Информационные процессы, Том 11, № 3, 2011, стр. 330–335.

О формах, равных нулю в каждой вершине куба[1]

А.В.Селиверстов, В.А.Любецкий

ИППИ РАН, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 4.07.2011

Аннотация—Обсуждаются условия, при которых форма равна нулю в каждой вершине куба. Вычислены коразмерности пространств таких форм при некоторых значениях степени и размерности. Найден явный вид таких форм малых степеней.

1. ВВЕДЕНИЕ

(a,b)-*Кубом* над произвольным полем $\mathbb{F}$ называется конечное множество точек с координатами $\{a,b\}$, а сами эти точки — вершинами куба. Множество вершин куба, лежащих на гиперплоскости вида $x_k = a$ или $x_k = b$, называется *стороной* куба.

Все формы степени d от n переменных (вместе с тождественно нулевой формой) образуют линейное пространство размерности

$$\frac{(n+d-1)!}{(n-1)!d!}.$$

Формы, равные нулю в каждой вершине куба, образуют линейное пространство, которое определяется линейными соотношениями на коэффициенты мономов, соответствующими каждой из вершин куба. Однако вычисление размерности такого подпространства затруднено тем, что количество вершин куба быстро растёт с увеличением размерности и среди соответствующих соотношений есть много зависимых.

2. ФУНКЦИИ ГИЛЬБЕРТА ±1-КУБОВ

Пусть характеристика основного поля $\mathbb{F}$ не равна двум. Пары противоположных вершин ±1-куба в аффинном пространстве $\mathbb{F}^n$ отождествим с 2^{n-1} точками проективного пространства $\mathbb{FP}^{n-1}$. Эти точки образуют нульмерное множество U_n, чей многочлен Гильберта равен константе 2^{n-1}. Коразмерность подпространства форм степени d от n переменных, равных нулю в каждой вершине ±1-куба, является значением функции Гильберта $\chi_n(d)$ множества U_n. Напомним, что значения функции Гильберта совпадают со значениями многочлена Гильберта при всех достаточно больших значениях степени d [1, 2].

Предложение 1. *Для множеств U_n выполнено*

$$\chi_n(1) = n.$$

$$\chi_n(d+1) \geq \chi_n(d).$$

$$\chi_{n+1}(d+1) \geq 2 \cdot \chi_n(d).$$

$$\text{\textit{Если} } d \geq n-1, \text{ \textit{то} } \chi_n(d) = 2^{n-1}.$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (Государственный контракт №14.740.11.1053).

Доказательство. Линейные формы не могут обращаться в нуль в каждой вершине куба. Следовательно, $\chi_n(1) = n$.

Рассмотрим линейные операторы на пространствах линейных форм $\theta_k : f \mapsto x_k \cdot f$. Если линейное подпространство L состоит из нуля и некоторых форм степени d от n переменных, не обращающихся в нуль одновременно на всех вершинах куба, то подпространство $\theta_1(L)$ состоит из форм степени $d+1$ от n переменных, не обращающихся в нуль одновременно на всех вершинах куба. Поскольку размерности L и $\theta_1(L)$ совпадают, то $\chi_n(d+1) \geq \chi_n(d)$.

Рассмотрим прямую сумму подпространств $\theta_1(L) \oplus \theta_{n+1}(L)$. Эта сумма прямая, поскольку формы из первого подпространства не зависят от x_{n+1}, а каждая ненулевая форма второго подпространства зависит. Покажем, что каждая форма из $\theta_1(L) \oplus \theta_{n+1}(L)$ не равна нулю одновременно во всех вершинах куба. Пусть $f \in \theta_1(L)$, $g \in \theta_{n+1}(L)$ и $f + g$ равна нулю в каждой вершине. Сопоставим каждой вершине куба $\mathbf{v}$ вершину $\mathbf{v}'$, отличающуюся знаком последней координаты: $v'_{n+1} = -v_{n+1}$. Поскольку $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}')$ и $g(\mathbf{v}) = -g(\mathbf{v}')$, получим $g(\mathbf{v}) = 0$ для любой $\mathbf{v}$. Противоречие доказывает, что для некоторой вершины $\mathbf{v}$ значение формы $f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}) \neq 0$. Следовательно, $\chi_{n+1}(d+1) \geq 2 \cdot \chi_n(d)$.

