

Свойства формальных контекстов

Д.Е. Стельмашенко

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 25.12.2010

Аннотация—В статье исследуются изменения формальных понятий, вызванные преобразованиями формальных контекстов. Основное внимание уделено фрагментации и дефрагментации формальных контекстов на/из составных частей, заданных множествами признаков.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим с формальной точки зрения вопрос об изменении понятийной картины мира при привлечении/выпадении отдельных групп признаков, задействованных в описании понятий. Следуя [1], будем полагать, что формальные понятия существуют в связи с, так называемыми, формальными контекстами.

2. ФОРМАЛЬНЫЕ КОНТЕКСТЫ

Задействуем букву N для обозначения конечного множества некоторых элементов, именуемых признаками. В примерах для конкретных значений признаков будем использовать натуральные числа.

Подмножества признаков будем называть объектами. Для обозначения объектов будем использовать строчные буквы латинского алфавита: a, b, c и т.д. $a \subseteq N, b \subseteq N$ и т.д.

Подмножества объектов будем называть классами. Для обозначения классов будем использовать заглавные буквы латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Если A – класс, то будем обозначать

$$Con(A) = \bigcap_{a \in A} a$$

В [2] и во всех других учебниках логики доказывается

Закон обратного отношения. Если A и B – два класса и $A \subseteq B$, то $Con(B) \subseteq Con(A)$.

Определение. Пусть D – фиксированное множество объектов, заданных признаками из N . Пару $\langle D, N \rangle$ будем называть формальным контекстом или просто контекстом.¹

Пример 1. $D = \{\{1, 2, 11, 12\}, \{1, 3, 11, 13\}, \{4, 5, 11, 14\}\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14\}$.

3. ФОРМАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. Формальным понятием в контексте $\langle D, N \rangle$ называется такой класс объектов A , $A \subseteq D$, для которого справедливо равенство

$$A = \{ d \in D \mid Con(A) \subseteq d \} \quad (1)$$

¹ Частным случаем задания множества D является таблица $\langle \text{объект}, \text{свойство} \rangle$.

Заметим, что равенство (1) эквивалентно равенству (2):

$$A = \{ d \mid \text{Con}(A) \subseteq d \in D \} \quad (2)$$

Если множество признаков N конечно и контекст $\langle D, N \rangle$ задан, то алгоритм проверки класса A на соответствие определению формального понятия состоит из трех шагов:

Шаг 1. По известному множеству A построить $c = \text{Con}(A)$.

Шаг 2. По известному множеству c построить $T = \{d \in D \mid c \subseteq d\}$.

Шаг 3. Если $A = T$, то A есть формальное понятие, иначе A не является формальным понятием.

Пример 2. (Множества D и N заимствованы из примера 1.)

Проверим класс объектов $B = \{\{1, 2, 11, 12\}, \{1, 3, 11, 13\}\}$ на соответствие определению формального понятия:

Шаг 1. $c = \text{Con}(B) = \{1, 11\}$.

Шаг 2. $T = \{d \in D \mid c \subseteq d\} = \{\{1, 2, 11, 12\}, \{1, 3, 11, 13\}\}$.

Шаг 3. $T \equiv B$, следовательно, B является формальным понятием.

Для фиксированного контекста $\langle D, N \rangle$ понятие A можно задавать:

- явным перечислением объектов, составляющих объем понятия; и/или
- посредством формального содержания $\text{Con}(A)$, и тогда A вычисляется по формуле (1).

Предположим, что множество признаков N задано в виде объединения двух подмножеств N_1 и N_2 . $N = N_1 \cup N_2$. Соответственно дополним соглашения относительно объектов и классов.

Любой объект, скажем a , можно однозначно представить в виде объединения двух подмножеств $a_1 = a \cap N_1$ и $a_2 = a \cap N_2$; $a = a_1 \cup a_2$. Для удобства обозначений, вместо $a = a_1 \cup a_2$ будем писать $a = a_1 + a_2$, понимая, что $a_1 = a \cap N_1$ и $a_2 = a \cap N_2$.

Любой класс, скажем A , однозначно порождает классы

$$A_1 = \{a_1 \mid a_1 + a_2 \in A\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{a_2 \mid a_1 + a_2 \in A\}.$$

Пример 3. (Множества D , N и B заимствованы из примеров 1 и 2.)

Положим $N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и $N_2 = \{11, 12, 13, 14\}$.

