Информационные процессы, Том 11, № 4, 2011, стр. 448–465

Стационарные характеристики систем $M^X/M/1$ с двухскоростным обслуживанием

Ю. В. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 21.10.2011

Аннотация—Для системы обслуживания $M^X/M/1$ с пороговым переключением режимов обслуживания в момент изменения числа заявок и такой же системы с пороговой блокировкой потока заявок предложен алгоритм определения стационарного распределения числа заявок и стационарных характеристик (средней длины очереди, среднего времени ожидания в очереди, дисперсии длины очереди, вероятности обслуживания заявки для системы с блокировкой). В случае, когда минимальное число прибывающих заявок в группе сравнимо со значением порога h, стационарные характеристики найдены в явном виде. Для системы с пороговым переключением режимов обслуживания (без блокировки) решены две задачи оптимального синтеза, в которых определению подлежали оптимальные значения порога h и интенсивности обслуживания послепорогового режима соответственно. Полученные результаты проверены с помощью имитационных моделей, построенных с привлечением инструментальных средств GPSS World.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели *систем массового обслуживания* (СМО), в которых может применяться разная интенсивность обслуживания в зависимости от длины очереди, а заявки могут прибывать группами, часто используются для изучения телекоммуникационных процессов [1].

В статье [2] исследована система обслуживания типа M/M/1 с пороговым переключением режимов обслуживания в момент изменения числа заявок и такая же система с пороговой блокировкой потока заявок. Цель настоящей работы — определение стационарных характеристик этих систем в случае группового поступления заявок.

Системы с переключением режимов обслуживания в момент начала обслуживания очередной заявки изучались, в частности, в работах [3–5], СМО с блокировкой потока заявок — в [5–8], а системы с пороговым переключением режимов обслуживания в моменты изменения числа заявок — в статьях [2, 9]. Блокировка входного потока является одним из способов контроля функционирования различных СМО. Она выражается в ограничении доступа к ресурсам системы в определённые интервалы времени и часто встречается в инфотелекоммуникационных сетях [8].

2. СИСТЕМА $M^X/M/1$ С ПОРОГОВЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим систему обслуживания $M^X/M/1$ с неограниченным объёмом накопителя, заявки в которую поступают группами, а промежутки времени между моментами поступления групп заявок — независимые случайные величины, распределённые по показательному закону с параметром λ. В каждой группе приходит случайное число заявок с вероятностью a_k того, что в группе k заявок ($k \geq 1$). Будем считать, что группы заявок обслуживаются в порядке их поступления, а внутри группы заявки обслуживаются в случайном порядке.

Обслуживание заявок может осуществляться в двух режимах. Время обслуживания в каждом из них распределено по показательному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Обслуживание с интенсивностью μ_1 осуществляется при условии, что число заявок в системе не превышает заданного порогового значения h ($h \geq 1$). Переключение на режим обслуживания с интенсивностью μ_2 происходит в момент, когда число заявок в системе становится равным $h+1$. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\mu_2 \geq \mu_1$, и обозначим описанную систему через $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$ (индекс "1" указывает число послепороговых режимов обслуживания).

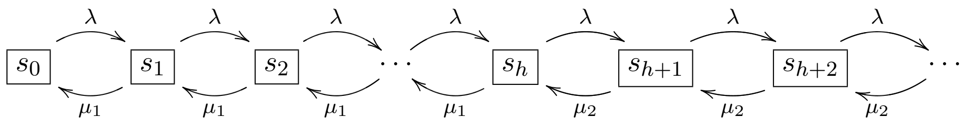

Рис. 1. Диаграмма состояний системы $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$ в случае $a_1 = 1$

Пусть $\alpha_i = \lambda/\mu_i$ ($i = 1, 2$), $b_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^i a_k$ ($i \geq 1$), тогда b_1 — это среднее число заявок в группе, а $\rho_i = \alpha_i b_1$ ($i = 1, 2$) — коэффициент загрузки системы в режиме обслуживания с интенсивностью μ_i.

Введём нумерацию состояний системы (см. рис. 1): s_0 — система свободна; s_i ($i \geq 1$) — в системе находится i заявок. Пусть $p_i(t)$ — вероятность пребывания системы в состоянии s_i в момент времени t. Предполагая, что процесс изменения состояний системы эргодический (условия эргодичности мы получим ниже), то есть существуют пределы $p_i = \lim\limits_{t\to\infty} p_i(t)$ ($i \geq 0$), запишем систему уравнений для определения стационарных вероятностей p_i ($i \geq 0$)

$$
\begin{gathered}
-\lambda p_0 + \mu_1 p_1 = 0; \\
-(\lambda+\mu_1)p_i + \lambda \sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} + \mu_1 p_{i+1} = 0 \quad (\, i = \overline{1,\, h-1}\,); \\
-(\lambda+\mu_1)p_h + \lambda \sum_{k=0}^{h-1} p_k a_{h-k} + \mu_2 p_{h+1} = 0; \\
-(\lambda+\mu_2)p_i + \lambda \sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} + \mu_2 p_{i+1} = 0 \quad (\, i \geq h+1\,); \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Введём обозначения:

$$
\begin{gathered}
A_i = 1 - \sum_{k=1}^{i} a_k \quad (i \geq 0), \quad A_0 = 1; \qquad p_i = p_0 \widetilde{p}_i \quad (i \geq 0), \quad \widetilde{p}_0 = 1; \\
P_h = \sum_{i=1}^{h} \widetilde{p}_i; \qquad L_h = \sum_{i=1}^{h} i\widetilde{p}_i; \qquad L_h^{(2)} = \sum_{i=1}^{h} i^2 \widetilde{p}_i.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Теорема 1. *Если $b_1 < \infty$ и $\rho_2 < 1$, то стационарные вероятности p_i ($i \geq 0$) существуют и определяются из рекуррентных соотношений*

$$
p_{i+1} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} \qquad (i = \overline{0,\, h-1}); \qquad p_{i+1} = \alpha_2 \sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} \qquad (i \geq h); \tag{3}
$$

$$
p_0 = \frac{\mu_2 - \lambda b_1}{\mu_2 + (\mu_2 - \mu_1) P_h}\,. \tag{4}
$$

Доказательство. Соотношения (3) получим, последовательно складывая i $(i \ge 0)$ уравнений системы (1). Для определения p_0 суммируем по i $(i \ge 0)$ обе части соотношений (3) и, используя условие нормировки $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, вычисляем сумму

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j = b_1.$$

Тогда, с учётом обозначений (2) получим

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{h} p_i + \mu_2 \sum_{i=h+1}^{\infty} p_i = \mu_1 \sum_{i=1}^{h} p_i + \mu_2 \Big(1 - \sum_{i=0}^{h} p_i\Big) = \mu_2(1-p_0) - p_0(\mu_2-\mu_1)P_h = \lambda b_1.$$

Отсюда следует формула (4), которая даёт положительные значения p_0 только при выполнении условия $\mu_2 > \lambda b_1$, то есть при $\rho_2 < 1$. Теорема доказана. $\square$

Рекуррентные соотношения (3) позволяют определять $\widetilde{p}_i$ $(i \ge 1)$, P_h, L_h, $L_h^{(2)}$ и, следовательно, стационарные вероятности p_i $(i \ge 0)$ для каждого фиксированного значения h.

