Информационные процессы, Том 11, № 4, стр. 423–427

============= ИНФОРМАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ============

Детерминированные цепи Маркова[1]

В.Л.Стефанюк

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 23.09.2011

Аннотация— Показано, что аппарат цепей Маркова после определенного обобщения позволяет описывать не только вероятностные процессы, но и аналогичные им детерминированные процессы, что существенно расширяет сферу применения этого аппарата. В статье вводится понятие детерминированных цепей Маркова. Приведены лемма и теорема, касающиеся эргодических детерминированных марковских цепей, которые обосновывают введение таких цепей и открывают возможности их использования в практических задачах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цепи Маркова представляют собой популярный математический аппарат для описания разнообразных проблем вероятностного характера. В качестве одного из большого множества примеров можно было бы указать на описание поведения конечных автоматов, помещенных в случайную среду. С использованием таких цепей для одиночного автомата определенного типа (автомата с линейной тактикой) удается показать свойство целесообразности его поведения и асимптотической оптимальности такого автомата [1].

В такого рода применениях естественно выполняется требование эргодичности, обеспечивающее существование финальных или предельных вероятностей различных состояний автомата, которые наблюдаются при $t \to \infty$, где t – дискретные моменты функционирования моделируемой системы. В системах динамического характера [1, 4], где переходные вероятности соответствующей марковской цепи могут изменяться зависящим от *t* образом, речь о финальных вероятностях обычно не идет, но часто можно говорить о некоторых квазифинальных вероятностях, если переходные вероятности изменяются «достаточно редко». В работе [1] в частности рассмотрен случай, когда среда, в которой существует автомат, в свою очередь изменяется по некоторому марковскому закону (переключаемая среда), что позволяет вычислить итоговые финальные вероятности для системы в целом.

Аналогично можно рассматривать коллективное поведение или игры автоматов, описывающие поведение автоматов, каждый из которых участвует в создании случайной среды для остальных членов коллектива. В этом случае марковские цепи позволяют получить явные выражения для финальных вероятностей, в результате выяснив условия целесообразного поведения всего коллектива автоматов [2].

2. ПОТОКИ ВЕРОЯТНОСТИ

Исследователи неоднократно отмечали, что во многих случаях в силу эргодичности системы можно говорить о потоках вероятности (см. соображения Юлии Шмуклер и М.Л.Цетлина, изложенные в [3]). В известных из литературы задачах о поведении автомата в случайной среде переход к рассмотрению потоков вероятностей приводит к снижению порядка рассматриваемых линейных уравнений.

В общем случае можно сформулировать следующее утверждение о сбалансированности потоков вероятностей [4].

Рассмотрим простую эргодическую цепь Маркова, имеющую n состояний и матрицу переходов $\left\| p_{ij} \right\|_1^n$. Пусть $r_1,...,r_n$ - финальные вероятности этой цепи, которые существуют в силу указанной эргодичности. Пусть множество всех состояний цепи $\{n\}$ разбито на два непересекающихся подмножества таким образом, что $\{n\} = \{n_1\} \cup \{n_2\}$. Определим через $R_{1,2}$ и $R_{2,1}$ сум-

---

[1] Работа частично финансировалась РФФИ по проекту 09-07-00233 и по программе №211 Президиума РАН.

марные финальные «потоки вероятности» из первого множества во второе и обратно следующим образом:

$$R_{1,2} = \sum_{\substack{i\in\{n_1\}\\ j\in\{n_2\}}} r_i p_{ij}, \quad R_{2,1} = \sum_{\substack{i\in\{n_2\}\\ j\in\{n_1\}}} r_i p_{ij}$$

Лемма. Потоки вероятности сбалансированы, т.е. $R_{1,2} = R_{2,1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о [4]. Не снижая общности, перенумеруем все состояния марковской цепи при выбранном разбиении на подмножества $\{n_1\}, \{n_2\}$ таким образом, чтобы все состояния, входящие в первое подмножество $\{n_1\}$, получили номера $1,...,k$, где k — число элементов этого подмножества. При этом остальные элементы исходного множества $\{n\}$, входящие в множество $\{n_2\}$, получают номера $k+1,...,n$.

Как известно, финальные вероятности всей цепи $r_1,...,r_n$ удовлетворяют соотношению

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} r_j p_{ji}, \ \left(\text{для всех } i = 1,...,n\right)$$

Выделим в этом выражении состояние с номером i

$$-r_i\left(1-p_{ii}\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} r_j p_{ji} = 0, \ i = 1,\ldots,n$$

Учитывая стохастичность матрицы $\left\|p_{ij}\right\|_1^n$, т.е. что $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \ i = 1,\ldots,n$, раскроем $\left(1-p_{ii}\right)$ в предыдущем соотношении:

$$-r_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{ij} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} r_j p_{ji} = 0, \ i = 1,\ldots,n.$$

Далее, чтобы перейти к так называемым потокам вероятности, просуммируем первые k из предыдущих уравнений:

$$-\sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} r_i p_{ij} - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} r_j p_{ij} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} r_i p_{ji} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} r_j p_{ji} = 0. \quad (1)$$

Покажем, что первый член в (1) по модулю равен третьему (это — «внутренние» потоки вероятности.)