Тогда $D_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$ и $D_2 = \{\{11, 12\}, \{11, 13\}, \{11, 14\}\}$.

$$B_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}; \quad \text{Con}(B_1) = \{1\}.$$

Нетрудно заметить, что класс B_1 не является формальным понятием в контексте $\langle D_1, N_1 \rangle$.

4. ФРАГМЕНТАЦИЯ ФОРМАЛЬНЫХ КОНТЕКСТОВ

Рассмотрим вопрос о том, что происходит с формальными понятиями при переходе от заданного формального контекста к его части.

Утверждение 1. Если A – формальное понятие в контексте $\langle D, N_1 \cup N_2 \rangle$, то в контексте $\langle D_1, N_1 \rangle$ существует понятие B_1 , для которого $\text{Con}(B_1) = \text{Con}(A_1)$.

Доказательство. Обозначим $c_1 = \text{Con}(A_1)$, определим $B_1 = \{b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in D_1\}$, и покажем, что

- 1) $c_1 \subseteq \text{Con}(B_1)$,
- 2) $c_1 \supseteq \text{Con}(B_1)$, то есть $\text{Con}(A_1) = \text{Con}(B_1)$,
- 3) B_1 – формальное понятие в контексте $\langle D_1, N_1 \rangle$.

Первое усматривается непосредственно из определения B_1 .

Второе следует из того факта, что

$$B_1 = \{b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in A_1\} \cup \{b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in D_1 \setminus A_1\} = A_1 \cup \{b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in D_1 \setminus A_1\}.$$

Что означает $A_1 \subseteq B_1$, и по закону обратного отношения $\text{Con}(A_1) \supseteq \text{Con}(B_1)$.

Третье следует из доказанного равенства $c_1 = \text{Con}(B_1)$:

$$B_1 = \{ b_1 \mid c_1 \subseteq b_1 \in D_1 \} = \{ b_1 \mid \text{Con}(B_1) \subseteq b_1 \in D_1 \}.$$

Утверждение 1 доказано.

Следствие. $A_1 \subseteq B_1$.

Пример 4. (Множества D , D_1 , D_2 , N , N_1 и N_2 заимствованы из примеров 1 и 3.)

Рассмотрим формальное понятие $A = \{ \{1, 2, 11, 12\}, \{1, 3, 11, 13\} \}$ для контекста $\langle D, N \rangle$:

$$\text{Con}(A) = \{1, 11\}, \quad A_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}, \quad A_2 = \{\{11, 12\}, \{11, 13\}\}.$$

В соответствии с утверждением 1 в контекстах $\langle D_1, N_1 \rangle$ и $\langle D_2, N_2 \rangle$, должны существовать формальные понятия B_1 и B_2 , для которых $\text{Con}(B_1) = \{1\}$ и $\text{Con}(B_2) = \{11\}$. Действительно, такие формальные понятия существуют

$$B_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}, \quad B_2 = \{\{11, 12\}, \{11, 13\}, \{11, 14\}\}.$$

Причем $A_1 = B_1$, но $A_2 \neq B_2$.

5. ДЕФРАГМЕНТАЦИЯ ФОРМАЛЬНЫХ КОНТЕКСТОВ

Рассмотрим вопрос о том, что происходит с формальными понятиями при конструировании единого формального контекста из заданных частей.

Утверждение 2.

Пусть (а) $\langle D, N_1 \cup N_2 \rangle$ – формальный контекст;

(б) B_1 – формальное понятие в контексте $\langle D_1, N_1 \rangle$, где $D_1 = \{d_1 \mid d_1 + d_2 \in D\}$;

(в) B_2 – формальное понятие в контексте $\langle D_2, N_2 \rangle$, где $D_2 = \{d_2 \mid d_1 + d_2 \in D\}$;

Тогда класс $B = \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1 \text{ и } b_2 \in B_2\}$

является формальным понятием в контексте $\langle D, N_1 \cup N_2 \rangle$.

Доказательство. Покажем, что

$$B \subseteq \{b \in D \mid \text{Con}(B) \subseteq b\}, \quad (3)$$

$$\text{Con}(B_1) + \text{Con}(B_2) \subseteq \text{Con}(B), \quad (4)$$

$$B \supseteq \{b \in D \mid \text{Con}(B) \subseteq b\} \quad (5)$$

Соотношение (3) выполняется для любого класса объектов из D , в том числе и для B .

Докажем соотношение (4), которое существенно используется при доказательстве (5). Определим вспомогательный класс $A = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in B_1 \text{ и } a_2 \in B_2\}$.

