

Вывод явных формул для подсчёта циклов фиксированной длины в неориентированных графах

А.Н.Воропаев

Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, Россия

Поступила в редколлегию 25.12.2010

Аннотация—Приводится описание двух способов вывода формул для количества циклов длиной k в неориентированных графах. Идея вывода состоит в перечислении всевозможных конфигураций замкнутых маршрутов длиной k и выражении чисел соответствующих маршрутов через матрицу смежности графа. Комбинация указанных величин с определёнными коэффициентами, которые также требуется вычислить, даёт формулу для подсчёта циклов. Оба способа вывода основаны на подходах, предложенных в работах Росса, Харари и Манвела. В одном случае коэффициенты, входящие в формулу, вычисляются в ходе перечисления конфигураций, а в другом — исходя из сгенерированного набора конфигураций. Реализация способов в системе компьютерной алгебры позволила продвинуться до значения $k = 13$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важные свойства многих графовых моделей связаны с их циклической структурой, а именно, с количеством циклов различной длины. Обширный класс таких моделей составляют реальные сети. Их характерным свойством является кластеризация, или транзитивность, — «повышенное» количество треугольников. Мерой транзитивности служит коэффициент кластеризации $C = 3c_3/p_3 \in [0; 1]$, где c_3 — количество циклов длиной три, а p_3 — количество цепей длиной два (или с тремя вершинами) [1, 2]. Например, для полных графов или объединений полных графов, если в них есть треугольники, $C = 1$. Граф, в котором вершинами являются директора наиболее успешных американских компаний из списка «Fortune 1000» 1999 года, а рёбра соединяют директоров, входящих в один совет, характеризуется значением $C \approx 0,588$ [3, 2]. Для графа электрической сети западной части США к 1998 году, образованного из генераторов, трансформаторов и подстанций, соединённых высоковольтными линиями электропередачи, $C \approx 0,10$ [4, 2]. Любому двудольному графу соответствует значение $C = 0$, поэтому их характеризуют двудольным коэффициентом кластеризации: $C_b = 4c_4/p_4 \in [0; 1]$, где c_4 — количество циклов длиной четыре, а p_4 — количество простых цепей длиной три [5].

Более полно сеть описывается всей статистикой циклов по длинам, однако обычно удаётся подсчитать только короткие циклы. Так, в [1] для измерения баланса в знаковом графе предлагается учитывать только циклы длиной 3 и 4. Авторы [6] использовали количество циклов длиной 3, 4 и 5 при исследовании схем городских улиц. В [7] показано, что в бозонных сетях и сетях со старением вершин топологические фазовые переходы сопровождаются изменением масштабирования количества коротких циклов относительно размера системы. Через число циклов фиксированной длины выражаются решёточные константы, являющиеся коэффициентами высокотемпературных разложений статистических сумм в классической модели Изинга [8]. В теории кодирования со статистикой коротких циклов в графах, моделирующих коды, связывается качество рабочих характеристик самих кодов, например, кодов с низкой плотностью проверок на чётность [9].

Для некоторых семейств графов количество циклов выражается через параметры семейства, такие как порядок графа. Один из примеров — циклы фиксированной длины на решётках разных типов [8, 11, 10, 12]. В псевдофрактальной немасштабируемой (scale-free) сети [13] полное распределение количества циклов по длинам выражается с помощью рекуррентных соотношений [14]. В большинстве же случаев структура графа трудноанализируема или её свойства заранее неизвестны (например, в реальных сетях), и тогда подсчёт циклов приходится осуществлять с помощью общих алгоритмов.

Стандартные переборные методы [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23] позволяют подсчитывать циклы, конструируя каждый цикл графа отдельно. Однако количество циклов длиной k в графе порядка n может достигать значения $1/(2k) \cdot n!/(n-k)!$ (полный граф), поэтому в общем случае сложность всех таких алгоритмов растёт, по крайней мере, как n^k (при фиксированном значении k). Существуют также универсальные формулы [24, 25, 26] для числа циклов заданной длины k , в которых подсчитываются все замкнутые маршруты длиной k для различных подмножеств вершин графа. Само перечисление указанных подмножеств осуществляется с той же сложностью $O(n^k)$ (или на порядок меньше). Универсальные выражения формально применимы для любого значения длины цикла и любого графа, однако на практике они не слишком продуктивны. В случае коротких циклов существенно эффективнее оказываются отдельные формулы для каждого значения k , в которых подсчитываются замкнутые маршруты длиной k различного вида: [27] — $k = 3, 4, 5$, [28] — $k = 6$, и [29, 26, 30] — $k = 7, 8, \dots, 12$. Подсчёт циклов по ним осуществляется со сложностью умножения $n \times n$ -матриц при $k \leq 7$ и со сложностью $O(n^{\lfloor k/2 \rfloor} \log n)$ при $k \geq 8$. Перечисленные формулы характеризуются резким увеличением числа слагаемых с ростом k и ориентированы преимущественно на компьютерную реализацию, в частности, параллельную [31, 30]. В целом, о задаче подсчёта циклов длиной k в произвольном графе порядка n известно, что она $\#W[1]$ -полна [32], когда параметром является длина цикла, то есть при условии $\#W[1] \neq FPT$ не существует $f(k) n^{\text{const}}$ -алгоритма вычисления количества циклов длиной k .

В [29, 26] и [33] сообщалось о двух способах вывода явных формул для подсчёта циклов фиксированной длины в неориентированных графах. Первый основан на методе Росса и Харари [34], а второй — на подходе Харари и Манвела [27, 35, 28]. В данной работе приводится развёрнутое описание указанных способов в усовершенствованном варианте.

Основное содержание работы представлено в разделах 3, 4 и 5. В 3 и 4 описаны модификация метода Росса и Харари и формализация подхода Харари и Манвела. Обсуждаются ранее известные результаты, приводятся данные компьютерных экспериментов. В приложении демонстрируются детали работы алгоритмов на примере вывода формулы для количества циклов длиной 6. Раздел 5 посвящён виду самих формул. Описаны способы упрощения сумм, входящих в формулы, а также указан вид сумм, представляющих наибольшую вычислительную трудность.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В основном, в работе используется терминология [36] и рассматриваются неориентированные конечные графы без петель и кратных рёбер.

Под маршрутом длиной k понимается упорядоченный набор $w = (v_1; v_2; \dots; v_{k+1})$ вершин графа, такой что вершины v_i и v_{i+1} смежны (в случае ориентированного графа v_i смежна к v_{i+1}). Маршрут с начальной вершиной u и конечной вершиной v называется $(u-v)$ -маршрутом.

Символы n , t и A закреплены за количеством вершин (порядком), количеством рёбер (размером) и матрицей смежности графа, в котором подсчитываются простые циклы. Определение «простой» обычно опускается. Буква k обозначает длину подсчитываемых циклов, а c_k — количество этих циклов, делённое на $2k$ (циклы, проходящие по одному и тому же набору

рёбер, рассматриваются как один). Граф, состоящий из одного простого цикла с k вершинами, обозначается C_k , а из одной простой цепи с k вершинами — P_k .

Элементы матрицы A записываются в виде a_{ij} , а элементы её степеней A^l — в виде $a_{ij}^{(l)}$. Диагональ матрицы A^2 состоит из степеней вершин, поэтому вместо $a_{ii}^{(2)}$ обычно применяется символ d_i . Матричные выражения, встречающиеся в работе, содержат следующие обозначения: « \cdot » — обычное умножение, « \times » — поэлементное умножение, « T » — транспонирование, $\text{tr}(A)$ — след A , $d(A)$ — диагональная матрица с той же главной диагональю, что A .