Индукцией по числу переменных n легко показать, что $\chi_n(n-1) = 2^{n-1}$. Поскольку функции Гильберта не убывают, а при больших значениях d значения функции и многочлена Гильберта совпадают, то при всех $d \geq n-1$ выполнено $\chi_n(d) = 2^{n-1}$.

3. СВОЙСТВА ФОРМ, РАВНЫХ НУЛЮ В КАЖДОЙ ВЕРШИНЕ КУБА

Предложение 2. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — многочлен от n переменных степени d над произвольным полем $\mathbb{F}$. Если некоторая вершина куба в $\mathbb{F}^n$ не лежит на гиперповерхности $f(\mathbf{x}) = 0$, то доля вершин, лежащих на гиперповерхности, не превосходит $1 - 2^{-\min(d,n)}$.*

Доказательство. Верхняя граница $1 - 2^{-n}$ очевидна, поскольку куб имеет 2^n вершин. Покажем двойной индукцией по степени d и размерности n, что доля не превосходит $1 - 2^{-d}$.

Пусть $d = 1$. При $n = 1$ куб имеет две вершины, а гиперповерхность — это одна точка.

Шаг при $d = 1$. Если каждая вершина некоторой стороны куба лежит на гиперплоскости, то эта гиперплоскость не может проходить через вершины на противоположной стороне. При этом на гиперплоскости лежит ровно половина всех вершин. Иначе на каждой из двух противоположных сторон куба есть вершины, не лежащие на гиперплоскости. Тогда по предположению индукции на каждой из сторон на гиперплоскости лежит не более половины вершин. Следовательно, это же верно и для всего куба.

Шаг при $d \geq 2$. Если на каждой из двух противоположных сторон куба есть вершины, не лежащие на гиперповерхности, то по предположению индукции на каждой из сторон доли вершин, лежащих на гиперповерхности, не превосходят $1 - 2^{-d}$. Следовательно, это же верно и для всего куба.

Иначе без ограничения общности можно считать, что все вершины с координатой $x_1 = a$ лежат на гиперповерхности, и некоторая вершина с координатой $x_1 = b$ не лежит на гиперповерхности. Многочлен $f(\mathbf{x}) = g(x_2, \cdots, x_n) + (x_1 - a) \cdot h(\mathbf{x})$, где многочлен g равен нулю в каждой вершине куба, а степень многочлена h не превышает $d-1$. Вершины куба, лежащие на пересечении гиперплоскости $x_1 = b$ и гиперповерхности $f(\mathbf{x}) = 0$, лежат на пересечении этой гиперплоскости и гиперповерхности $h(\mathbf{x}) = 0$. По предположению индукции доля лежащих на ней вершин не превосходит $1 - 2^{1-d}$. Следовательно, доля вершин всего куба не превосходит $(2 - 2^{1-d})/2 = 1 - 2^{-d}$.

Замечание 1. Из результатов Эрдёша [3] следует, что над полем характеристики нуль граница $1/2$ достижима только для линейных функций, зависящих от небольшого числа переменных. Если же функция нетривиально зависит от каждой из n переменных, то есть соответствующая гиперплоскость не параллельна ни одной из координатных осей, то доля вершин куба, лежащих на этой гиперплоскости стремится к нулю с ростом n. Аналогичный результат получен в [4] для многочленов второй степени, имеющих много мономов. Напротив, над полем характеристики два линейная форма $x_1 + \cdots + x_n$ обращается в нуль на половине всех вершин $(0, 1)$-куба. То есть граница $1/2$ является точной в каждой размерности. Над полем простой характеристики p для той же формы эта доля близка к $1/p$, то есть не стремится к нулю с ростом размерности.