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} r_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} r_j p_{ij} - \sum_{i=1}^{k} r_i p_{ii} =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} r_j p_{ji} - \sum_{i=1}^{k} r_i p_{ii} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} r_j p_{ji}. \quad (2)$$

(Здесь сделана эквивалентная замена индексов суммирования $i \leftrightarrow j$ и изменен порядок суммирования.)

В силу (2), из предыдущего уравнения (1) мы имеем , что

$$-\sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=k+1}^{n} r_j p_{ij} + \sum_{i=1}^{k}\ \sum_{j=k+1}^{n} r_j p_{ji} = 0.$$

Лемма доказана.

По-существу эта лемма утверждает, что в эргодической цепи Маркова вероятности каждого состояния цепи зависят от потоков вероятности, поступающих от всех других состояний.

Отсюда, переходя на язык потоков вероятности, а не самих вероятностей, можно дать несколько иной взгляд на обычную марковскую цепь. А именно, будем говорить, что простая цепь Маркова задается потоками $r_i p_{ij}$ из i-го состояния в j-е, причем выполняется $\sum_{i=1}^{n} r_i p_{ij} = r_j$.

Последнее означает, что «вся вероятность» r_i, имеющаяся в позиции i , «перетекает» в вероятности других позиций $i = 1,\dots,n$ (включая исходный поток, т.е. $r_i p_{ij}$).

Заметим, что утверждение леммы и ход ее доказательства не прибегают к стохастическим (вероятностным) понятиям, заменяя их чисто алгебраическими требованиями на входящие в понятие потока вероятности величины. Это обстоятельство будет положено в основу последующих утверждений данной работы.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Формально при указанной «потоковой» интерпретации марковской цепи условие $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ на матрицу неотрицательных величин $\left\| p_{ij} \right\|_1^n$, определяющую условия эргодичности[2] детерминированной системы, целесообразно сохранить, тогда как условие $\sum_{j=1}^{n} \tilde{r}_i = 1$ уже не является обязательным и может быть ослаблено (поскольку в определении потока участвует произведение $\tilde{r}_i p_{ij}$, то при этом уже не возникает необходимости аналогично изменять условие $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$).

Подчеркнем еще раз, что при такой интерпретации цепи Маркова величины $\tilde{r}_i$ и p_{ij}, участвующие в определении потока, могут и не иметь вероятностной интерпретации. Если, например, *i*-я позиция представляет собою товар (или его стоимость), то при $t \to \infty$ на замкнутом эргодическом рынке будут сформированы стационарные значения таких товаров, финальные количества которых $\tilde{r}_i$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i p_{ij} = \tilde{r}_j .$$

[2] Эргодичность классической цепи Маркова определяется исключительно свойствами матрицы $\left\| p_{ij} \right\|_1^n$, точнее расположением в ней нулевых элементов. Мы сохраняем стандартное определение эргодичности и в случае обобщенной цепи Маркова. В частности, если все элементы матрицы $\left\| p_{ij} \right\|_1^n$ строго больше нуля, то цепь заведомо является эргодической.

Тем не менее, важно подчеркнуть, что при сделанном нами обобщении марковской цепи суммарное количество товаров каждого типа, в виду замкнутости рынка, должно быть фиксировано, а именно

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i = R, \tag{3}$$

где R – заранее заданная положительная константа, не зависящая от времени, которая определяется стоящей перед исследователем задачей. Столь же важно при таком обобщении классической цепи Маркова сохранить требование неотрицательности всех рассматриваемых в обобщенной цепи величин, т.е.:

$$\tilde{r}_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n.$$

Если $R \neq 1$, то условие (6)>(3) , очевидно, нарушает саму возможность вероятностной интерпретации детерминированной цепи Маркова. Иными словами, от классической цепи Маркова в нашем обобщении сохранилось лишь свойство эргодичности, зависящее от матрицы $\left\| p_{ij} \right\|_1^n$, которое никак не связано с вероятностной интерпретацией элементов этой матрицы.

Указанные соображения позволяют дать формальное определение предлагаемой нами новой трактовки аппарата марковских цепей, которой мы дали название детерминированные цепи Маркова, рассчитывая на определенное расширение области приложений аппарата цепей Маркова. Еще раз отметим, что это определение является обобщением классической марковской цепи, при котором, вообще говоря, уже нет необходимости в вероятностной интерпретации входящих в цепь величин.