Рассмотрим производящие функции

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i; \qquad A(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i.$$

Теорема 2. *Производящая функция $P(z)$ определяется в виде*

$$P(z) = \frac{(\mu_2-\mu_1)\sum\limits_{i=1}^{h} p_i\big(z^{i+1}-z^i\big) - \mu_2 p_0(1-z)}{\lambda z\big(1-A(z)\big) - \mu_2(1-z)}\,. \tag{5}$$

Доказательство. Умножая i-е уравнение системы (1) на z^i $(i \ge 0)$ и суммируя, получаем

$$-(\lambda+\mu_2)\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j + \mu_2 \sum_{i=0}^{h} p_i z^i - \mu_1 \sum_{i=1}^{h} p_i z^i +$$
$$+\mu_1 \sum_{i=1}^{h} p_i z^{i-1} + \mu_2 \sum_{i=1}^{\infty} p_i z^{i-1} - \mu_2 \sum_{i=1}^{h} p_i z^{i-1} =$$
$$= -(\lambda+\mu_2)P(z) + \lambda P(z)A(z) + \frac{\mu_2}{z}P(z) + \mu_2 p_0\Big(1-\frac{1}{z}\Big) + (\mu_2-\mu_1)\sum_{i=1}^{h} p_i\big(z^i - z^{i-1}\big) = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим $P(z)$ в виде (5). Теорема доказана. $\square$

Дифференцируя производящую функцию $P(z)$ в точке $z = 1$ соответствующее число раз, можно вычислить моменты числа заявок в системе. В частности, обозначив через $\overline{L}$ стационарное среднее число заявок в системе, получим

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i = P'(1); \qquad P''(1) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)p_i. \tag{6}$$

Обозначим через $N(F)(z)$ и $D(F)(z)$ соответственно числитель и знаменатель в выражении для некоторой функции $F(z)$. Упростим процесс вычисления производных функции $P(z)$.

Лемма 1. *Для функции $P(z)$, определяемой равенством (5), имеют место следующие формулы:*

$$P'(1) = \frac{N''(P')(1)}{D''(P')(1)} = \frac{D'(P)(1)\big(N''(P)(1) - D''(P)(1)\big)}{D''(P')(1)}\,; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} P''(1) = \frac{N^{(IV)}(P'')(1)}{D^{(IV)}(P'')(1)}\,; \qquad N^{(IV)}(P'')(1) = 2D''(P')(1)\times \\ \times\Big(2D'(P)(1)\big(N'''(P)(1) - D'''(P)(1)\big) - P'(1)D'''(P')(1)\Big). \end{gathered} \tag{8}$$

Доказательство. Поскольку $A(1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = 1$, то для функции $P(z)$, определяемой формулой (5), выполняются очевидные равенства

$$N(P)(1) = D(P)(1) = N(P')(1) = D(P')(1) = N'(P')(1) = D'(P')(1) = 0; \quad D''(P')(1) \neq 0. \tag{9}$$

Из соотношения $P(1) = 1$, правила Лопиталя и вида функции $P(z)$ вытекают равенства

$$N'(P)(1) = D'(P)(1) \neq 0; \quad D'(P'')(1) = D''(P'')(1) = D'''(P'')(1) = 0; \;\; D^{(IV)}(P'')(1) \neq 0. \tag{10}$$

Из (9) и (10) соответственно следуют первые части формул (7) и (8). Поскольку

$$\begin{gathered} N(P')(z) = N'(P)(z)\cdot D(P)(z) - N(P)(z)\cdot D'(P)(z); \\ N'(P')(z) = N''(P)(z)\cdot D(P)(z) - N(P)(z)\cdot D''(P)(z); \\ N''(P')(z) = N'''(P)(z)\cdot D(P)(z) + N''(P)(z)\cdot D'(P)(z) - \\ -N'(P)(z)\cdot D''(P)(z) - N(P)(z)\cdot D'''(P)(z), \end{gathered}$$

то с учётом (9) и первой формулы (10), получим равенство

$$N''(P')(1) = D'(P)(1)\big(N''(P)(1) - D''(P)(1)\big).$$

Дифференцированием обеих частей равенства

$$N(P'')(z) = N'(P')(z)\cdot D(P')(z) - N(P')(z)\cdot D'(P')(z)$$

получим формулу

$$\begin{gathered} N^{(IV)}(P'')(z) = N^{(V)}(P')(z)\cdot D(P')(z) + 3N^{(IV)}(P')(z)\cdot D'(P')(z) + 2N'''(P')(z)\cdot D''(P')(z) - \\ -N(P')(z)\cdot D^{(V)}(P')(z) - 3N'(P')(z)\cdot D^{(IV)}(P')(z) - 2N''(P')(z)\cdot D'''(P')(z), \end{gathered}$$

которую с помошью ссотношений (9) и равенства $N''(P')(1) = P'(1)\cdot D''(P')(1)$, следующего из первой формулы (7), в точке $z = 1$ упрощаем к виду

$$N^{(IV)}(P'')(1) = 2D''(P')(1)\big(N'''(P')(1) - P'(1)\cdot D'''(P')(1)\big). \tag{11}$$

Используя формулу

$$\begin{gathered} N'''(P')(z) = N^{(IV)}(P)(z)\cdot D(P)(z) + 2N'''(P)(z)\cdot D'(P)(z) - \\ -2N'(P)(z)\cdot D'''(P)(z) - N(P)(z)\cdot D^{(IV)}(P)(z), \end{gathered}$$

и первые из соотношений (9) и (10), получаем равенство

$$N'''(P')(1) = 2D'(P)(1)\big(N'''(P)(1) - D'''(P)(1)\big).$$

Подстановка выражения для $N'''(P')(1)$ в равенство (11) приводит ко второй формуле (8). Лемма доказана. □

Лемма 2. *Первая и вторая производные функции* $P(z)$ *в точке* $z=1$ *определяются в виде*

$$P'(1) = \frac{\lambda(b_1+b_2) + 2(\mu_2-\mu_1)\sum\limits_{i=1}^{h} ip_i}{2(\mu_2-\lambda b_1)}\,; \tag{12}$$

$$P''(1) = \frac{1}{3(\mu_2-\lambda b_1)}\Big(\lambda(b_3-b_1) + 3\lambda(b_1+b_2)P'(1) + 3(\mu_2-\mu_1)\sum_{i=2}^{h} i(i-1)p_i\Big). \tag{13}$$

Доказательство. Для вычисления производных $P'(1)$ и $P''(1)$ используем формулы (7) и (8) и учитываем равенства

$$A'(1) = \sum_{i=1}^{\infty} ia_i = b_1; \qquad A''(1) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i = b_2 - b_1;$$
$$A'''(1) = \sum_{i=3}^{\infty} i(i-1)(i-2)a_i = b_3 - 3b_2 + 2b_1.$$

Лемма доказана. □

Теорема 3. *Если* $b_i < \infty$ $(i=1,2)$ *и* $\rho_2 < 1$, *то стационарное среднее число заявок в системе* $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$ *конечно и определяется в виде*

$$\overline{L} = \frac{\lambda(b_1+b_2)\big(\mu_2+(\mu_2-\mu_1)P_h\big) + 2(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\lambda b_1)L_h}{2(\mu_2-\lambda b_1)\big(\mu_2+(\mu_2-\mu_1)P_h\big)}\,, \tag{14}$$

а стационарная средняя длина очереди $\overline{\mathsf{Q}}$ *и стационарное среднее время ожидания в очереди* $\overline{W}$ *— в виде*

$$\overline{\mathsf{Q}} = \overline{L} - 1 + p_0 = \overline{L} - \frac{\lambda b_1 + (\mu_2-\mu_1)P_h}{\mu_2+(\mu_2-\mu_1)P_h}\,; \qquad \overline{W} = \frac{\overline{\mathsf{Q}}}{\lambda b_1}\,. \tag{15}$$

Доказательство. Из первой формулы (6) и равенства (12), используя обозначения (2), получаем

$$\overline{L} = \frac{\lambda(b_1+b_2) + 2(\mu_2-\mu_1)p_0L_h}{2(\mu_2-\lambda b_1)}\,.$$

Подставляя в это равенство выражение для p_0 из (4), приходим к соотношению (14). Первая формула (15) следует из очевидных равенств

$$\overline{\mathsf{Q}} = \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)p_i = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i - \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \overline{L} - (1-p_0),$$

