ \subseteq \ Con(A)$.

Доказательство. Последовательно применяя определение понятия A, условие (б), свойство 8, а также формальные преобразования множеств, имеем:

$$\begin{aligned} A &= \{d \in D \mid Con(A) \ \subseteq \ d\} = \\ &= p_1(B_1) \ \cap \ p_2(B_2) = \\ &= \{b_1 + b_2 \in D \mid Con(B_1) \ \subseteq \ b_1\} \ \cap \ \{b_1 + b_2 \in D \mid Con(B_2) \ \subseteq \ b_2\} = \\ &= \{b_1 + b_2 \in D \mid Con(B_1) \ \subseteq \ b_1 \text{ и } Con(B_2) \ \subseteq \ b_2\} \subseteq \\ &\subseteq \{b_1 + b_2 \in D \mid Con(B_1) \ \cup \ Con(B_2) \ \subseteq \ b_1 + b_2\} = \\ &= \{d \in D \mid Con(B_1) \ \cup \ Con(B_2) \ \subseteq \ d\}. \end{aligned}$$

Откуда $\{d \in D \mid Con(A) \ \subseteq \ d\} \ \subseteq \ \{d \in D \mid Con(B_1) \ \cup \ Con(B_2) \ \subseteq \ d\}$ и, используя свойство 7, получаем: $Con(A) \ \supseteq \ Con(B_1) \ \cup \ Con(B_2)$. Утверждение 4 доказано.

Фактически утверждение 4 устанавливает верхнюю границу – множество $Con(A)$ – для содержаний всевозможных претендентов на роль A из таблицы $W(D_1, D_2)$.

Каждая ячейка таблицы $W(D_1, D_2)$ состоит из множества объектов глобального контекста и некоторого множества признаков. Откажемся от объектов глобального контекста. В результате получится таблица $V(D_1, D_2)$. Формально, $V(D_1, D_2)$ есть множество

$$\{ \ b_1 \ \cup \ b_2 \mid b_1 \ \in \ D_1^C, \ b_2 \ \in \ D_2^C\}.$$

Пример 6. Для таблицы $W(D_1, D_2)$ из примера 4 таблица $V(D_1, D_2)$ выглядит так:

	∅	4	468	479	5	569	578	6	7	8	9
∅	∅	4	468	479	5	569	578	6	7	8	9
0	0	04	0468	0479	05	0569	0578	06	07	08	09
02	02	024	02468	02479	025	02569	02578	026	027	028	029
03	03	034	03468	03479	035	03569	03578	036	037	038	039
12	12	124	12468	12479	125	12569	12578	126	127	128	129
2	2	24	2468	2479	25	2569	2578	26	27	28	29

Для построения $V(D_1, D_2)$ достаточно знать локальные контексты $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$; знание глобального контекста необязательно. Как следует из утверждения 3 содержания всех понятий глобального контекста находятся в $V(D_1, D_2)$: $D^C \ \subseteq \ V(D_1, D_2)$. Вместе с тем $V(D_1, D_2)$ содержит некоторое количество "лишних" наборов признаков, которые не относятся к понятиям глобального контекста.

5. ЗАДАЧА ИССЛЕДОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ КОНТЕКСТОВ

Предположим, что множество объектов глобального контекста $< D, N >$ неизвестно. Вместе с тем, процедура получения локального контекста $< D', N' >$ по заданному множеству признаков N', $N' \ \subseteq \ N$, считается известной[6], хотя и весьма дорогостоящей. Формально, $D' \ = \ \{ \ d \ \cap \ N' \mid d \ \in \ D \ \}$.

[6] Вообще говоря, на множество N' налагаются определенные ограничения. Скажем, ограничивается число входящих в N' признаков. Однако для настоящего изложения это не существенно.

В узком смысле задача исследования конкретного глобального контекста состоит в построении множества D^C с помощью минимального количества локальных контекстов. В широком смысле задача исследования (всевозможных) глобальных контекстов предполагает разработку правил выбора и обработки локальных контекстов в интересах формирования множества D^C.