Предложение 3. *Если многочлен степени d от n переменных равен нулю в каждой вершине n-мерного (a, b)-куба, то он не имеет мономов от d различных переменных.*

Доказательство. Предложение очевидно, если число переменных n строго меньше степени d. Рассмотрим случай $n = d$. Любой многочлен степени d от d переменных имеет вид

$$f(x_1, \cdots, x_d) = \alpha \cdot \prod_{i=1}^{d}(x_i - a) + g(x_1, \cdots, x_d),$$

где многочлен g не имеет мономов от d переменных. Заметим, что значения одночлена x^m при $x = a$ и $x = b$ совпадают со значениями линейной функции

$$\frac{a^m}{a-b}(x-b) + \frac{b^m}{b-a}(x-a).$$

Заменяя кратные вхождения переменных в мономы g на линейные функции, мы получим многочлен степени не выше $d - 1$, значения которого в вершинах (a, b)-куба совпадают со значениями многочлена g. Согласно предложению 2 доля вершин куба, в которых многочлен g обращается в нуль, не превосходит $1 - 2^{1-d}$. С другой стороны, доля вершин куба, в которых многочлен

$$\prod_{i=1}^{d}(x_i - a)$$

обращается в нуль, равна $1 - 2^{-d}$. Следовательно, $\alpha = 0$.

Легко видеть, что при $n \geq d + 1$ если существует многочлен от n переменных степени d с мономом от d различных переменных $x_1, \ldots, x_d$, то подстановка для всех индексов $i \geq d + 1$ вместо переменной x_i переменной x_1 даст многочлен от d переменных с мономом от d различных переменных. Это невозможно.

4. ЯВНЫЙ ВИД ФОРМ МАЛЫХ СТЕПЕНЕЙ, РАВНЫХ НУЛЮ В КАЖДОЙ ВЕРШИНЕ ±1-КУБА

Предложение 4. *Квадратичные формы, равные нулю в каждой вершине ±1-куба, имеют вид*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i^2, \text{ где } \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

Более того, для множеств U_n значения функции Гильберта

$$\chi_n(2) = \frac{n^2 - n}{2} + 1.$$

Доказательство. Из предложения 3 следует, что квадратичные формы, равные нулю в каждой вершине ± 1-куба, имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i^2, \text{ где } \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

и составляют подпространство размерности $(n-1)$. Размерность пространства всех квадратичных форм равна

$$\frac{n^2+n}{2}.$$

Следовательно,

$$\chi_n(2) = \frac{n^2+n}{2} - (n-1) = \frac{n^2-n}{2} + 1.$$

Предложение 5. *Если кубичная форма $f(x_1, \cdots, x_n)$ равна нулю в каждой вершине ± 1-куба, то она имеет вид*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^2 \right), \tag{1}$$

где для каждого индекса i выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0. \tag{2}$$

Более того, для множеств U_n значения функции Гильберта

$$\chi_n(3) = \frac{n^3 - 3n^2 + 8n}{6}.$$

Доказательство. Согласно предложению 3, если кубичная форма равна нулю в каждой вершине ± 1-куба, то она имеет вид (1). Очевидно, что форма f, удовлетворяющая условию (2), равна нулю в каждой вершине куба. Для каждого индекса i значения формы f в двух вершинах куба, не совпадающих только в i-й координате, отличаются на

$$2 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Следовательно, если форма f равна нулю в каждой вершине куба, то условие (2) выполнено. Все формы вида (1), удовлетворяющие условию (2), образуют подпространство размерности $n(n-1)$. Размерность линейного пространства всех кубичных форм равна

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Поскольку это пространство разложимо в прямую сумму подпространств размерностей $n(n-1)$ и $\chi_n(3)$, то

$$\chi_n(3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - n(n-1) = \frac{n^3 - 3n^2 + 8n}{6}.$$