а вторая — это формула Литтла для системы без потерь заявок. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Если* $b_i < \infty$ $(i=1,2,3)$ *и* $\rho_2 < 1$, *то дисперсия стационарной средней длины очереди в системе* $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$ *конечна и определяется в виде*

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathsf{Q}) = P''(1) - \overline{\mathsf{Q}} - \big(\overline{\mathsf{Q}}\big)^2 = \frac{1}{3(\mu_2-\lambda b_1)}\times\\ \times\Big(\lambda(b_3-b_1) + 3\lambda(b_1+b_2)\overline{L} + 3(\mu_2-\mu_1)\big(L_h^{(2)} - L_h\big)p_0\Big) - \overline{\mathsf{Q}} - \big(\overline{\mathsf{Q}}\big)^2.\end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Учитывая вторую формулу (6), получаем

$$\overline{\mathsf{Q}^2} = \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)^2 p_i = P''(1) - \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)p_i = P''(1) - \overline{\mathsf{Q}}.$$

Используя выражение (13) для $P''(1)$ и обозначения (2), приходим к формуле (16) для $\mathbf{D}(\mathsf{Q})$. Теорема доказана. □

Исследуем характер зависимости $\overline{\mathsf{Q}}(h)$, определяемой соотношением (15) при фиксированных значениях всех остальных параметров системы обслуживания $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$.

Теорема 5. *Если $b_i < \infty$ $(i = 1, 2)$, $\rho_2 < 1$ и $\mu_2 > \mu_1$, то функция $\overline{\mathsf{Q}}(h)$ возрастает для всех $h \geq 1$.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что

$$L_{h+1}P_h - L_h P_{h+1} > 0. \tag{17}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} L_{h+1}P_h - L_h P_{h+1} &= P_h(L_{h+1} - L_h) - L_h(P_{h+1} - P_h) = \\ &= P_h(h+1)\widetilde{p}_{h+1} - L_h\widetilde{p}_{h+1} = \widetilde{p}_{h+1}\big((h+1)P_h - L_h\big) > 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$L_h = \sum_{i=1}^{h} i\widetilde{p}_i \leq h\sum_{i=1}^{h}\widetilde{p}_i = hP_h.$$

С помощью соотношений (14) и (15) после несложных преобразований находим

$$\overline{\mathsf{Q}}(h+1) - \overline{\mathsf{Q}}(h) =$$

$$= \frac{(\mu_2-\mu_1)\Big(\mu_2(L_{h+1}-L_h) - (\mu_2-\lambda b_1)(P_{h+1}-P_h) + (\mu_2-\mu_1)(L_{h+1}P_h - L_hP_{h+1})\Big)}{\big(\mu_2 + (\mu_2-\mu_1)P_h\big)\big(\mu_2 + (\mu_2-\mu_1)P_{h+1}\big)} > 0,$$

поскольку $L_{h+1} - L_h > P_{h+1} - P_h$ и выполняется неравенство (17). Теорема доказана. □

Для системы обслуживания $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$ сформулируем задачу оптимального синтеза $(h_{\max}, \overline{\mathsf{Q}})$: *при фиксированных значениях всех остальных параметров найти такое* **наибольшее** *значение порога переключения h, при котором стационарная средняя длина очереди не превышала бы заданного числа Q_0.*

Введём обозначения:

$$\overline{\mathsf{Q}}_{\min} = \frac{\lambda(b_1+b_2)}{2(\mu_2-\lambda b_1)} - \frac{\lambda b_1}{\mu_2 + \alpha_1(\mu_2-\mu_1)}\,; \qquad \overline{\mathsf{Q}}_{\max} = \frac{\lambda(b_1+b_2)}{2(\mu_1-\lambda b_1)} - \frac{\lambda b_1}{\mu_1}\,.$$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 5. Если выполнены условия*

$$\overline{\mathsf{Q}}_{\min} \leq \mathsf{Q}_0 < \overline{\mathsf{Q}}_{\max} \tag{18}$$

для случая, когда $\mu_1 > \lambda b_1$, или условие

$$\mathsf{Q}_0 \geq \overline{\mathsf{Q}}_{\min} \tag{19}$$

для случая, когда $\mu_1 \leq \lambda b_1$, то единственное решение задачи $(h_{\max}, \overline{\mathsf{Q}})$ существует и определяется с помощью алгоритма

$$h_{opt} = \max\{\, h \in \mathbb{N}:\ \overline{\mathsf{Q}}(h) \leq \mathsf{Q}_0 \,\}. \tag{20}$$

Доказательство. Из возрастания функции $\overline{\mathsf{Q}}(h)$ (см. теорему 5) следует, что $\overline{\mathsf{Q}}(1) = \overline{\mathsf{Q}}_{\min} \leq$ $\leq \overline{\mathsf{Q}}(h) < \overline{\mathsf{Q}}(\infty)$, где $\overline{\mathsf{Q}}(\infty) = \overline{\mathsf{Q}}_{\max}$ при $\mu_1 > \lambda b_1$ и $\overline{\mathsf{Q}}(\infty) = \infty$ при $\mu_1 \leq \lambda b_1$. Значение $\overline{\mathsf{Q}}_{\max}$ получено из (15) как предел при $h \to \infty$, $\mu_2 \to \mu_1$. Для существования решения задачи ($h_{\max}$, $\overline{\mathsf{Q}}$) значение Q_0 должно изменяться в таких же пределах, что и $\overline{\mathsf{Q}}(h)$, и это обеспечивается условиями (18) и (19). Единственность решения в виде (20) следует из свойства монотонности $\overline{\mathsf{Q}}(h)$. Теорема доказана. □

Теперь исследуем характер зависимости $\overline{L}(\mu_2)$, определяемой соотношением (14) при фиксированных значениях всех остальных параметров системы обслуживания $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$.

Лемма 3. *Если $\alpha_1 \geq 1$, то $P_h \geq h$.*

Доказательство. Из рекуррентных соотношений (3) получаем

$$\widetilde{p}_i = \alpha_1 \widetilde{p}_{i-1} + \alpha_1 \sum_{k=0}^{i-2} \widetilde{p}_k A_{i-1-k} \geq \alpha_1 \widetilde{p}_{i-1} \qquad (i = \overline{1,\, h}),$$

откуда следует, что $\widetilde{p}_i \geq \alpha_1^i$ $(i = \overline{1,\, h})$, поэтому

$$P_h \geq \sum_{i=1}^{h} \alpha_1^i \geq h.$$

Лемма доказана. □

Теорема 7. *Если $b_i < \infty$ $(i = 1, 2)$, $\rho_2 < 1$ и $\mu_1 \leq \lambda$, то функция $\overline{L}(\mu_2)$ убывает для всех $\mu_2 \geq \mu_1$.*

Доказательство. Вычислив производную $\overline{L}\,'(\mu_2)$, после несложных преобразований находим

$$\overline{L}\,'(\mu_2) = \frac{N(\overline{L}\,')(\mu_2)}{2(\mu_2 - \lambda b_1)^2 \big(\mu_2 + (\mu_2 - \mu_1) P_h\big)^2}\,,$$

где

$$N(\overline{L}\,')(\mu_2) = 2\mu_1 L_h (\mu_2 - \lambda b_1)^2 - \lambda(b_1 + b_2)\big(\mu_2 + (\mu_2 - \mu_1) P_h\big)^2.$$

Если $h = 1$, то $P_h = L_h = \alpha_1$ и

$$N(\overline{L}\,')(\mu_2) = -\lambda(b_1 + b_2)\mu_2^2 + \alpha_1 \Big(2\mu_1(\mu_2 - \lambda b_1)^2 -$$
$$-2\lambda(b_1 + b_2)\mu_2(\mu_2 - \mu_1) - \lambda(b_1 + b_2)(\mu_2 - \mu_1)^2 \alpha_1\Big) < 0,$$

поскольку $b_1 + b_2 \geq 2$, а условие теоремы $\mu_1 \leq \lambda$ эквивалентно неравенству $\alpha_1 \geq 1$, поэтому выполняется неравенство $2\mu_1(\mu_2 - \lambda b_1)^2 \leq \lambda(b_1 + b_2)(\mu_2 - \mu_1)^2 \alpha_1$. Итак, $\overline{L}\,'(\mu_2) < 0$ при $h = 1$.