Часто для множества целых чисел вида $\{a; a + 1; \dots; b\}$ используется обозначение $a..b$. Взятие целой части числа a записывается с помощью квадратных скобок: $[a]$.

3. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА РОССА И ХАРАРИ

3.1. Оригинальный метод

В [34] рассматривалась задача подсчёта открытых $(i-j)$ -маршрутов длиной k с повторяющимися вершинами в орграфе. Авторы предложили метод вывода явной формулы, выражающей матрицу $R_k = (r_{ij}^{(k)})$ количества этих маршрутов через матрицу смежности орграфа. Интерес представляют только недиагональные элементы матрицы R_k , так как выражения выводятся в предположении $i \neq j$. Значения диагональных элементов, получаемые по формулам, смысла не имеют.

Назовём пересечением маршрута w пару $\{p; q\} \subset 1..k + 1$, $p \neq q$, для которой $w_p = w_q$, и обозначим X_k множество всех пересечений, которые могут иметь открытые маршруты длиной k :

$$X_k = \{\{p; q\} \subset 1..k + 1 \mid p < q - 1\} \setminus \{\{1; k + 1\}\}.$$

Фиксируем две различные вершины i и j и соотнесём с каждым набором пересечений $S \subset X_k$ множество W_S всех $(i-j)$ -маршрутов длиной k , имеющих пересечения из набора S :

$$W_S = \{w \in W \mid \forall \{p; q\} \in S \ w_p = w_q\}.$$

Здесь W — множество всех $(i-j)$ -маршрутов длиной k . Тогда количество $(i-j)$ -маршрутов длиной k с повторяющимися вершинами выражается по принципу включения — исключения:

$$r_{ij}^{(k)} = \left| \bigcup_{s \in X_k} W_{\{s\}} \right| = \sum_{S \subset X_k, S \neq \emptyset} (-1)^{|S|+1} |W_S|, \quad i \neq j, \quad (1)$$

Например,

$$r_{ij}^{(3)} = |W_{\{1;3\}}| + |W_{\{2;4\}}| - |W_{\{1;3\};2;4\}}|.$$

Мощность множества W_S можно записать с помощью элементов матрицы смежности:

$$|W_S| = \sum_{\forall \{p; q\} \in S \ i_p = i_q} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_{k+1}}, \quad i_1 = i, \quad i_{k+1} = j. \quad (2)$$

В (2) индексы принимают значения с 1 по n , где n — порядок орграфа, в котором подсчитываются маршруты. Например,

$$r_{ij}^{(3)} = \sum_{l=1}^n a_{il} a_{li} a_{ij} + \sum_{l=1}^n a_{ij} a_{jl} a_{lj} - a_{ij} a_{ji} a_{ij} = (d(A^2) \cdot A + A \cdot d(A^2) - A \times A^T)_{ij}. \quad (3)$$

Многим наборам пересечений S соответствуют тождественно пустые множества W_S . Эти наборы называются противоречивыми. Таковы, например, наборы $\{\{1; 3\}; \{1; 4\}\}$ и $\{\{1; 3\}; \{3; k+1\}\}$, которые влекут недопустимые пересечения $\{3; 4\}$ и $\{1; k+1\}$, соответственно. В частности,

$$|W_S| = 0 \quad \text{при} \quad |S| > 2 \binom{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}{2} = \lfloor (k+1)/2 \rfloor \lfloor (k-1)/2 \rfloor. \quad (4)$$

В описании алгоритма [34, с. 207] в пункте (b) имеется опечатка: пропущен множитель 2 перед числом сочетаний.

Существуют различные наборы S , которым соответствуют равные или равномогущные множества W_S . Например, при $k = 5$ наборы $\{\{1; 3\}; \{1; 5\}\}$, $\{\{1; 3\}; \{3; 5\}\}$, $\{\{1; 5\}; \{3; 5\}\}$ и $\{\{1; 3\}; \{1; 5\}; \{3; 5\}\}$ задают множество маршрутов вида *abacad*, в которых первая, третья и пятая вершины совпадают. Наборам же $S = \{\{1; 5\}; \{2; 4\}; \{3; 6\}\}$ и $T = \{\{1; 3\}; \{2; 5\}; \{4; 6\}\}$ при $k = 5$ соответствуют не равные, но эквивалентные множества маршрутов вида *abcbac* и вида *abacbc*, отличающихся только порядком прохождения дуг.

Основная задача состоит в перечислении всех непротиворечивых подмножеств $S \subset X_k$, $|S| \leq \lfloor (k+1)/2 \rfloor \lfloor (k-1)/2 \rfloor$, составлении матричных выражений для величин $|W_S|$ и приведении подобных слагаемых в формуле (1).

Авторам [34] удалось вывести формулы для матриц R_3, R_4, R_5 и R_6 . Основным препятствием для дальнейшего продвижения оказался резкий рост не только количества рассматриваемых наборов S , но и размера самих формул (таблица 1). Столбец «все S » соответствует случаю $0 < |S| \leq \lfloor (k+1)/2 \rfloor \lfloor (k-1)/2 \rfloor$. В следующем столбце « $W_S \neq \emptyset$ » указано количество непротиворечивых наборов. Столбец « $W_S \neq W_T$ » содержит количество слагаемых, которое получается в результате группировки наборов пересечений, задающих одно и то же множество маршрутов. Вычитаемые величины показывают, в скольких группах получилось взаимное уничтожение. Последний столбец « $|W_S| \neq |W_T|$ » отражает случай, когда сгруппированы ещё и наборы S , которым соответствуют равномогущные множества маршрутов.

Таблица 1. Количество слагаемых в формуле (1) с учётом различных свойств

k	все S	$W_S \neq \emptyset$	$W_S \neq W_T$	$ W_S \neq W_T $
3	3	3	3	3
4	15	10	9	9
5	465	79	41 - 4	32
6	6475	434	180 - 15	101

Для уменьшения трудоёмкости вывода выражений в [34] использовалась двойственность наборов пересечений. Множества пересечений S и T называются двойственными, если $T = \{\{k+2-p; k+2-q\} \mid \{p; q\} \in S\}$. При таком соотношении формула (2) для $|W_T|$ получается из формулы для $|W_S|$ перестановкой индексов каждого множителя и перестановкой i и j , или, в матричной форме, обращением порядка множителей в обычных произведениях. Например, при $k = 3$ наборы $S = \{1; 3\}$ и $T = \{2; 4\}$ двойственны, поэтому из $|W_S| = (d(A^2) \cdot A)_{ij}$ следует $|W_T| = (A \cdot d(A^2))_{ij}$. Учёт двойственности сокращает объём вычислений при выводе формулы менее чем в два раза (так как существуют самодвойственные наборы) и не решает проблему резкого роста количества перебираемых конфигураций (таблица 1).

Авторы [34] не обсуждали способы эффективного перечисления только «уникальных» непротиворечивых наборов пересечений (таблица 1) или способы сокращения перечисления в этом направлении. В частности, свойство (4) определяет далеко не все противоречивые наборы. Также не описываются формальные процедуры вывода и упрощения матричных выражений для величин $|W_S|$ и приведения подобных слагаемых. При ручном выводе эти процедуры не требуются, но они необходимы для компьютерной реализации.