Отправной точкой в исследовании контекста выступает таблица $V(D_1, D_2)$, построенная по двум известным локальным контекстам $< D_1, N_1 >$ и $< D_2, N_2 >$. При этом задача сводится к обнаружению и удалению элементов $V(D_1, D_2) \setminus D^C$.

В итерационном вычислительном процессе участвуют два основных множества:

множество R кандидатов в элементы D^C; первоначально $R = V(D_1, D_2)$, и

множество R^+, $R^+ \subseteq D^C$; первоначально $R^+ = \{\{\emptyset\}\}$.

Множество R^+ составляют такие наборы признаков, относительно которых "досрочно" установлена их принадлежность искомому множеству D^C.

По окончании вычислений результатом считается множество R. Из свойства 6 следует, что необходимым условием окончания вычислений является условие $R^C = R$.

В решении задачи исследования глобальных контекстов можно выделить по крайней мере два подхода, условно именуемые

принцип альтернативного конструирования множества R и

принцип тестирования элементов R.

6. ПРИНЦИП АЛЬТЕРНАТИВНОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ

Идея альтернативного конструирования состоит в генерации различных разбиений множества признаков N. Разбиения состоят из двух подмножеств N'_1 и N'_2, $N = N'_1 \cup N'_2$. Каждое разбиение порождает:
▷ пару локальных контекстов $< D'_1, N'_1 >$ и $< D'_2, N'_2 >$; и
▷ новую версию множества R – множество $R \cap V(D'_1, D'_2)$.
В соответствии с утверждением 3 на каждой итерации имеет место $D^C \subseteq R$.

Можно показать, что последовательно перебирая пары локальных контекстов и оставляя только их общие части, на некотором шаге будет подучено искомое множество D^C.

Пример 7. Будем полагать:
что в роли неизвестного глобального контекста выступает $< D_S, N_S >$ из примера 1,
что в качестве множества R используется $V(D_1, D_2 >$ из примера 6, а также
что в качестве N'_1 и N'_2 выбраны множества $\{0, 1, 4, 5\}$ и $\{2, 3, 6, 7, 8, 9\}$.

В этом случае $V(D'_1, D'_2)$ содержат 84 элемента и выглядит так:

	∅	2	26	268	269	278	28	369	379	39	6	69	7	9
∅	∅	2	26	268	269	278	28	369	379	39	6	69	7	9
0	0	02	026	0268	0269	0278	028	0369	0379	039	06	069	07	09
04	04	024	0246	02468	02469	02478	0248	03469	03479	0349	046	0469	047	049
05	05	025	0256	02568	02569	02578	0258	03569	03579	0359	056	0569	057	059
15	15	125	1256	12568	12569	12578	1258	13569	13579	1359	156	1569	157	159
5	5	25	256	2568	2569	2578	258	3569	3579	359	56	569	57	59

Новая версия множества R – множество $R \cap V(D'_1, D'_2)$ – содержит 33 кандидата в элементы D_S^C:

R_{new}	$\emptyset$	4	468	479	5	569	578	6	7	8	9
$\emptyset$	$\emptyset$				5	569		6	7		9
0	0	04			05	0569		06	07		09
02	02	024	02468		025	02569	02578	026		028	
03				03479		03569					039
12					125	12569	12578				
2	2				25	2569	2578	26		28	

Расчеты показывают, что для построения $(D_S)^C$ достаточно выполнить четыре итерации:
1 итерация[7]. $N_1 = 0123$, $N_2 = 456789$. *Результат:* R содержит 66 элементов.
2 итерация[8]. $N_1' = 0145$, $N_2' = 236789$. *Результат:* R содержит 33 элемента.
3 итерация. $N_1'' = 1589$, $N_2'' = 023467$. *Результат:* R содержит 26 элементов.
4 итерация. $N_1''' = 4567$, $N_2''' = 012389$. *Результат:* R содержит 20 элементов.