Если $h > 1$, то $L_h < h P_h$ (см. доказательство теоремы 5) и

$$N(\overline{L}\,')(\mu_2) < 2\mu_1 h P_h (\mu_2 - \lambda b_1)^2 - \lambda(b_1 + b_2)\big(\mu_2 + (\mu_2 - \mu_1) P_h\big)^2 = -\lambda(b_1 + b_2)\mu_2^2 +$$
$$+P_h \Big(2\mu_1 h(\mu_2 - \lambda b_1)^2 - 2\lambda(b_1 + b_2)\mu_2(\mu_2 - \mu_1) - \lambda(b_1 + b_2)(\mu_2 - \mu_1)^2 P_h\Big) < 0,$$

поскольку $P_h \geq h$ (утверждение леммы 3), поэтому $2\mu_1 h(\mu_2 - \lambda b_1)^2 \leq \lambda(b_1 + b_2)(\mu_2 - \mu_1)^2 P_h$. Итак, $\overline{L}\,'(\mu_2) < 0$ при $h > 1$. Теорема доказана. □

Для системы обслуживания $M^X/M_1/1$ сформулируем задачу оптимального синтеза $(\mu_{2\,(\min)}\,,\,\overline{L}\,)$: *при фиксированных значениях всех остальных параметров найти такое* **наименьшее** *значение интенсивности обслуживания послепорогового режима* μ_2*, при котором стационарное среднее число заявок в системе не превышало бы заданного числа* L_0.

Введём обозначения:

$$\overline{L}_{\min} = \frac{L_h}{1+P_h}\,; \qquad \overline{L}_{\max} = \frac{\lambda(b_1+b_2)}{2(\mu_1-\lambda b_1)}\,.$$

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы 7. Если выполнены условия*

$$\overline{L}_{\min} < L_0 \le \overline{L}_{\max} \tag{21}$$

для случая, когда $\mu_1 > \lambda b_1$*, или условие*

$$L_0 > \overline{L}_{\min} \tag{22}$$

для случая, когда $\mu_1 \le \lambda b_1$*, то единственное решение задачи* $(\mu_{2\,(\min)}\,,\,\overline{L}\,)$ *определяется в виде*

$$\mu_{2\,(opt)} = \frac{\lambda(b_1+b_2+2b_1L_0)(1+P_h)+2\mu_1L_0P_h-2(\mu_1+\lambda b_1)L_h+\sqrt{D}}{4\big((1+P_h)L_0-L_h\big)}\,, \tag{23}$$

где

$$D = \Big(\lambda(b_1+b_2+2b_1L_0)(1+P_h)+2\mu_1L_0P_h-2(\mu_1+\lambda b_1)L_h\Big)^2 - \\ -8\lambda\mu_1\big((1+P_h)L_0-L_h\big)\big((b_1+b_2)P_h-2b_1(L_h-L_0P_h)\big).$$

Доказательство. Из (14) следуют предельные соотношения:

$$\lim_{\mu_2\to\infty}\overline{L}(\mu_2) = \frac{L_h}{1+P_h}\,; \qquad \lim_{\mu_2\to\mu_1>\lambda b_1}\overline{L}(\mu_2) = \frac{\lambda(b_1+b_2)}{2(\mu_1-\lambda b_1)}\,; \qquad \lim_{\mu_2\to\mu_1\le\lambda b_1}\overline{L}(\mu_2) = \infty.$$

Из убывания функции $\overline{L}(\mu_2)$ (см. теорему 7) следует, что $\overline{L}(\infty) = \overline{L}_{\min} < \overline{L}(\mu_2) \le \overline{L}(\mu_1) = \overline{L}_{\max}$ при $\mu_1 > \lambda b_1$ и $\overline{L}(\mu_2) > \overline{L}(\infty) = \overline{L}_{\min}$ при $\mu_1 \le \lambda b_1$. Для существования решения задачи $(\mu_{2\,(\min)}\,,\,\overline{L}\,)$ значение L_0 должно изменяться в таких же пределах, что и $\overline{L}(\mu_2)$, и это обеспечивается условиями (21) и (22). Единственность решения следует из свойства монотонности $\overline{L}(\mu_2)$, а само решение (23) определяется как больший корень квадратного уравнения

$$2\big((1+P_h)L_0-L_h\big)\mu_2^2 - \big(\lambda(b_1+b_2+2b_1L_0)(1+P_h)+2\mu_1L_0P_h-2(\mu_1+\lambda b_1)L_h\big)\mu_2 + \\ +\lambda\mu_1\big((b_1+b_2)P_h-2b_1(L_h-L_0P_h)\big) = 0,$$

полученного из равенства $\overline{L}(\mu_2) = L_0$. Необходимо взять именно больший корень этого уравнения, поскольку значение μ_2 ограничено снизу, так как должны выполняться условия $\mu_2 \ge \mu_1$, $\mu_2 > \lambda b_1$. Теорема доказана. □

Изучим предельные возможности системы обслуживания $M^X/M_1/1$ при неограниченном возрастании интенсивности обслуживания послепорогового режима μ_2. Непосредственно из равенств (4) и (15) получаем следующее утверждение.

Теорема 9. *Если выполнены условия теоремы 3, то*

$$\lim_{\mu_2\to\infty}p_0(\mu_2) = \frac{1}{1+P_h}\,; \qquad \lim_{\mu_2\to\infty}\overline{\mathsf{Q}}(\mu_2) = \frac{L_h-P_h}{1+P_h}\,; \qquad \lim_{\mu_2\to\infty}\overline{W}(\mu_2) = \frac{L_h-P_h}{\lambda b_1(1+P_h)}\,.$$

Если минимальное число прибывающих заявок в группе сравнимо со значением порога h, то стационарные характеристики системы обслуживания $\mathrm{M^X/M_1/1}$ можно найти в явном виде.

Теорема 10. *Если* $b_i < \infty$ $(i = 1, 2, 3)$, $\rho_2 < 1$ *и выполняются условия*

$$a_k = 0 \quad (k = \overline{1,\, h-2}); \qquad a_k \geq 0 \quad (k \geq h-1), \tag{24}$$

то

$$p_0 = \frac{\mu_2 - \lambda b_1}{\mu_2 + (\mu_2 - \mu_1)\big((1+\alpha_1)^h - 1 - \alpha_1 a_{h-1}\big)}; \qquad p_i = \alpha_1 (1+\alpha_1)^{i-1} p_0 \quad (i = \overline{1,\, h-1}), \tag{25}$$

а стационарные характеристики системы $\mathrm{M^X/M_1/1}$ *конечны и определяются по формулам* (14)–(16), *где*

$$\begin{gathered} P_h = (1+\alpha_1)^h - 1 - \alpha_1 a_{h-1}; \qquad L_h = \frac{1}{\alpha_1}\Big(1 + \alpha_1(h - 1 + \alpha_1 h)(1+\alpha_1)^{h-1} - \alpha_1^2 h a_{h-1}\Big); \\ L_h^{(2)} = L_h + \frac{1}{\alpha_1^2}\Big((1+\alpha_1)\big(h(h-1)(1+\alpha_1)^{h+1} - 2(h^2-1)(1+\alpha_1)^h + \\ + h(h+1)(1+\alpha_1)^{h-1} - 2\big) - \alpha_1^3 h(h-1) a_{h-1}\Big). \end{gathered} \tag{26}$$