3.2. Модификация метода для случая циклов

В [37] предлагалось использовать формулы [34] для матриц R_3 , R_4 , R_5 и R_6 при подсчёте гамильтоновых контуров в графах с порядками $n = 4, 5, 6, 7$ соответственно:

$$c_n = (A^n - R_{n-1} \cdot A)_{ii}.$$

Можно распространить это соотношение на случай циклов фиксированной длины k в (неориентированном) графе произвольного порядка:

$$c_k = \frac{1}{2k} \operatorname{tr}(A^k - R_{k-1} \cdot A). \quad (5)$$

Например, при $k = 4$ из формул (5) и (3) следует

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{8} (\operatorname{tr}(A^4) - \operatorname{tr}(R_3 \cdot A)) = \frac{1}{8} (\operatorname{tr}(A^4) - \operatorname{tr}(A \cdot d(A^2) \cdot A + d(A^2) \cdot A^2 - A^2)) \\ &= \frac{1}{8} (\operatorname{tr}(A^4) + \operatorname{tr}(A^2) - 2 \operatorname{tr}(d(A^2)^2)). \end{aligned} \quad (6)$$

В общем случае такой способ вывода формул для величин c_k оказывается затруднительным и неэффективным. Во-первых, требуется разработать правила приведения подобных слагаемых. Уже в представленном примере (6) получилось два внешне отличных тождественных выражения: $\operatorname{tr}(A \cdot d(A^2) \cdot A)$ и $\operatorname{tr}(d(A^2) \cdot A^2)$. С ростом k количество подобных слагаемых резко увеличивается. Так, при $k = 6$ в начальной формуле насчитывается 102 слагаемых, а в конечной, как показано ниже, всего 12. Во-вторых, вывод формулы для матрицы R_{k-1} затратнее непосредственного вывода выражения для величины c_k (раздел 3.4).

Примечателен факт, что несмотря на наличие формулы для матрицы R_6 , из которой сразу получается выражение для c_7 (хотя и громоздкое, если не выполнять упрощений), более компактная самостоятельная формула для c_7 в литературе не встречается.

Для независимого вывода выражения для количества циклов применима формула включения — исключения, аналогичная (1):

$$c_k = \frac{1}{2k} \left| W \setminus \bigcup_{s \in X_k} W_{\{s\}} \right| = \frac{1}{2k} \sum_{S \subset X_k} (-1)^{|S|} |W_S|, \quad (7)$$

$$X_k = \{\{p; q\} \subset 1..k \mid p < q - 1\} \setminus \{\{1; k\}\}. \quad (8)$$

Множества W_S формально определяются как ранее, однако теперь W есть множество всех замкнутых маршрутов длиной k в графе. Множество X_k для циклов совпадает с X_{k-1} для открытых маршрутов.

Несколько изменяется наибольшая мощность непротиворечивых наборов пересечений (4):

$$|W_S| = 0 \quad \text{при} \quad |S| > 2 \binom{\lfloor k/2 \rfloor}{2} = \lfloor k/2 \rfloor \lfloor (k-2)/2 \rfloor. \quad (9)$$

Также корректируется определение двойственного набора. Если в случае открытых маршрутов каждый номер i в наборе заменялся на $k + 2 - i$, то для замкнутых маршрутов это правило применяется только к номерам, отличным от единицы, а единица остаётся неизменной.

Выведем формулу для величины c_5 . Согласно (8) возможны 5 пересечений:

$$X_5 = \{\{1; 3\}; \{1; 4\}; \{2; 4\}; \{2; 5\}; \{3; 5\}\}.$$

Далее пересечение $\{p; q\}$ будет обозначаться pq . Из (9) следует, что непротиворечивыми могут быть только наборы не более чем из двух пересечений. Таких наборов 16, но только 11 непротиворечивы:

$$10 c_5 = |W_\emptyset| - (|W_{\{13\}}| + |W_{\{14\}}| + |W_{\{24\}}| + |W_{\{25\}}| + |W_{\{35\}}|) + (|W_{\{13;24\}}| + |W_{\{13;25\}}| + |W_{\{14;25\}}| + |W_{\{14;35\}}| + |W_{\{24;35\}}|) = |W_\emptyset| - 5|W_{\{13\}}| + 5|W_{\{13;24\}}|. \quad (10)$$

В скобках сгруппированы тождественные слагаемые (то есть множества маршрутов W_S тождественно совпадают или равномоцны). По причине небольшого значения длины цикла в данном случае имеет место только равномоцность. Рассмотрим подробно последнюю группу. Множество $W_{\{13;24\}}$ содержит маршруты вида $ababca$, а множество $W_{\{14;25\}}$ — вида $abcaba$. Взаимно однозначное соответствие между ними образуется перестановкой частей маршрутов aba и $abca$. Аналогично соотносятся множества $W_{\{13;25\}} = \{acabca\}$ и $W_{\{14;35\}} = \{abcaca\}$. Устанавливается биекция и между множествами $W_{\{13;24\}}$ и $W_{\{13;25\}}$, но за счёт того, что в каждое множество W_S попадают маршруты с различными начальными вершинами. В данном случае маршруту $ababca \in W_{\{13;24\}}$ можно сопоставить проходящий по тем же рёбрам маршрут $babca \in W_{\{13;25\}}$ (и наоборот). Равномоцность множеств $W_{\{13;24\}}$ и $W_{\{13;25\}}$ объясняется также неориентированностью графа. Проходя часть $abca$ в обратном направлении, получаем из маршрута $ababca \in W_{\{13;24\}}$ маршрут $abacba \in W_{\{13;25\}}$. Тождество же $|W_{\{13;24\}}| = |W_{\{24;35\}}|$, например, выполняется только за счёт неучёта начальной вершины. Возможна и обратная ситуация — когда только благодаря неориентированности графов множества W_S имеют одинаковую мощность. В рассматриваемом случае $k = 5$ такого примера нет, но уже при $k = 6$ встречаются подходящие конфигурации — рисунок 1.

Выражение величин $|W_S|$ в (10) через матрицу смежности даёт следующую формулу:

$$\begin{aligned} 10 c_5 &= \sum_{i_1; i_2; \dots; i_5} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_5 i_1} - 5 \sum_{i_1; i_2; i_4; i_5; i_6} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1} a_{i_1 i_4} a_{i_4 i_5} a_{i_5 i_1} \\ &+ 5 \sum_{i_1; i_2; i_5; i_6} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_5} a_{i_5 i_1} = \sum_i a_{ii}^{(5)} - 5 \sum_i a_{ii}^{(2)} a_{ii}^{(3)} + 5 \sum_i a_{ii}^{(3)} \\ &= \sum_i \left(a_{ii}^{(5)} + 5(1 - d_i) a_{ii}^{(3)} \right) = \text{tr}(A^5) - 5 \text{tr}(d(A^3) \times d(A^2)) + 5 \text{tr}(A^3). \end{aligned}$$

Суммирование по каждому индексу выполняется в диапазоне от 1 до n , где n — порядок графа. Формула для матрицы R_4 , из которой можно получить только что выведенную, содержит девять слагаемых.

Выражения для величин c_k оказываются гораздо компактнее соответствующих выражений для матриц R_{k-1} за счёт замкнутости маршрутов и неучёта начальной вершины и за счёт неориентированности графов. В частности, двойственные наборы пересечений задают равномоцные множества маршрутов, биекция между которыми устанавливается «обращением» маршрутов.

3.3. Сокращение перечисления в алгоритме

Итоговое количество слагаемых в формуле включения — исключения (1) или (7) получается существенно меньше исходного формального значения (таблица 1). Это происходит за счёт того, что большинство наборов пересечений противоречиво, а из остающихся непротиворечивых наборов S многие определяют тождественно совпадающие величины $|W_S|$, которые можно выразить одной формулой. Сами множества W_S при этом могут как совпадать, так и не совпадать. В данном разделе описывается вычислительная схема, которая позволяет не рассматривать большую часть наборов указанных классов.