Предложение 6. *Если форма четвёртой степени $f(x_1, \cdots, x_n)$ равна нулю в каждой вершине ± 1-куба, то она имеет вид*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} \cdot x_k^2 \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \left(b_{ij} \cdot x_i^2 \cdot x_j^2 \right), \tag{3}$$

где для каждой пары различных индексов $i < j$ выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} = 0 \tag{4}$$

и дополнительно выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} b_{ij} = 0. \tag{5}$$

Более того, для множеств U_n значения функции Гильберта

$$\chi_n(4) = \frac{n^4}{24} - \frac{n^3}{4} + \frac{23 \cdot n^2}{24} - \frac{3 \cdot n}{4} + 1.$$

Доказательство. Согласно предложению 3, если форма четвёртой степени равна нулю в каждой вершине ± 1-куба, то она имеет вид (3). Очевидно, что при выполнении условий (4) и (5) форма f равна нулю в каждой вершине куба. Обозначим для пары индексов $i < j$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ijk}.$$

Для каждого индекса $i < n$ значения формы f в двух вершинах куба, не совпадающих только в i-й координате, отличаются на величину

$$2 \cdot \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}.$$

Следовательно, если форма f равна нулю в каждой вершине куба, то сумма

$$\sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} = 0.$$

Аналогично, для каждого индекса $j \geq 2$ сумма

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{ij} = 0.$$

Таким образом числа A_{ij} являются решением системы однородных линейно независимых уравнений, в которой число переменных равно числу уравнений. Следовательно, все $A_{ij} = 0$. Условие (4) выполнено. Теперь форма f равна сумме двух слагаемых, одно из которых равно нулю в каждой вершине куба. Следовательно, равно нулю и второе слагаемое, принимающее постоянное значение на всех вершинах куба, — сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} b_{ij} = 0.$$

Условие (5) выполнено. Формы вида (3), удовлетворяющие условиям (4) и (5), образуют подпространство размерности

$$\frac{n(n-1)^2}{2} + \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right),$$

где первое слагаемое равно числу линейно независимых коэффициентов a_{ijk}, а второе слагаемое — b_{ij}. Размерность линейного пространства всех форм четвёртой степени равна

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

Следовательно,

$$\chi_n(4) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} - \frac{n(n-1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + 1 =$$
$$= \frac{n^4}{24} - \frac{n^3}{4} + \frac{23 \cdot n^2}{24} - \frac{3 \cdot n}{4} + 1.$$

Замечание 2. Предложения 1, 4, 5 и 6 позволяют полностью описать функции Гильберта для U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 и U_6.

$$\chi_1(d) = 1$$
$$\chi_2(d) = 2$$
$$\chi_3(d) = \begin{cases} 3, d = 1 \\ 4, d \geq 2 \end{cases}$$

$$\chi_4(d) = \begin{cases} 4, d = 1 \\ 7, d = 2 \\ 8, d \geq 3 \end{cases}$$

$$\chi_5(d) = \begin{cases} 5, \quad d = 1 \\ 11, d = 2 \\ 15, d = 3 \\ 16, d \geq 4 \end{cases}$$

$$\chi_6(d) = \begin{cases} 6, \quad d = 1 \\ 16, d = 2 \\ 26, d = 3 \\ 31, d = 4 \\ 32, d \geq 5 \end{cases}$$

Авторы благодарны К. Ю. Горбунову за сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харрис Дж. *Алгебраическая геометрия. Начальный курс.* М.: МЦНМО, 2005.

2. Зарисский О., Самюэль П. *Коммутативная алгебра.* М.: Издательство иностранной литературы, 1963. Том 2.

3. Erdös P. On a lemma of Littlewood and Offord. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1945, vol. 51., pp. 898–902.

4. Costello K.P., Vu V.H. The rank of random graphs. *Random Structures and Algorithms*, 2008, vol. 33, no. 3, pp. 269–285.