Доказательство. Если выполнены условия (24), то из соотношений (2) следуют равенства

$$A_k = 1 \quad (k = \overline{1,\, h-2}); \qquad A_k = 1 - \sum_{i=h-1}^{k} a_i \quad (k \geq h-1). \tag{27}$$

Учитывая (27), из первой формулы (3) получим

$$p_{i+1} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{i} p_k = \alpha_1 (1+\alpha_1)^i p_0 \qquad (i = \overline{0,\, h-2}\,);$$

$$p_h = \alpha_1 \Big(p_0 A_{h-1} + \sum_{k=1}^{h-1} p_k\Big) = \alpha_1\big((1+\alpha_1)^{h-1} - a_{h-1}\big) p_0.$$

Отсюда следует выражение для P_h, приведённое в (26), подставляя которое в формулу (4), получим равенство (25) для p_0. Выражения (26) для L_h и $L_h^{(2)}$ получены с помощью формул

$$\sum_{k=1}^{h} k x^k = \frac{x\big(1 + h x^{h+1} - (h+1) x^h\big)}{(x-1)^2};$$

$$\sum_{k=2}^{h} k(k-1) x^k = \frac{x^2}{(x-1)^3}\Big(h(h-1)x^{h+1} - 2(h^2-1)x^h + h(h+1)x^{h-1} - 2\Big).$$

Теорема доказана. □

3. СИСТЕМА $\mathrm{M^X/M_1/1}$ С ПОРОГОВОЙ БЛОКИРОВКОЙ ПОТОКА ЗАЯВОК

Для системы обслуживания $\mathrm{M^X/M_1/1}$ предположим дополнительно, что после переключения на режим обслуживания с интенсивностью μ_2 в момент начала обслуживания следующей заявки начинается блокировка входного потока. Итак, после переключения на режим обслуживания с интенсивностью μ_2 блокировка потока заявок не осуществляется только на протяжении времени дообслуживания той заявки, во время обслуживания которой произошло переключение режимов. Если же в момент начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе не превышает h, то блокировка входного потока прекращается и возобновляется режим обслуживания с интенсивностью μ_1. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\mu_2 \geq \mu_1$, и обозначим описанную систему через $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\mathrm{X}/\mathrm{M}_1/1$.

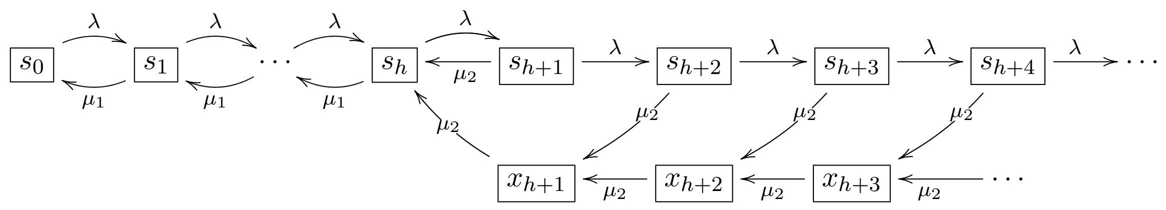

Рис. 2. Диаграмма состояний системы $\mathrm{M}_\mathrm{h}^\mathrm{X}/\mathrm{M}_1/1$ в случае $a_1 = 1$

Введём нумерацию состояний системы (см. рис. 2): s_0 — система свободна; s_i $(i \geq 1)$ — в системе i заявок, входной поток не блокируется; x_i $(i \geq h{+}1)$ — в системе i заявок, используется режим обслуживания с интенсивностью μ_2, поток заявок заблокирован.

Пусть $p_i(t)$ $(q_i(t))$ — вероятность пребывания системы в состоянии s_i (x_i) в момент времени t. Предполагая, что процесс изменения состояний системы эргодический (условия эргодичности мы приведём ниже), то есть существуют пределы $p_i = \lim\limits_{t\to\infty} p_i(t)$ $(i \geq 0)$, $q_i = \lim\limits_{t\to\infty} q_i(t)$ $(i \geq h{+}1)$, запишем систему уравнений для определения стационарных вероятностей p_i и q_i

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu_1 p_1 &= 0; \\ -(\lambda+\mu_1)p_i + \lambda\sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} + \mu_1 p_{i+1} &= 0 \quad (\, i = \overline{1,\, h-1}\,); \\ -(\lambda+\mu_1)p_h + \lambda\sum_{k=0}^{h-1} p_k a_{h-k} + \mu_2(p_{h+1}+q_{h+1}) &= 0; \\ -(\lambda+\mu_2)p_i + \lambda\sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} &= 0 \quad (\, i \geq h+1\,); \end{aligned} \tag{28}$$

$$-\mu_2 q_i + \mu_2(p_{i+1}+q_{i+1}) = 0 \quad (\, i \geq h+1\,); \qquad \sum_{k=0}^{\infty} p_k + \sum_{k=h+1}^{\infty} q_k = 1. \tag{29}$$

Кроме обозначений (2), дополнительно введём следующие:

$$q_i = p_0 \widetilde{q}_i \quad (i \geq h+1), \qquad Q_h = A_h + \sum_{i=1}^{h} \widetilde{p}_i A_{h-i}\,. \tag{30}$$

Теорема 11. *Если $b_1 < \infty$, то стационарные вероятности p_i $(i \geq 0)$ и q_i $(i \geq h+1)$ существуют и определяются из рекуррентных соотношений*

$$p_{i+1} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} \qquad (i = \overline{0,\, h-1}); \qquad q_i = \alpha_2 \sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} \qquad (i \geq h+1); \tag{31}$$

$$p_i = \frac{\lambda}{\lambda+\mu_2}\sum_{k=0}^{i-1} p_k a_{i-k} \qquad (i \ge h+1); \tag{32}$$

$$p_0 = \frac{\mu_2^2}{\mu_2\bigl(\mu_2+\lambda b_1+(\mu_2-\mu_1+\lambda b_1)P_h\bigr)+\lambda^2 b_1 Q_h}\,. \tag{33}$$

Доказательство. Соотношения (31) получим, последовательно складывая i $(i \ge 0)$ уравнений системы (28) и учитывая, что согласно (29)

$$q_i = p_{i+1} + q_{i+1} \qquad (\,i \ge h+1\,),$$

а равенства (32) следуют непосредственно из соответствующих уравнений (28).

Для определения p_0 суммируем по i $(i \ge 0)$ обе части соотношений

$$p_{i+1} = \alpha_1 \sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} \quad (i=\overline{0,\,h-1}); \qquad p_{i+1}+q_{i+1} = \alpha_2 \sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} \quad (i \ge h)$$

и, используя условие нормировки из (29), вычисляем сумму

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \Bigl(1-\sum_{i=h+1}^{\infty} q_i\Bigr)\sum_{k=0}^{\infty} A_k = b_1\Bigl(1-\sum_{i=h+1}^{\infty} q_i\Bigr).$$

Тогда, с учётом обозначений (2) получим

$$\begin{aligned} \mu_1\sum_{i=1}^{h} p_i + \mu_2\sum_{i=h+1}^{\infty}(p_i+q_i) &= \mu_1\sum_{i=1}^{h} p_i + \mu_2\Bigl(1-\sum_{i=0}^{h} p_i\Bigr) = \\ &= \mu_2(1-p_0) - p_0(\mu_2-\mu_1)P_h = \lambda b_1\Bigl(1-\sum_{i=h+1}^{\infty} q_i\Bigr). \end{aligned} \tag{34}$$