Тождественное равенство множеств маршрутов W_S при различных наборах пересечений S обусловлено тем, что эти наборы задают одни и те же группы совпадающих вершин в маршруте. Например, $W_{\{13;15\}} = W_{\{13;35\}} = W_{\{15;35\}} = W_{\{13;15;35\}}$, так как все четыре набора задают совпадение первой, третьей и пятой вершин маршрута. Набор пересечений S удобно представлять в виде графа $G_S = (1..k; S)$. Каждая компонента связности этого графа соответствует группе номеров совпадающих вершин. Обозначим \mathcal{P}_S совокупность множеств вершин тех компонент, которые состоят более чем из одной вершины. Для рассматриваемого примера $\mathcal{P} = \{\{1; 3; 5\}\}$. Множество \mathcal{P}_S является разбиением части диапазона $1..k$ на множества, состоящие более чем из одного элемента и (при непротиворечивом S) не содержащие соседних номеров или 1 и k . Далее для таких разбиений используется определение «допустимые». Все непротиворечивые наборы пересечений, задающие одно и то же множество маршрутов W_S , и только такие при фиксированной длине маршрута, характеризуются и общим допустимым разбиением \mathcal{P} . По этой причине будем использовать также обозначение $W_{\mathcal{P}}$ для указанного множества маршрутов.

В формуле (7) удаётся аналитически вычислить коэффициент, который получается в результате группировки совпадающих множеств W_S :

$$c_k = \frac{1}{2k} \sum_{\mathcal{P}} \sum_{S \subset X_k, \mathcal{P}_S = \mathcal{P}} (-1)^{|S|} |W_S| = \frac{1}{2k} \sum_{\mathcal{P}} a_{\mathcal{P}} |W_{\mathcal{P}}|, \quad \text{где } a_{\mathcal{P}} = \sum_{S \subset X_k, \mathcal{P}_S = \mathcal{P}} (-1)^{|S|}.$$

Индекс \mathcal{P} пробегает всевозможные допустимые разбиения частей диапазона $1..k$. Указанное преобразование позволяет при выводе формулы рассматривать не наборы пересечений, а только разбиения, соответствующие совокупностям таких наборов. Например,

$$|W_{\{13;15\}}| + |W_{\{13;35\}}| + |W_{\{15;35\}}| - |W_{\{13;15;35\}}| = 2|W_{\{\{1;3;5\}\}}|$$

(в левой части равенства индексами являются наборы пересечений, а в правой — разбиение), то есть $a_{\{\{1;3;5\}\}} = 2$. Выведем явную формулу, выражающую коэффициент $a_{\mathcal{P}}$ через величины $|I|$, $I \in \mathcal{P}$. В терминах графов G_S значение $a_{\mathcal{P}}$ есть разность количества графов с компонентами, имеющими порядки $|I|$, $I \in \mathcal{P}$, с чётным и нечётным числом рёбер. Компоненты можно рассматривать независимо друг от друга, поэтому в результате задача сводится к подсчёту связных графов порядков $|I|$ с чётным и нечётным количеством рёбер. Пусть $e_{\mathcal{Q}}$, где \mathcal{Q} — набор непересекающихся множеств, обозначает количество графов с множеством вершин $\bigcup_{I \in \mathcal{Q}} I$, чётным числом рёбер и компонентами связности, определяемыми разбиением \mathcal{Q} . Аналогично введём $o_{\mathcal{Q}}$ для случая нечётного числа рёбер. Тогда

$$a_{\mathcal{P}} = e_{\mathcal{P}} - o_{\mathcal{P}} = \sum_{\substack{f_I \in \{e_{\{I\}}; o_{\{I\}}\} \\ \text{кол. } o_{\{I\}} \text{ чёт.}}} \prod_{I \in \mathcal{P}} f_I - \sum_{\substack{f_I \in \{e_{\{I\}}; o_{\{I\}}\} \\ \text{кол. } o_{\{I\}} \text{ неч.}}} \prod_{I \in \mathcal{P}} f_I = \prod_{I \in \mathcal{P}} (e_{\{I\}} - o_{\{I\}}) = \prod_{I \in \mathcal{P}} (e_{|I|} - o_{|I|}),$$

где e_l (o_l), l — натуральное число, обозначает количество связных графов порядка l и чётного (нечётного) размера. Разность $e_l - o_l$ выражается формулой $(-1)^{l-1}(l-1)!$ [38]. В результате для коэффициента $a_{\mathcal{P}}$ имеем следующее равенство:

$$a_{\mathcal{P}} = \prod_{I \in \mathcal{P}} (-1)^{|I|-1} (|I|-1)!$$

С целью организации перечисления допустимых разбиений упорядочим подмножества диапазона $1..k$ и сами разбиения. Будем говорить, что множество $I \subset 1..k$ меньше множества $J \subset 1..k$, если набор чисел из I в порядке возрастания лексикографически меньше аналогичного набора чисел из J . Точно так же, используя введённый порядок, упорядочим допустимые разбиения. Например, для $k = 5$

$$\{13\} < \{13; 24\} < \{13; 25\} < \{14\} < \{14; 25\} < \{14; 35\} < \{24\} < \{24; 35\} < \{25\} < \{35\}.$$

По причине малого значения k в примере допустимые разбиения совпадают с непротиворечивыми наборами пересечений. Все допустимые разбиения можно перечислить начиная с пустого разбиения и используя следующее правило порождения новых разбиений из имеющихся:

$$\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \cup \{J\}, \quad J \subset \left\{ i \in (1..k) \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{P}} I \mid i > \min \max \mathcal{P} \right\}, \quad (11)$$

J не содержит одновременно соседних номеров или 1 и k .

Если $\mathcal{P} = \emptyset$, считается $\min \max \mathcal{P} = 0$.

Помимо учёта совпадающих множеств маршрутов, описанного выше, при перечислении разбиений удаётся не рассматривать явно многие разбиения, которым соответствуют эквивалентные множества маршрутов. Классы этих множеств связаны с понятиями двойственности и циклического сдвига. Разбиение $\text{dual } \mathcal{P}$, двойственное к \mathcal{P} , получается из \mathcal{P} заменой каждого номера $i \neq 1$, участвующего в \mathcal{P} , на $k + 2 - i$. Соответственно, маршруты, входящие в множество $W_{\text{dual } \mathcal{P}}$, «обратны» по отношению к маршрутам из множества $W_{\mathcal{P}}$. Разбиение $\text{rot}_h \mathcal{P}$ — циклический сдвиг \mathcal{P} на h позиций — образуется из \mathcal{P} путём замены каждого номера i , участвующего в \mathcal{P} , на $((i - 1 + h) \bmod k) + 1$. Маршруты из соответствующих множеств отличаются сдвигом на ту же величину h . Как двойственные разбиения, так и разбиения, отличающиеся сдвигом, определяют тождественно равнозначные множества маршрутов. Пусть f есть одно из преобразований rot_h или $\text{rot}_h \text{dual}$, в результате которого разбиение \mathcal{P} становится меньше, а \mathcal{Q} — новое разбиение, получаемое из \mathcal{P} по правилу (11), возможно, за несколько шагов. При переходе от \mathcal{P} к \mathcal{Q} как в исходном разбиении, так и в его образе при f сохраняются все старые элементы и добавляются несколько новых. В исходном разбиении новые элементы по построению больше старых, поэтому $\mathcal{Q} > \mathcal{P}$. Если и в образе новые элементы больше старых, то неравенство \mathcal{Q} и $f(\mathcal{Q})$ определяется старыми элементами, то есть $\mathcal{Q} > f(\mathcal{Q})$. Если же в образе какой-либо новый элемент оказывается меньше хотя бы одного из старых, то $f(\mathcal{P}) > f(\mathcal{Q})$. Вместе с $\mathcal{Q} > \mathcal{P} > f(\mathcal{P})$ это означает, что $\mathcal{Q} > f(\mathcal{Q})$. Таким образом свойство

$$\mathcal{P} \neq \min \left(\{\text{rot}_h \mathcal{P}\}_{h=0}^{k-1} \cup \{\text{rot}_h \text{dual } \mathcal{P}\}_{h=0}^{k-1} \right). \quad (12)$$