Всего в данной ситуации возможны 119952 различных (с точностью до перестановок) вариантов итераций #3 и #4, из которых всего 7899 вариантов достаточны для завершения процесса построения $(D_S)^C$. Остальные 119952 – 7899 вариантов обязательно требуют выполнения пятой итерации и т.д.

7. ПРИНЦИП ТЕСТИРОВАНИЯ

Идея тестирования состоит в проверке элементов из R на объектах некоторого локального контекста с последующей экстраполяцией результатов проверки на глобальный контекст $< D, N >$.

Пусть: c – подлежащий тестированию элемент R;
c' – фиксированное множество признаков;
$< D_t, N_t > = < D_t, c \cup c' >$ – локальный контекст,
полученный из глобального контекста $< D, N >$.

Как следует из свойства 4 для множества c в контексте $< D_t, N_t >$ теоретически может быть установлено одно из трех:

Случай 1. $D_t[c] = \emptyset$.
Тогда $D[c] = \emptyset$, и (как следует из свойства 2) $D[c + c_x] = \emptyset$ для любого c_x из N.

Случай 2. $D_t[c] \neq \emptyset$ и $c \subset Con(D_t[c])$.
Тогда $D_t[c] = (D[c])_t$ (см.[9]), и (как следует из свойства 1) $c \subset Con(D_t[c]) \subseteq Con(D[c])$. Другими словами, множество признаков c не является содержанием понятия $D[c]$.
Кроме того:

Из следствия 2 вытекает, что множество признаков $c \cup c''$, где $c'' \subseteq N \setminus N_t$, не является содержанием какого-либо понятия в глобальном контексте $< D, N >$.

Из свойства 3 и следствия 1 вытекает, что в глобальном контексте $< D, N >$ существует понятие $D[c]$, содержание которого есть $c \cup c_x$, где c_x - непустое множество признаков.

Случай 3. $D_t[c] \neq \emptyset$ и $c = Con(D_t[c])$.
Тогда из следствия 1 вытекает, что в глобальном контексте $< D, N >$ существует понятие $D[c]$, содержание которого есть $c \cup c_x$, где c_x - некоторое множество признаков.

С алгоритмической точки зрения обработка результатов множества признаков c выглядит так:

---
[7] См. пример 6.
[8] См. пример 7.
[9] $D_t[c] = \{d_t \mid c \subseteq d_t \in D_t\} = \{d \cap N_t \mid c \subseteq d \cap N_t, d \in D\} =$ [[т.к. $c \subseteq N_t$]] $= \{d \cap N_t \mid c \subseteq d \in D\} = (D[c])_t$.

Если $D_t[c] = \emptyset$, **То**
$\Rrightarrow$ из R подлежат удалению все элементы $R[c]$.
Иначе [10] **Если** $c \subset Con(D_t[c])$, **То**
$\Rrightarrow$ из R подлежат удалению
$\triangleright$ множесто c, а также
$\triangleright$ все элементы $\{c \cup c'' \mid c'' \subseteq N \setminus N_t\}$;
$\Rrightarrow$ в R^+ следует включить $c \cup c_x$, если $R[c]$ состоит ровно из двух элементов c и $c \cup c_x$.
Иначе [11]
$\Rrightarrow$ в R^+ следует включить c, если $R[c]$ состоит из единственного элемента c.

Пример 8. Так же как и в примере 7 будем полагать:
что в роли неизвестного глобального контекста выступает $< D_S, N_S >$ из примера 1,
что в качестве множества R используется $V(D_1, D_2 >$ из примера 6, а также
что для тестирования выбирано множество $N_t = \{0, 3, 8\} = 038$.

Тогда:
○ $D_t = \{\{0, 8\}, \{0, 3\}, \emptyset\}$;
○ тестированию подлежат пять элементов из R: 0, 03, 038, 08 и 8;
○ результаты тестирования:
$c = 038$, *случай 1,* $R[038] = \{038, 03468, 03578\}$, элементы $R[038]$ исключаются из R;
$c = 8$ *случай 2,* множество $R[8]$ содержит 18 элементов,
из R исключаются: 8, 12468, 12578, 128, 2468, 2578, 28, 468, и 578;
$c = 0$ *случай 3,* множество $R[0]$ содержит 33 элемента;
$c = 03$ *случай 3,* множество $R[03]$ содержит 11 элементов;
$c = 08$ *случай 3,* множество $R[08]$ содержит 9 элементов.