После суммирования по i $(i \ge h+1)$ обеих частей соотношений (31) для q_i и использования соотношений (31) для p_{i+1} находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i &= \alpha_2 \sum_{i=h+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} = \alpha_2\Bigl(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k} - \sum_{i=0}^{h}\sum_{k=0}^{i} p_k A_{i-k}\Bigr) = \\ &= \alpha_2 b_1\Bigl(1-\sum_{i=h+1}^{\infty} q_i\Bigr) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sum_{i=1}^{h} p_i - \alpha_2\sum_{k=0}^{h} p_k A_{h-k}. \end{aligned}$$

Решая последнее уравнение относительно $\sum\limits_{i=h+1}^{\infty} q_i$, получаем

$$1-\sum_{i=h+1}^{\infty} q_i = \frac{\mu_2}{\mu_2+\lambda b_1}\Bigl(1+\frac{\mu_1}{\mu_2}\sum_{i=1}^{h} p_i + \alpha_2\sum_{k=0}^{h} p_k A_{h-k}\Bigr). \tag{35}$$

После подстановки этого выражения в (34) и использования обозначений (2), (30) получаем решение p_0 уравнения (34) в виде (33). Теорема доказана. □

Рекуррентные соотношения (31)–(33) позволяют определять $\widetilde{p}_i$ $(i \geq 1)$, $\widetilde{q}_i$ $(i \geq h+1)$, P_h, Q_h, L_h, $L_h^{(2)}$ и, следовательно, стационарные вероятности p_i $(i \geq 0)$ и q_i $(i \geq h+1)$ для каждого фиксированного значения h.

Рассмотрим производящие функции

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i; \qquad Q(z) = \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i z^i; \qquad \widetilde{P}(z) = P(z) + Q(z); \qquad A(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i.$$

Теорема 12. *Производящая функция $\widetilde{P}(z)$ определяется в виде*

$$\widetilde{P}(z) = \frac{1}{(z-1)\big(\mu_2 + \lambda(1 - A(z))\big)} \Bigg((\mu_2 - \mu_1) \sum_{i=1}^{h} p_i z^{i+1} - (\mu_2 - \mu_1) \sum_{i=0}^{h} p_i z^i - \\ -\lambda\big(1 - A(z)\big)\Big(q_{h+1} z^{h+1} + \sum_{i=0}^{h+1} p_i z^i\Big) + p_0(\mu_2 z - \mu_1)\Bigg). \tag{36}$$

Доказательство. Умножая i-е уравнение системы (28) на z^i $(i \geq 0)$ и суммируя, получаем

$$-(\lambda + \mu_2)P(z) + \lambda P(z)A(z) + \mu_1 \sum_{i=1}^{h} p_i\big(z^{i-1} - z^i\big) + \mu_2 \sum_{i=0}^{h} p_i z^i + \mu_2(p_{h+1} + q_{h+1})z^h = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$P(z) = \frac{1}{\mu_2 + \lambda\big(1 - A(z)\big)} \Bigg(\mu_2 p_0 + (\mu_2 - \mu_1) \sum_{i=1}^{h} p_i z^i + \mu_1 \sum_{i=1}^{h} p_i z^{i-1} + \mu_2(p_{h+1} + q_{h+1}) z^h \Bigg). \tag{37}$$

Теперь умножаем на z^i i-е уравнение из (29) (кроме условия нормировки) и суммируем по i $(i \geq h+1)$. Получаем

$$Q(z) = \frac{Q(z) + P(z)}{z} - q_{h+1} z^h - \sum_{i=0}^{h+1} p_i z^{i-1}.$$

Из этого уравнения, используя равенство (37), находим $Q(z)$, а затем и $\widetilde{P}(z)$ в виде (36). Теорема доказана. □

Дифференцируя производящую функцию $\widetilde{P}(z)$ в точке $z = 1$ соответствующее число раз, можно вычислить моменты числа заявок в системе. В частности,

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i + \sum_{i=h+1}^{\infty} i q_i = \widetilde{P}'(1); \qquad \widetilde{P}''(1) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) p_i + \sum_{i=h+1}^{\infty} i(i-1) q_i. \tag{38}$$

Лемма 4. *Первая и вторая производные функции $\widetilde{P}(z)$ в точке $z = 1$ определяются в виде*

$$\widetilde{P}'(1) = \frac{1}{2\mu_2} \Bigg(2(\mu_2 - \mu_1) \sum_{i=1}^{h} i p_i + \lambda(b_2 - b_1)\Big(\sum_{i=0}^{h+1} p_i + q_{h+1}\Big) + \\ + 2\lambda b_1 \Big(1 + \sum_{i=1}^{h+1} i p_i + (h+1) q_{h+1}\Big)\Bigg); \tag{39}$$

$$\widetilde{P}''(1) = \frac{1}{3\mu_2}\bigg(3(\mu_2 - \mu_1 + \lambda b_1)\sum_{i=2}^{h} i(i-1)p_i + \lambda(b_3 - 3b_2 + 2b_1)\Big(\sum_{i=0}^{h+1} p_i + q_{h+1}\Big) + \\ + 3\lambda(b_2 - b_1)\Big(\sum_{i=1}^{h+1} ip_i + (h+1)q_{h+1} + 1\Big) + 3\lambda b_1 h(h+1)(p_{h+1} + q_{h+1}) + 6\lambda b_1 \widetilde{P}'(1)\bigg). \quad (40)$$

Доказательство. Поскольку для производящей функции (36)

$$N(\widetilde{P})(1) = D(\widetilde{P})(1) = N(\widetilde{P}')(1) = D(\widetilde{P}')(1) = N'(\widetilde{P}')(1) = D'(\widetilde{P}')(1) = 0; \\ D''(\widetilde{P}')(1) \neq 0; \qquad N'(\widetilde{P})(1) = D'(\widetilde{P})(1) \neq 0; \\ D'(\widetilde{P}'')(1) = D''(\widetilde{P}'')(1) = D'''(\widetilde{P}'')(1) = 0; \qquad D^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1) \neq 0,$$

то для вычисления производных $\widetilde{P}'(1)$ и $\widetilde{P}''(1)$ используем формулы, аналогичные (7) и (8),

$$\widetilde{P}'(1) = \frac{N''(\widetilde{P}')(1)}{D''(\widetilde{P}')(1)} = \frac{D'(\widetilde{P})(1)\big(N''(\widetilde{P})(1) - D''(\widetilde{P})(1)\big)}{D''(\widetilde{P}')(1)};$$

$$\widetilde{P}''(1) = \frac{N^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1)}{D^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1)}; \qquad N^{(IV)}(\widetilde{P}'')(1) = 2D''(\widetilde{P}')(1)\times \\ \times\Big(2D'(\widetilde{P})(1)\big(N'''(\widetilde{P})(1) - D'''(\widetilde{P})(1)\big) - \widetilde{P}'(1)D'''(\widetilde{P}')(1)\Big).$$

Лемма доказана. □

Теорема 13. *Если* $b_i < \infty$ $(i = 1, 2)$, *то стационарное среднее число заявок в системе* $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$ *конечно и определяется в виде*

$$\overline{L} = \frac{\lambda b_1}{\mu_2} + \frac{p_0}{2\mu_2}\Big(2(\mu_2 - \mu_1)L_h + 2\lambda b_1\big(L_h + (h+1)\widetilde{p}_{h+1} + \\ + (h+1)\widetilde{q}_{h+1}\big) + \lambda(b_2 - b_1)(P_h + 1 + \widetilde{p}_{h+1} + \widetilde{q}_{h+1})\Big); \quad (41)$$

а стационарная средняя длина очереди — в виде

$$\overline{\mathsf{Q}} = \overline{L} - 1 + p_0 = \overline{L} - \frac{\mu_2\big(\lambda b_1 + (\mu_2 - \mu_1 + \lambda b_1)P_h\big) + \lambda^2 b_1 Q_h}{\mu_2\big(\mu_2 + \lambda b_1 + (\mu_2 - \mu_1 + \lambda b_1)P_h\big) + \lambda^2 b_1 Q_h}. \quad (42)$$