сохраняется при образовании новых разбиений по правилу (11) и, как только оно выполнилось, можно исключать из процесса перечисления разбиение \mathcal{P} и всех его «потомков». При этом будет рассматриваться по одному представителю из совокупности разбиений, указанной в (12). В формуле для количества циклов длиной k помимо коэффициента $a_{\mathcal{P}}$ необходимо учесть количество разбиений, которые получаются в результате сдвигов самого разбиения и двойственного к нему:

$$c_k = \sum b_{\mathcal{P}} |W_{\mathcal{P}}|, \quad \text{где } b_{\mathcal{P}} = a_{\mathcal{P}} \cdot \left| \{\text{rot}_h \mathcal{P}\}_{h=0}^{k-1} \cup \{\text{rot}_h \text{dual } \mathcal{P}\}_{h=0}^{k-1} \right|. \quad (13)$$

Суммирование выполняется по разбиениям, оставшимся в результате перечисления (11).

В разделе В описана работа алгоритма при выводе формулы c_6 . Вместо 466 возможных наборов пересечений рассматриваются только 27 разбиений, причём в результате остаются 12:

$$12 c_6 = |W_{\emptyset}| - 6|W_{\{13\}}| - 3|W_{\{14\}}| + 4|W_{\{135\}}| + 6|W_{\{13;24\}}| + 6|W_{\{13;25\}}| + 3|W_{\{13;46\}}| - 12|W_{\{13;246\}}| + 3|W_{\{14;25\}}| + 4|W_{\{135;246\}}| - 3|W_{\{13;25;46\}}| - |W_{\{14;25;36\}}|. \quad (14)$$

Двойственность и сдвиг не исчерпывают случаи равнозначности множеств маршрутов, поэтому количество слагаемых в (13) подлежит дальнейшему уменьшению путём явного сравнения разбиений. Сопоставим с допустимым разбиением \mathcal{P} граф $H_{\mathcal{P}}$. Вершинами этого графа являются элементы \mathcal{P} и одноэлементные множества, составленные из номеров, не участвующих в \mathcal{P} . Пара множеств соединяется ребром, если эти множества содержат соседние номера

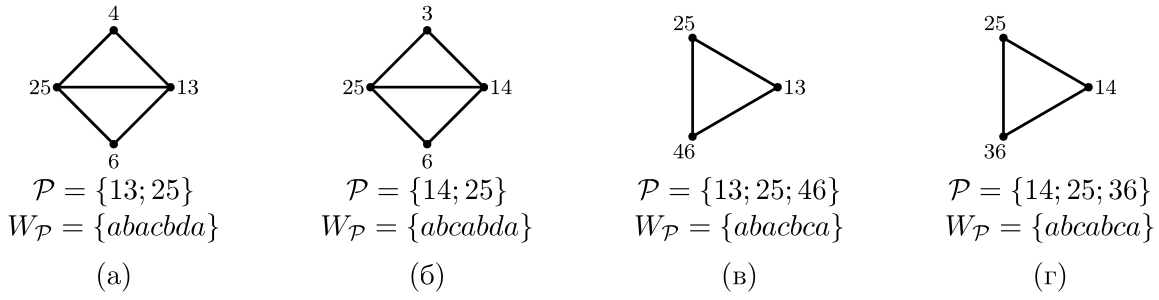


Рис. 1. Примеры разбиений \mathcal{P} для случая $k = 6$, задающих равномошные множества маршрутов $W_{\mathcal{P}}$: $|W_{\{13;25\}}| \equiv |W_{\{14;25\}}|$ (а,б) и $|W_{\{13;25;46\}}| \equiv |W_{\{14;25;36\}}|$ (в,г)

i и $i + 1$ или элементом одного является k , а другое содержит 1. На рисунке 1 представлены несколько примеров для $k = 6$. Пусть графы $H_{\mathcal{P}}$ и $H_{\mathcal{Q}}$ изоморфны, а f — изоморфизм $H_{\mathcal{P}}$ на $H_{\mathcal{Q}}$. Обозначим вершины графов $H_{\mathcal{P}}$ и $H_{\mathcal{Q}}$ соответственно I_1, I_2, \dots, I_l и J_1, J_2, \dots, J_l . Любой маршрут w из множества $W_{\mathcal{P}}$ (как и $W_{\mathcal{Q}}$) содержит не более l различных вершин v_1, v_2, \dots, v_l , находящихся в позициях с номерами из множеств I_1, I_2, \dots, I_l (рисунок 1). Образует новую последовательность вершин w' , поместив вершины v_1, v_2, \dots, v_l в позиции с номерами из множеств $f(I_1), f(I_2), \dots, f(I_l)$ и в $(k + 1)$ -позицию — ту же вершину, что в первую позицию. Ввиду изоморфизма графов $H_{\mathcal{P}}$ и $H_{\mathcal{Q}}$ последовательность w' является маршрутом (проходит по тем же рёбрам, что w) и, следовательно, является элементом множества $W_{\mathcal{Q}}$. Например, в случае $\mathcal{P} = \{13; 25\}$ и $\mathcal{Q} = \{14; 25\}$ (рисунок 1 (а,б)) указанное построение сводится к перестановке третьей и четвёртой вершин маршрута. Отображение $w \mapsto w'$ является биекцией множества маршрутов $W_{\mathcal{P}}$ на множество $W_{\mathcal{Q}}$. Таким образом, при изоморфных графах $H_{\mathcal{P}}$ и $H_{\mathcal{Q}}$ множества $W_{\mathcal{P}}$ и $W_{\mathcal{Q}}$ тождественно равномошны.

Путём проверки изоморфизма графов $H_{\mathcal{P}}$ для выведенной формулы (14) обнаруживаются две пары равномошных множеств маршрутов. Они представлены на рисунке 1. В каждой из этих пар разбиения не являются двойственными и не получаются друг из друга сдвигом. После их группировки выражение принимает следующий вид:

$$12 c_6 = |W_{\emptyset}| - 6|W_{\{13\}}| - 3|W_{\{14\}}| + 4|W_{\{135\}}| + 6|W_{\{13;24\}}| + 9|W_{\{13;25\}}| + 3|W_{\{13;46\}}| - 12|W_{\{13;246\}}| + 4|W_{\{135;246\}}| - 4|W_{\{13;25;46\}}|.$$

Далее каждая величина $|W_{\mathcal{P}}|$ записывается с помощью элементов a_{ij} матрицы смежности графа, в котором подсчитываются циклы. Общий вид выражения удобно описать посредством графа $H_{\mathcal{P}} = (\{I_1; I_2; \dots; I_l\}; E)$:

$$|W_{\mathcal{P}}| = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \prod_{\{I_u; I_v\} \in E} a_{i_u i_v}.$$

Здесь n — порядок графа, в котором подсчитываются циклы. После упрощения кратных сумм получается следующая формула для подсчёта циклов длиной 6 в произвольном графе:

$$c_6 = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(6)} - 6 \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(4)} d_i - 3 \sum_{i=1}^n (a_{ii}^{(3)})^2 + 4 \sum_{i=1}^n d_i^3 + 6 \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(4)} + 9 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}^{(2)})^2 a_{ij} + 3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(3)} - 12 \sum_{i=1}^n d_i^2 + 4 \sum_{i=1}^n d_i - 4 \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)} \right). \tag{15}$$

Упрощение кратных сумм, соответствующих множествам маршрутов, подробно обсуждается в разделе 5.