Во-первых, $B \subseteq A$, и по закону обратного отношения $\text{Con}(A) \subseteq \text{Con}(B)$.

Во-вторых,

$$\text{Con}(A) = \bigcap_{a_1 \in B_1} \bigcap_{a_2 \in B_2} (a_1 + a_2) = \bigcap_{a_1 \in B_1} a_1 + \bigcap_{a_2 \in B_2} a_2 = \text{Con}(B_1) + \text{Con}(B_2)$$

Окончательно:

$$\text{Con}(B_1) + \text{Con}(B_2) = \text{Con}(A) \subseteq \text{Con}(B).$$

Соотношение (4) доказано.

Докажем (5). Предположим обратное: существует некоторый объект c такой, что

$$c \in D, \quad c \notin B \text{ и } \text{Con}(B) \subseteq c.$$

Из $\text{Con}(B) \subseteq c$ и (4) следует, что $\text{Con}(B_1) + \text{Con}(B_2) \subseteq c$.

В результате формальных преобразований

$$\begin{aligned}
N_1 \cap (Con(B_1) + Con(B_2)) &\subseteq c \cap N_1, \\
N_1 \cap Con(B_1) + N_1 \cap Con(B_2) &\subseteq c \cap N_1, \\
Con(B_1) + N_1 \cap Con(B_2) &\subseteq c_1, \\
Con(B_1) &\subseteq c_1.
\end{aligned}$$

По предположению $c \in D$, поэтому $c_1 \in D_1$.

Следовательно $Con(B_1) \subseteq c_1 \in D_1$.

А поскольку B_1 - формальное понятие, то $c_1 \in B_1$.

Аналогично $c_2 \in B_2$.

Окончательно: $c = c_1 + c_2 \in B$, что противоречит сделанному предположению.

Соотношение (5) доказано.

Из (3) и (5) следует, что B - формальное понятие в контексте $\langle D, N_1 \cup N_2 \rangle$.

Утверждение 2 доказано.

Следствие. $Con(B_1) + Con(B_2) \subseteq Con(B)$.

Пример 5. (Множества D, D_1, D_2, N, N_1 и N_2 заимствованы из примеров 1 и 3.)
Рассмотрим формальные понятия B_1 и B_2 для контекстов $\langle D_1, N_1 \rangle$ и $\langle D_2, N_2 \rangle$:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{ \{1, 2\}, \{1, 3\} \}; & Con(B_1) &= \{1\}, \\
B_2 &= \{ \{11, 12\}, \{11, 13\}, \{11, 14\} \}; & Con(B_2) &= \{11\}.
\end{aligned}$$

В соответствии с утверждением 2 класс

$$B = \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1 \text{ и } b_2 \in B_2\} = \{ \{1, 2, 11, 12\}, \{1, 3, 11, 13\} \}$$

является формальным понятием в контексте $\langle D, N \rangle$ и $Con(B) = \{1, 11\}$.

Пример 6. Случай $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, $Con(B_1) + Con(B_2) \subset Con(B)$

$$\begin{aligned}
\text{Пусть } D &= \{ \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 3, 4\} \}, & N &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\
D_1 &= \{ \{1\}, \{2\}, \{2, 3\} \}, & N_1 &= \{1, 2, 3\}, \\
D_2 &= \{ \{4\}, \{5\}, \{3, 4\} \}, & N_2 &= \{3, 4, 5\}, \\
B_1 &= \{ \{2\}, \{2, 3\} \}, & Con(B_1) &= \{2\}, \\
B_2 &= \{ \{4\}, \{3, 4\} \}, & Con(B_2) &= \{4\}.
\end{aligned}$$

Тогда $B = \{b_1 + b_2 \in D \mid b_1 \in B_1 \text{ и } b_2 \in B_2\} = \{ \{2, 3, 4\} \}$,
 B есть формальное понятие в контексте $\langle D, N \rangle$ и $Con(B) = \{2, 3, 4\}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая представленные результаты, отметим, что в задачах фрагментации и дефрагментации формальных контекстов объемы и содержания формальных понятий проявляют себя диаметрально противоположным образом. Если в задаче фрагментации необходимо заново "пересчитывать" объем понятия, то в задаче дефрагментации необходимо "пересчитывать" уже содержание понятия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ganter B., Wille R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Springer, 1999.
2. Бочаров В.А., Маркин В.И. *Основы логики*. М.: Космополис, 1994.