Доказательство. Из первой формулы (38) и равенства (39), используя обозначения (2) и (30), получаем (41). Формула (42) следует из очевидных равенств

$$\overline{\mathsf{Q}} = \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)p_i + \sum_{i=h+1}^{\infty}(i-1)q_i = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i + \sum_{i=h+1}^{\infty} iq_i - \sum_{i=1}^{\infty} p_i - \sum_{i=h+1}^{\infty} q_i = \overline{L} - (1 - p_0).$$

Теорема доказана. □

Теорема 14. *Если* $b_i < \infty$ $(i = 1, 2, 3)$, *то дисперсия стационарной средней длины очереди в системе* $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$ *конечна и определяется в виде*

$$\mathbf{D}(\mathsf{Q}) = \widetilde{P}''(1) - \overline{\mathsf{Q}} - \big(\overline{\mathsf{Q}}\big)^2 = \frac{\lambda(b_2 - b_1 + 2b_1\overline{L}\,)}{\mu_2} + \frac{p_0}{3\mu_2}\Big(3(\mu_2 - \mu_1 + \lambda b_1)(L_h^{(2)} - L_h) + \\ + \lambda(b_3 - 3b_2 + 2b_1)(P_h + 1 + \widetilde{p}_{h+1} + \widetilde{q}_{h+1}) + \\ + 3\lambda(b_2 - b_1)\big(L_h + (h+1)(\widetilde{p}_{h+1} + \widetilde{q}_{h+1})\big) + 3\lambda b_1 h(h+1)(\widetilde{p}_{h+1} + \widetilde{q}_{h+1})\Big) - \overline{\mathsf{Q}} - \big(\overline{\mathsf{Q}}\big)^2. \quad (43)$$

Доказательство. Учитывая вторую формулу (38), получаем

$$\overline{\mathsf{Q}^2} = \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)^2 p_i + \sum_{i=h+1}^{\infty}(i-1)^2 q_i = \widetilde{P}''(1) - \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)p_i - \sum_{i=h+1}^{\infty}(i-1)q_i = \widetilde{P}''(1) - \overline{\mathsf{Q}}.$$

Используя выражение (40) для $\widetilde{P}''(1)$ и обозначения (2), (30), приходим к формуле (43) для $\mathbf{D}(\mathsf{Q})$. Теорема доказана. □

Обозначим через $P_{\rm sv}$ стационарную вероятность обслуживания заявки в системе $\mathrm{M_h^X/M_1/1}$. Поскольку $P_{\rm sv} = 1 - \sum\limits_{i=h+1}^{\infty} q_i$, то из равенства (35) и из формулы Литтла для системы с потерями заявок получаем

$$P_{\rm sv} = \frac{\mu_2 + p_0\big(\mu_1 P_h + \lambda Q_h\big)}{\mu_2 + \lambda b_1}\,; \qquad \overline{W} = \frac{\overline{\mathsf{Q}}}{\lambda b_1 P_{\rm sv}}\,. \tag{44}$$

Изучим предельные возможности системы обслуживания $\mathrm{M_h^X/M_1/1}$ при неограниченном возрастании интенсивности обслуживания послепорогового режима μ_2.

Теорема 15. *Если выполнены условия теоремы 13, то*

$$\begin{gathered}\lim_{\mu_2\to\infty} p_0(\mu_2) = \frac{1}{1+P_h}\,; \qquad \lim_{\mu_2\to\infty} \overline{L}(\mu_2) = \frac{L_h}{1+P_h}\,;\\ \lim_{\mu_2\to\infty} \overline{\mathsf{Q}}(\mu_2) = \frac{L_h - P_h}{1+P_h}\,; \qquad \lim_{\mu_2\to\infty} P_{\rm sv}(\mu_2) = 1; \qquad \lim_{\mu_2\to\infty} \overline{W}(\mu_2) = \frac{L_h - P_h}{\lambda b_1(1+P_h)}\,.\end{gathered} \tag{45}$$

Доказательство. Первое, четвёртое и пятое из предельных соотношений (45) следуют непосредственно из равенств (33) и (44), а второе и третье — из равенств (41) и (42) с учётом предельных соотношений

$$\lim_{\mu_2\to\infty} \widetilde{p}_{h+1}(\mu_2) = \lim_{\mu_2\to\infty} \widetilde{q}_{h+1}(\mu_2) = 0,$$

вытекающих из формул (32) и (31). Теорема доказана. □

Сравнивая соотношения (45) с утверждением теоремы 9, видим, что предельные возможности систем обслуживания $\mathrm{M^X/M_1/1}$ и $\mathrm{M_h^X/M_1/1}$ при неограниченном возрастании интенсивности обслуживания послепорогового режима одинаковы.

Как и в случае системы обслуживания $\mathrm{M^X/M_1/1}$, если минимальное число прибывающих заявок в группе сравнимо со значением порога h, то стационарные характеристики системы $\mathrm{M_h^X/M_1/1}$ можно найти в явном виде.

Теорема 16. *Если* $b_i < \infty$ $(i = 1, 2, 3)$ *и выполняются условия* (24), *то*

$$\begin{gathered}p_0 = \frac{\mu_2^2}{\mu_2\big(\mu_2 + \lambda b_1 + (\mu_2 - \mu_1 + \lambda b_1)P_h\big) + \lambda^2 b_1(P_h + A_h - \alpha_1 a_{h-1})}\,;\\ p_i = \alpha_1(1+\alpha_1)^{i-1} p_0 \quad (i = \overline{1,\, h-1}),\end{gathered} \tag{46}$$

а стационарные характеристики системы $\mathrm{M_h^X/M_1/1}$ *конечны и определяются по формулам* (41)–(44), *где*

$$\begin{gathered}Q_h = P_h + A_h - \alpha_1 a_{h-1}; \qquad \widetilde{p}_{h+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu_2}\big(a_{h+1} + \alpha_1 a_h + \alpha_1(1+\alpha_1)a_{h-1}\big);\\ \widetilde{q}_{h+1} = \alpha_2\big(A_{h+1} + \alpha_1 A_h + \alpha_1(1+\alpha_1)A_{h-1}\big),\end{gathered} \tag{47}$$

а P_h, L_h *и* $L_h^{(2)}$ *заданы равенствами* (26).

Доказательство. Если выполнены условия (24), то из соотношений (2) следуют равенства (27), и поскольку формулы (3) и (31) для p_{i+1} $(i = \overline{0,\, h-1})$ совпадают, то таким же путём, как и в доказательстве теоремы 10, получим равенства (46) для p_i $(i = \overline{1,\, h-1})$ и выражения (26) для P_h, L_h и $L_h^{(2)}$. Формулы (47) следуют из (30)–(32) с учётом равенств (27) и выражений (46) для p_i $(i = \overline{1,\, h-1})$. После подстановки выражения (47) для Q_h в формулу (33) получим равенство (46) для p_0. Теорема доказана. □

4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Вычислим стационарные характеристики для каждой из систем $\mathrm{M^X/M_1/1}$ и $\mathrm{M_h^X/M_1/1}$ в случае, когда заявки могут прибывать только по одной или по две, то есть $a_1 + a_2 = 1$. Пусть $\lambda = 2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 4$, $a_1 = 0,75$, $a_2 = 0,25$. Тогда $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 0,5$; $b_1 = 1,25$; $b_2 = 1,75$; $b_3 = 2,75$; $\rho_1 = 2,5$; $\rho_2 = 0,625$; $A_1 = 0,25$; $A_i = 0$ $(i \geq 2)$.