3.4. Вычислительные эксперименты

В системе компьютерной алгебры Maple 13 были реализованы по три алгоритма вывода формул для матриц R_k и величин c_k . Первый алгоритм состоит в перечислении всех наборов пересечений и выводе матричных выражений для непротиворечивых наборов, задающих неравные множества маршрутов. Во втором и третьем алгоритмах осуществляется перечисление допустимых разбиений с учётом двойственности и, в случае циклов, сдвига. После этого во втором алгоритме сразу выводятся матричные выражения, а в третьем предварительно выполняется проверка изоморфизма графов $H_{\mathcal{P}}$ и группировка разбиений, соответствующих изоморфным графам.

Количество слагаемых, которое дают первые два алгоритма, (раздел А, таблицы 4 и 6) сильно зависит от процедуры вывода матричных выражений. В наилучшем случае эта процедура должна выводить одну и ту же формулу для наборов пересечений или разбиений, определяющих равнозначные множества маршрутов. Тогда будет достигаться наименьшее количество слагаемых, указанное в предпоследних строках таблиц 4 и 6. В строке «Перечисление» указано количество разбиений в результате перечисления в алгоритмах 2 и 3. В таблице 4 при $k = 3, 4, 5, 6$ число слагаемых оказывается больше количества разбиений из-за того, что в перечислении участвует по одному из разных двойственных разбиений, а в формулах представлены оба. Этим же объясняется выигрыш в количестве слагаемых у алгоритма 1 по сравнению с алгоритмом 2 при $k = 7, 8$, так как в первом случае все наборы пересечений обрабатываются отдельно, а во втором случае матричное выражение для двойственного разбиения выводится из выражения для исходного разбиения.

Третий алгоритм обеспечивает наименьшее количество слагаемых за счёт явной проверки изоморфизма графов $H_{\mathcal{P}}$, которая занимает большую часть времени (раздел А, таблицы 5 и 7). Для алгоритма 3 в скобках приводится время вывода матричных выражений. В строке «Перечисление» указано время перечисления разбиений в алгоритмах 2 и 3. С другой стороны, в третьем алгоритме уходит меньше времени на составление самой формулы. Во-первых, матричные выражения выводятся для меньшего количества разбиений, а во-вторых, вся формула оказывается меньше. Например, в случае c_{13} в третьем алгоритме на 2444 слагаемых ушло 11 секунд, а во втором алгоритме на 141772 слагаемых ($\times 58$) — 1074 секунды ($\times 98$).

При выводе формул для матриц R_k учитывается фиксированность начальных и конечных вершин маршрутов, из-за чего, в частности, неприменимо понятие сдвига. В результате большее количество разбиений проверяется на изоморфизм и сама проверка даёт меньший эффект, чем в случае формул для количества циклов. Кроме того, сравнивая работу алгоритмов в случаях R_k и c_k , длину циклов следует брать на единицу больше длины открытых маршрутов.

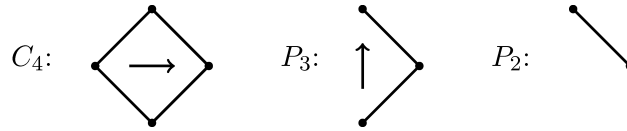
4. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОДХОДА ХАРАРИ И МАНВЕЛА

4.1. Известные результаты

В [27] выведены следующие формулы для величин c_3 , c_4 и c_5 :

$$c_3 = \frac{1}{6} \operatorname{tr}(A^3), \quad c_4 = \frac{1}{8} \left(\operatorname{tr}(A^4) - 2m - 2 \sum_{i \neq j} a_{ij}^{(2)} \right), \tag{16}$$

$$c_5 = \frac{1}{10} \left(\operatorname{tr}(A^5) - 5 \operatorname{tr}(A^3) - 5 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} - 2 \right) a_{ii}^{(3)} \right). \tag{17}$$

Рис. 2. C_4 -графы (стрелками указано «отождествление» вершин)

В каждом случае из общего числа $\text{tr}(A^k)$ замкнутых маршрутов длиной k вычитается количество замкнутых маршрутов, не являющихся простыми циклами длиной k . Например, вычитаемое $2m$ есть количество маршрутов вида $(u; v; u; v; u)$.

Общая структура выражений описана в [35]:

$$c_k = \beta(C_k) = \frac{1}{2k} \left(\text{tr}(A^k) - \sum_H \gamma_k(H) \beta(H) \right). \quad (18)$$

Здесь $\beta(H)$ — количество подграфов графа, в котором подсчитываются циклы, изоморфных H . Определение графов H , по которым выполняется суммирование, и коэффициентов $\gamma_k(H)$ связано с понятием гомоморфизма. Авторы [35] называют гомоморфизмом отображение $f: V_1 \cup E_1 \rightarrow V_2 \cup E_2$ для графов $G_1 = (V_1; E_1)$ и $G_2 = (V_2; E_2)$, такое что

$$f(V_1) \subset V_2 \quad \text{и} \quad \forall \{u; v\} \in E_1 \quad f(e) = \{f(u); f(v)\} \in E_2.$$

Если отображение f сюръективно, граф G_2 называется гомоморфным образом графа G_1 . Иначе говоря, гомоморфные образы графа G , которые будем называть G -графами и рассматривать с точностью до изоморфизма, получаются в результате «отождествления» двух несмежных вершин или в результате ряда таких операций. Например, существует единственный C_3 -граф — сам граф C_3 . C_4 -графов и C_5 -графов уже насчитывается по три — рисунки 2 и 3. В формуле (18) H пробегает все C_k -графы за исключением самого C_k , а $\gamma_k(H)$ обозначает количество гомоморфизмов C_k на H . Например, $\gamma_k(C_k) = 2k$, $\gamma_4(P_3) = 4$, $\gamma_4(P_2) = 2$, $\gamma_3(P_3) = \gamma_3(P_2) = 0$. В другой интерпретации, $\gamma_k(H)$ есть количество замкнутых маршрутов длиной k в графе H (с учётом начала и направления), проходящих по всем его рёбрам (обычно более одного раза).

Для случаев $k = 6, 7$ авторы [27] только перечислили C_k -графы, упустив один из C_7 -графов. При $k = 6$ таких графов 10 (рисунок 4), а при $k = 7$ их 12. В [35], помимо этого, выражены величины $\beta(H)$ через матрицу смежности графа. Значения коэффициентов $\gamma_k(H)$ авторы не представили. Для величины c_6 полный вывод формулы представлен в [28]. Во всех упомянутых работах не описываются систематические способы вывода выражений типа (16) и (17), без которых дальнейшее продолжение результатов затруднительно. Проблема включает три пункта: перечисление всех C_k -графов, выражение величин $\beta(H)$ через матрицу смежности и вычисление коэффициентов $\gamma_k(H)$. В следующем подразделе предложено обобщение формулы (18), на основе которого удаётся автоматизировать решение указанных задач.