Определение. Простая детерминированная цепь Маркова, имеющая n состояний и обладающая единственным классом эргодичности, описывает поведение неотрицательных величин $\tilde{r}_1,\ldots,\tilde{r}_n$ и задается матрицей $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ неотрицательных величин p_{ij}, а также следующей системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i p_{ij} = \tilde{r}_j,\ \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i = R\ . \tag{4}$$

Для детерминированной цепи Маркова справедливо следующее существенное утверждение.

Теорема. Детерминированная цепь Маркова с единственным классом эргодичности матрицы $\left\| p_{ij} \right\|_1^n$ всегда имеет и притом единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Система (4) всегда имеет решение в силу предположенной эргодичности матрицы $\left\| p_{ij} \right\|_1^n$. Действительно, при $R = 1$ существование некоего решения для (4) следует из теории классических цепей Маркова. Отсюда одно из решений для (4) для произвольного R заведомо существует и получается как результат пропорционального увеличения всех значений $\tilde{r}_i,\ i = 1,\ldots,n$.

Теперь предположим противное, т.е. что решений имеется два или более. Пусть, например, $\tilde{r}_i^{(1)}$, $\tilde{r}_i^{(2)}$ - любые два таких решения для (4). Покажем их тождественность. Обозначим $\Delta_i = \left| \tilde{r}_i^{(1)} - \tilde{r}_i^{(2)} \right|$. В силу сказанного выше получаем (для финальных величин)

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=\left|\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j^{(1)}p_{ji}-\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j^{(2)}p_{ji}\right|=$$
$$\left|\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j^{(1)}\sum_{i=1}^{n}p_{ji}-\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j^{(2)}\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\right|=$$
$$\left|\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_j^{(2)}\right|=\left|R-R\right|=0$$

Короче, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=0$$

По нашему определению величины Δ_i отсюда следует, что и каждое индивидуальное $\Delta_i=0,\ i=1,\ldots,n$, т.е. указанные два решения поэлементно совпадают, что свидетельствует о единственности решения для системы (4). *Теорема доказана.*

Обычно под эргодической цепью Маркова в классическом, т.е. в стохастическом случае, понимается марковская цепь, имеющая единственный класс эргодичности. Точно также мы будем поступать и в случае детерминированных марковских цепей. Отметим, что если в марковской цепи имеется несколько классов эргодичности (как, например, в случае, описанном в работе [6], для так называемых ε-автоматов), то картина становится существенно более сложной, обычно свидетельствуя о необходимости получения дополнительной информации, что может быть, в частности, в случае применения детерминированной цепи Маркова для описания сложного взаимодействия нескольких экономических систем.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые мысль о возможности использовании аппарата детермини-рованных цепей Маркова была высказана нами на конференции «Интеллектуальный анализ информации», прошедшей в г.Киеве в 2009 г. и посвященной памяти проф. Т.А.Таран. В качестве председателя секции конференции, мы выступили там с настойчивой рекомендацией авторам [5] применить аппарат марковских цепей к изложенным в докладе [5] детерминированным задачам управления ресурсами. По-видимому, результатом этой рекомендации стало появление в следующем году сразу нескольких публикаций, существенно использующих марковское представление для решения задач указанного типа. Однако, используя лишь нашу исходную мысль, эти работы мало внимания уделили теоретическим вопросам, на прояснение которых ориентирована настоящая статья.

Определенная нами в настоящей работе детерминированная цепь Маркова позволяет поставить и решить множество новых задач, которым уделяется большое внимание в литературе по интеллектуальным системам, где не всегда употребляются стохастические переменные.

В книге [6] содержится целый ряд приложений, в которых детерминированная цепь оказывается полезной. К таким приложениям, например, относится исследование авторской модели мобильной связи, где поставленная нами в 1967 г. задача о регулировке мощности в коллективе радиостанций, создающих при своей работе взаимные помехи, описывается в привычных терминах теории управления. Последнее наводит на мысль, что сформулированное в данной статье обобщение цепей Маркова позволит с единых и достаточно общих теоретических позиций взглянуть и на саму теорию управления в некоторых её аспектах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цетлин М.Л., Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, М.: Наука, 1969.
2. Стефанюк В.Л. Пример задачи на коллективное поведение двух автоматов, Автоматика и телемеханика, 1963, Т. 24, № 6, стр. 781–784

3. Стефанюк В.Л. Школа-семинар по вероятностным автоматам. Успехи математических наук, 1971, Т. 26, № 4(160), стр. 255–258.
4. Стефанюк В.Л. Анализ целесообразности локально-организованных систем через потоки вероятности, в кн.: Модели в системах обработки данных, М.:Наука, 1989, стр. 33–45.
5. Кузнецов О.П. Процессы распределения ресурсов в однородных двухсторонних сетях, в кн.: Интеллектуальный анализ информации. Труды конференции, Киев: Просвіта, 2009, стр. 192–201.
6. Стефанюк В.Л. Локальная организация интеллектуальных систем. Модели и приложения, М.: Физматлит, 2004.