Обозначим через $\sigma(\mathsf{Q})$ среднее квадратическое отклонение стационарной длины очереди, то есть $\sigma(\mathsf{Q}) = \sqrt{\mathbf{D}(\mathsf{Q})}$. В табл. 1 и 3 приведены значения стационарных характеристик систем $\mathrm{M^X/M_1/1}$ и $\mathrm{M_h^X/M_1/1}$, вычисленные для различных значений порога h. Здесь же для сравнения записаны значения этих стационарных характеристик, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [10, 11] для значения времени моделирования $t = 10^5$.

Таблица 1. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M^X/M_1/1}$

h	1	2	3	4	5	6
$\overline{\mathsf{Q}}$	1,750	2,468	3,327	4,256	5,220	6,201
$\overline{\mathsf{Q}}$ (GPSS)	1,740	2,443	3,323	4,246	5,221	6,167
$\sigma(\mathsf{Q})$	2,501	2,622	2,708	2,767	2,804	2,826
$\sigma(\mathsf{Q})$ (GPSS)	2,509	2,603	2,700	2,753	2,827	2,783
$\overline{W}$	0,700	0,987	1,331	1,702	2,088	2,481
$\overline{W}$ (GPSS)	0,697	0,978	1,331	1,700	2,092	2,466

Таблица 2. Решения задачи оптимального синтеза $(h_{\max}, \overline{\mathsf{Q}})$ для системы $\mathrm{M^X/M_1/1}$ при различных значениях Q_0

Q_0	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
h_{opt}	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

Таблица 3. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M_h^X/M_1/1}$

h	$\overline{\mathsf{Q}}$	$\overline{\mathsf{Q}}$ (GPSS)	$\sigma(\mathsf{Q})$	$\sigma(\mathsf{Q})$ (GPSS)	$\overline{W}$	$\overline{W}$ (GPSS)	$P_{\rm sv}$	$P_{\rm sv}$ (GPSS)
1	0,742	0,742	1,173	1,169	0,365	0,366	0,812	0,811
2	1,445	1,447	1,359	1,353	0,701	0,703	0,825	0,824
3	2,294	2,285	1,500	1,500	1,106	1,103	0,830	0,830

Решения задачи оптимального синтеза $(h_{\max}, \overline{\mathsf{Q}})$ для системы $\mathrm{M^X/M_1/1}$, полученные по формуле (20) с помощью данных табл. 1 при различных значениях Q_0, приведены в табл. 2.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в настоящей работе предложен простой алгоритм определения стационарного распределения числа заявок для систем с двухскоростным обслуживанием $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}_1/1$ и $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}_{\mathrm{h}}/\mathrm{M}_1/1$. С помощью метода производящих функций получены формулы, которые позволяют для каждого фиксированного значения порога переключения режимов обслуживания h вычислять стационарные характеристики очереди рассматриваемых систем.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММЫ ДЛЯ GPSS WORLD

Система $\mathbf{M^X/M_1/1}$:

```
Lam EQU 2    ; значение λ
Mu1 EQU 1    ; значение μ1
Mu2 EQU 4    ; значение μ2
AH EQU 3    ; порог переключения
VREM EQU 100000    ; время моделирования
QQ TABLE Q$OCHER 0,1,45    ; параметры распределения длины очереди
GENERATE 1
TABULATE QQ    ; вычислить распределение длины очереди
TERMINATE
GENERATE (Exponential(3,0,(1/Lam)))    ; поток заявок
TRANSFER 750,,OCH    ; a1 = 0,75
SPLIT 2,OCH    ; a2 = 0,25
TRANSFER ,OUT
OCH QUEUE OCHER
GATE U KAN,MKAN    ; занято ли устройство?
TEST E Q$OCHER,AH,MKAN    ; длина очереди равна h?
SPLIT 1,MET
MKAN SEIZE KAN
DEPART OCHER
TEST L Q$OCHER,AH,MET2    ; длина очереди меньше h?
ADVANCE (Exponential(1,0,(1/Mu1)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ1
RELEASE KAN
TERMINATE
MET GATE U KAN,OUT    ; занято ли устройство?
PREEMPT KAN,,MET1,,RE    ; прервать обслуживание
ADVANCE (Exponential(1,0,(1/Mu2)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ2
RETURN KAN
TERMINATE
MET1 TERMINATE
MET2 ADVANCE (Exponential(1,0,(1/Mu2)))    ; задержка на обслуживание с интенс. μ2
RELEASE KAN
TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE VREM
```

```
TERMINATE 1
START 1
```

Система $\mathbf{M_h^X/M_1/1}$:

```
Lam EQU 2    ; значение λ
Mu1 EQU 1    ; значение μ1
Mu2 EQU 4    ; значение μ2
AH EQU 3    ; порог переключения
VREM EQU 100000    ; время моделирования
Ver VARIABLE (N$RL1+N$RL2+N$RL3)/N$MET1    ; вероятность обслуживания
QQ TABLE Q$OCHER 0,1,45    ; параметры распределения длины очереди
GENERATE 1
TABULATE QQ    ; вычислить распределение длины очереди
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))    ; поток заявок
TRANSFER 750,,MET1    ; a1 = 0,75
SPLIT 2,MET1    ; a2 = 0,25
TRANSFER ,OUT
MET1 GATE LS KLU,OUT    ; заблокирован ли вход?
QUEUE OCHER
GATE U KAN,MKAN    ; занято ли устройство?
TEST E Q$OCHER,AH,MKAN    ; длина очереди равна h?
SPLIT 1,METP
MKAN SEIZE KAN
DEPART OCHER
TEST L Q$OCHER,AH,MET2    ; длина очереди меньше h?
SPLIT 1,METS
ADVANCE (Exponential(1,0,(1/Mu1)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ1
RL1 RELEASE KAN
TERMINATE
GATE U KAN,OUT    ; занято ли устройство?
METP PREEMPT KAN,,OUT,,RE    ; прервать обслуживание
ADVANCE (Exponential(1,0,(1/Mu2)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ2
RL2 RETURN KAN
OUT TERMINATE
MET2 SPLIT 1,METR
ADVANCE (Exponential(1,0,(1/Mu2)))    ; задержка на обслуживание с интенсивностью μ2
RL3 RELEASE KAN
TERMINATE
METS LOGIC S KLU    ; включить ключ (разрешить вход)
TERMINATE
METR LOGIC R KLU    ; выключить ключ (запретить вход)
TERMINATE
```

```
GENERATE ,,,1
LOGIC S KLU     ; включить ключ (разрешить вход)
TERMINATE
GENERATE VREM
SAVEVALUE Ver,V$Ver
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dudin A. Optimal multithreshold control for a BMAP/G/1 queue with N service modes. *Queueing Systems*, 1998, vol. 30, №3-4, pp. 273–287.
2. Жерновый Ю. В. Решение задач оптимального синтеза для некоторых марковских моделей обслуживания. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 3, стр. 257–274.
3. Рыжиков Ю. И. О задаче двухскоростного обслуживания. *Проблемы передачи информации*, 1978, т. 14, № 2, стр. 105–112.
4. Dudin A. N. Optimal Control for an $M^X/G/1$ Queue with Two Operation Modes. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1997, vol. 11, №2, pp. 255–265.
5. Жерновый К. Ю. Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 2, стр. 159–180.
6. Братійчук А. М. *Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою.* Кандидатська дисертація, Київ: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2008.
7. Єлейко Я., Жерновий Ю. Універсальні формули для системи обслуговування M/M/n/m з блокуванням вхідного потоку. *Вісник Львівського університету. Сер. прикл. матем. та інформатика*, 2009, вип. 15, стр. 234–239.
8. Чаплыгин В. В. Многолинейная система массового обслуживания с конечным накопителем и блокировкой полумарковского потока заявок. *Информационные процессы*, 2008, т. 8, № 1, стр. 1–9.
9. Жерновый Ю. В. Модели системы M/M/n/r с переключением режимов обслуживания в моменты изменения числа заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 1, стр. 68–77.
10. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.
11. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.