4.2. Вычислительная схема

Соотнесём с графом $G = (V; E)$, где $V = \{1; 2; \dots; l\}$, величину $\alpha(G)$, определяемую следующим равенством:

$$\alpha(G) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \prod_{\{u; v\} \in E} a_{i_u i_v}, \quad (19)$$

где a_{ij} — элементы матрицы смежности графа, в котором подсчитываются циклы. Например,

$$\alpha(C_k) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1} = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(k)} = \text{tr}(A^k). \quad (20)$$

Тогда имеет место соотношение, аналогичное (18):

$$\beta(G) = \frac{1}{\gamma_G(G)} \left(\alpha(G) - \sum_H \gamma_G(H) \beta(H) \right), \quad (21)$$

где суммирование выполняется по всем G -графам, отличным от G , а $\gamma_G(H)$ обозначает количество гомоморфизмов G на H .

Таким образом задача выражения величины $\beta(G)$ для произвольного графа G , в частности C_k и всех C_k -графов, сводится к аналогичной задаче для всех G -графов, отличных от G . Порядки последних, по крайней мере, на единицу меньше порядка графа G , поэтому последовательность задач оказывается конечной. В итоге количество $c_k = \beta(C_k)$ циклов длиной k выражается в виде линейной комбинации величин $\alpha(G)$ с рациональными коэффициентами, где G пробегает все C_k -графы кроме C_k .

Из определения гомоморфизма следует, что для любого G -графа H все H -графы являются и G -графами, поэтому для построения всех G -графов применима следующая схема. Вначале «отождествляется» по одной паре несмежных вершин графа G , в результате чего образуются G -графы, имеющие на одну вершину меньше, чем G . Затем эта же процедура применяется к каждому из полученных графов, что даёт G -графы, имеющие на две вершины меньше, чем G , и т. д. (рисунки 2, 3 и 4). Построенная в итоге иерархия позволяет выделить набор H -графов для любого G -графа H .

Предположим, что выведены выражения величин $\beta(H)$ для всех G -графов H , отличных от G . Тогда коэффициенты $\gamma_G(H)$ в формуле для $\beta(G)$ находятся методом неопределённых коэффициентов. При этом выражение (21) удобно приложить к самим G -графам, предварительно упорядочив их по невозрастанию пары (количество вершин; количество рёбер): H_1, H_2, \dots, H_l ($H_1 = G$). Подставив в формулу (21) граф H_l , получим значение коэффициента $\gamma_G(H_l)$, так как $\beta(H_l)|_{H_l} = 1$, а для любого $i < l$ $\beta(H_i)|_{H_l} = 0$ (граф H_l — «самый маленький»):

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(G)|_{H_l} = \frac{1}{\gamma_G(G)} \left(\alpha(G) - \sum_{i=2}^l \gamma_G(H_i) \beta(H_i) \right) \Big|_{H_l} \\ &= \frac{1}{\gamma_G(G)} (\alpha(G)|_{H_l} - \gamma_G(H_l)) \implies \gamma_G(H_l) = \alpha(G)|_{H_l}. \end{aligned}$$

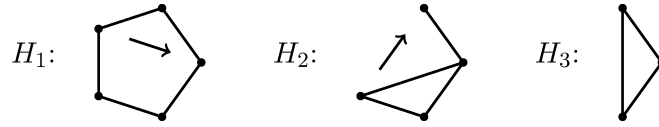
Аналогично вычисляются остальные коэффициенты $\gamma_G(H_i)$ в порядке убывания значения i . В случае $i = 1$ имеется отличие: $\beta(G)|_{H_1}$ равно единице, а не нулю. В общем виде уравнение имеет вид

$$\gamma_G(H_i) = \left(\alpha(G) - \sum_{j=i+1}^l \gamma_G(H_j) \beta(H_j) \right) \Big|_{H_i}, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (22)$$

Для своевременного вывода выражений $\beta(H)$ следует начинать с графов H меньших порядков, а при равных порядках — с графов, имеющих меньшее количество рёбер.

4.3. Вывод формул c_5 и c_6

Рассмотрим вывод формулы для величины c_5 в случае произвольного графа согласно предложенной выше схемы. На рисунке 3 представлены C_5 -графы: имеется по одному графу с 5, 4 и 3 вершинами.

Рис. 3. C_5 -графы (стрелками указано «отождествление» вершин)

Выведем выражение $\beta(H_3)$. Согласно (21)

$$\beta(H_3) = \frac{1}{\gamma_{H_3}(H_3)} \cdot \alpha(H_3).$$

По определению (19)

$$\alpha(H_3) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} a_{i_3 i_1} = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)}.$$

Значение $\gamma_{H_3}(H_3)$ вычисляем по правилу (22):

$$\gamma_{H_3}(H_3) = \alpha(H_3)|_{H_3} = 6.$$

Окончательно

$$\beta(H_3) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)}.$$

Для графа H_2 формулы (21) и (19) принимают следующий вид:

$$\beta(H_2) = \frac{1}{\gamma_{H_2}(H_2)} (\alpha(H_2) - \gamma_{H_2}(H_3) \beta(H_3)), \quad \alpha(H_2) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)} d_i.$$

Найдём коэффициенты $\gamma_{H_2}(H_3)$ и $\gamma_{H_2}(H_2)$, используя соотношение (22).

$$\begin{aligned} \gamma_{H_2}(H_3) &= \alpha(H_2)|_{H_3} = 12, \\ \gamma_{H_2}(H_2) &= (\alpha(H_2) - \gamma_{H_2}(H_3) \beta(H_3))|_{H_2} = 14 - 12 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\beta(H_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)} d_i - \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)}.$$

Аналогичные шаги выполняются при выводе выражения для величины $c_5 = \beta(H_1)$.

$$\begin{aligned} \alpha(H_1) &= \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(5)}, \\ \gamma_{H_1}(H_3) &= \alpha(H_1)|_{H_3} = 30, \\ \gamma_{H_1}(H_2) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_3) \beta(H_3))|_{H_2} = 40 - 30 \cdot 1 = 10, \\ \gamma_{H_1}(H_1) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_2) \beta(H_2) - \gamma_{H_1}(H_3) \beta(H_3))|_{H_1} = 10 - 0 - 0 = 10, \\ \beta(H_1) &= \frac{1}{10} (\alpha(H_1) - 10 \beta(H_2) - 30 \beta(H_3)) = \frac{1}{10} (\alpha(H_1) - 5 \alpha(H_2) + 5 \alpha(H_3)) \\ &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(5)} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)} d_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)}. \end{aligned}$$