В конечном итоге по результатам тестирования:
$\triangleright$ из R исключаются: 038, 03468, 03578, 8, 12468, 12578, 128, 2468, 2578, 28, 468, и 578;
$\triangleright$ множество R принимает вид:

R_t	$\emptyset$	4	468	479	5	569	578	6	7	8	9
$\emptyset$	$\emptyset$	4	468	479	5	569	578	6	7		9
0	0	04		0479	05	0569		06	07	08	09
02	02	024	02468	02479	025	02569	02578	026	027	028	029
03	03	034		03479	035	03569		036	037		039
12	12	124		12479	125	12569		126	127		129
2	2	24		2479	25	2569		26	27		29

Отметим, что результативность тестирования существенно зависит от выбора множества N_t, которое и определяет локальный контекст $< D_t, N_t >$. Так, в примере 8 выбор $N_t = 038$ позволил исключить из R 12 кандидатов. При прочих равных:

- выбор $N_t = 028$ позволяет исключить из R 26 кандидатов;
- выбор $N_t = 03479$ позволяет исключить из R максимально возможные 32 кандидата; однако
- выбор $N_t = 036$ не позволяет исключить из R ни одного кандидата, то есть оказывается абсолютно бесполезным.

В общем случае точно установить результативность выбора того или иного множества N_t можно только по результатам тестирования кандидатов из R в контексте $< D_t, N_t >$. Форми-

[10] $D_t[c] \neq \emptyset$
[11] $D_t[c] \neq \emptyset$ и $c = Con(D'[c])$

рование же $< D_t, N_t >$ считается наиболее сложной задачей, поэтому для практических целей интерес представляют методы квазиоптимального выбора N_t по известному множеству R.

Расчеты показывают, что для построения искомого множества $(D_S)^C$ достаточно построить R и выполнить четыре итерации тестирования:

0 итерация[12]. $N_1 = 0123$,
$N_2 = 456789$. Первоначально R содержит 66 элементов.
1 итерация[13]. $N_t = 038$. *Результат:* R содержит 54 элемента.
2 итерация. $N'_t = 028$. *Результат:* R содержит 43 элемента.
3 итерация. $N''_t = 03479$. *Результат:* R содержит 26 элементов.
4 итерация. $N'''_t = 12569$. *Результат:* R содержит 20 элементов.

Всего в данной ситуации возможны 7140 различных (с точностью до перестановок) вариантов итераций $\#2$, $\#3$ и $\#4$, из которых всего 3 варианта достаточны для завершения процесса построения $(D_S)^C$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из представленных рассуждений следует, что формальные понятия, построенные по локальным контекстам, несут в себе определенные знания о строении глобального контекста. Эти знания можно выявить и использовать для конструирования, вообще говоря, неизвестного глобального контекста. При этом возникают достаточно сложные переборные задачи, нуждающиеся в дополнительных исследованиях и эффективных алгоритмах решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ganter B., Wille R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations.* Springer, 1999.
2. Морозов А.С. О вычислимых автоморфизмах в анализе формальных понятий. *Сибирский математический журнал*, 2010, том 51, No.2, стр. 357-366.
3. Выхованец С.Ю. Исчисление понятий. *Тезисы докладов VII Международной конференции "Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций".* М: ИПУ, 2007, стр.31-35.
4. Кондаков Н.И. *Логический словарь.* М.: Наука, 1971.
5. Стельмашенко Д.Е. Свойства формальных контекстов. *Информационные процессы*, 2011, том 1, No.1, стр. 86-89.
6. Valtchev P., Missaoui R., Lebrun P. A partition-based approach towards constructing Galois (concept) lattices. *Discrete Mathematics*, 2002, vol.256, No.3, pp. 801-829.

[12] См. пример 6.
[13] См. пример 8.