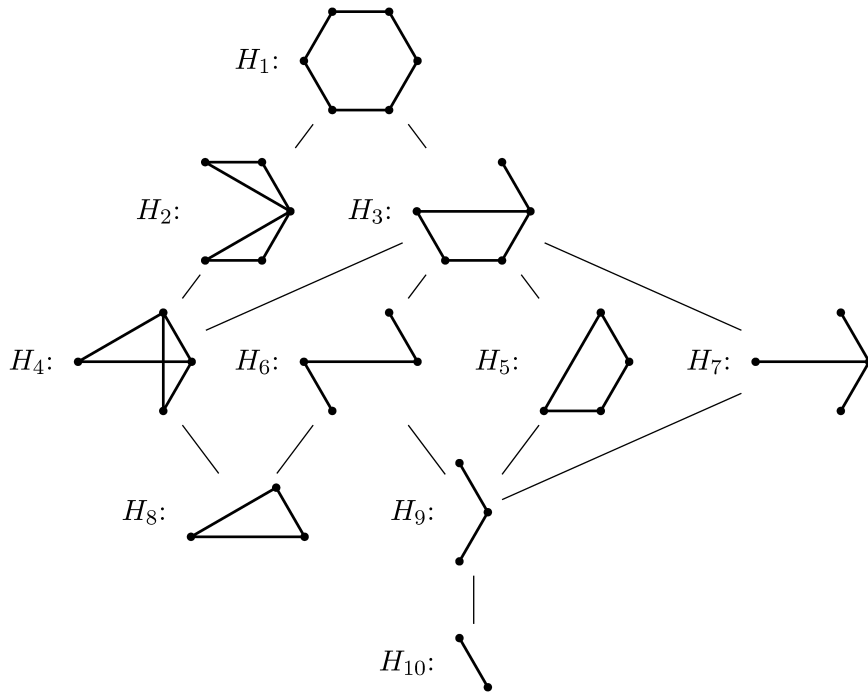


Рис. 4. C_6 -графы. Каждый уровень содержит графы одного порядка. Линии соединяют граф H_i и H_j -графы, имеющие на одну вершину меньше, чем H_i .

При выводе формулы для величины c_6 требуется существенно больше вычислений. На рисунке 4 изображены C_6 -графы. Следуя алгоритму, представленному в разделе 4.2, последовательно выводятся выражения для величин $\beta(H_{10}), \beta(H_9), \dots, \beta(H_1) = c_6$. Выкладки помещены в раздел С. Итоговая формула уже приводилась ранее — (15). Согласно нумерации графов H_i слагаемые в записи (15) располагаются в порядке 1, 3, 2, 7, 5, 4, 6, 9, 10, 8. Упрощение кратных сумм, соответствующих множествам маршрутов, подробно обсуждается в разделе 5. Выражение для c_6 , выведенное в [28] (также на основе подхода Харари и Манвела) формально эквивалентно (15), однако в нём используется суммирование при условии $i \neq j$ и члены сумм содержат вычитание. Если перейти к суммам с независимыми индексами, раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то получится запись (15).

4.4. Вычислительные эксперименты

Описанный выше метод состоит из трёх частей: перечисление всех C_k -графов, выражение величин $\alpha(H)$ через матрицу смежности и вычисление коэффициентов $\gamma_G(H)$, где G и H — C_k -графы. Соответствующие процедуры были реализованы в системе компьютерной алгебры Maple 13.

Для перечисления всех C_k -графов можно использовать модифицированный метод Росса и Харари, описанный в разделе 3. Рассматриваемые в нём графы $H_{\mathcal{P}}$ для допустимых разбиений \mathcal{P} являются C_k -графами, и наоборот, для любого C_k -графа найдётся изоморфный ему граф $H_{\mathcal{P}}$. Если вершины C_k занумеровать в порядке следования числами $1, 2, \dots, k$, то гомоморфизм C_k на $H_{\mathcal{P}}$ устанавливается по правилу: $i \mapsto I$, где $I \ni i$. Таким образом в указанном методе также участвует множество всех C_k -графов. Однако перечисление разбиений \mathcal{P} сопряжено с вычислением коэффициентов $b_{\mathcal{P}}$ (7). Если об этой информации не заботиться, то удаётся более эффективно сгенерировать только множество C_k -графов. В частности, исключение изоморф-

ных графов можно выполнять в ходе самой генерации. В таблице 2 указано время работы соответствующей процедуры.

Таблица 2. Вывод формул c_k на основе подхода Харари и Манвела в системе Maple 13

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Количество C_k -графов	10	12	35	58	160	341	958	2444	7242	21190
Время (с.) генерации C_k -графов	0	0	0,1	0,3	1,2	4,7	29	197	1876	20033
Время (с.) вычисления $\gamma_G(H)$	0,1	0,1	1	2,6	19	123	2698	47044		

Вычисление коэффициентов $\gamma_G(H)$ на основе матричных выражений, напротив, осуществляется медленнее, чем расчёт величин $b_{\mathcal{P}}$ в ходе генерации разбиений \mathcal{P} . За счёт этого реализация алгоритма, описанного в данном разделе, в целом, уступает по эффективности реализации модифицированного метода Росса и Харари (таблица 7, алгоритм 3).

5. ВИД ФОРМУЛ

Формулы для количества циклов длиной k , которые выводятся с помощью представленных способов, являются суммами величин $\alpha(G)$, для всех C_k -графов G , умноженных на рациональные коэффициенты. Исходной записью $\alpha(G)$ является сумма (19), кратность которой равна порядку графа G . За счёт введения вспомогательных матриц и векторов для исключения некоторых индексов суммирования кратность суммы может быть уменьшена (например, (20)). Исключение индекса представляется возможным, если он встречается в парах не более чем с двумя другими индексами.

Рассмотрим случай двух индексов. Пусть в общем члене суммы (19) индекс k встречается в парах только с индексами i и j . Обозначим p_{ijk} произведение всех множителей этого члена, в которых участвует индекс k . Тогда кратность суммы понижается на единицу за счёт введения вспомогательной матрицы $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ijk}$:

$$\sum \sum_{k=1}^n \dots \cdot p_{ijk} = \sum \dots \cdot b_{ij}.$$

Символом \sum обозначено суммирование по всем индексам кроме k , а многоточием — часть общего члена суммы, в которую не входит индекс k .

В случае, когда индекс k встречается в парах с единственным индексом i , аналогично вводится вектор $b = (b_i)$, где $b_i = \sum_{k=1}^n p_{ik}$:

$$\sum \sum_{k=1}^n \dots \cdot p_{ik} = \sum \dots \cdot b_i.$$

Суммирование по каждому индексу выполняется в диапазоне от 1 до n , поэтому далее в примерах пределы суммирования опускаются.

При длине цикла не более 7 использование степеней матрицы смежности позволяет понизить кратность всех сумм до одного или двух. Например, для одного из C_7 -графов,

$$\begin{aligned} \alpha \left(\begin{array}{c} i_3 \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ i_4 \quad i_5 \end{array} \begin{array}{c} i_2 \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ i_1 \end{array} \right) &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_5} a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_3} a_{i_1 i_5} a_{i_3 i_4} a_{i_3 i_5} \\ &= \sum_{i_1} \sum_{i_3} \left(\sum_{i_2} a_{i_1 i_2} \right) a_{i_1 i_3} \left(\sum_{i_5} a_{i_1 i_5} a_{i_5 i_3} \right) \left(\sum_{i_4} a_{i_3 i_4} \right) = \sum_i \sum_j d_i a_{ij} a_{ij}^{(2)} d_j. \end{aligned} \tag{23}$$

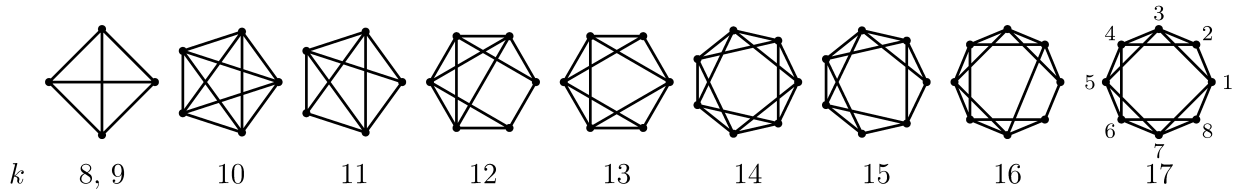


Рис. 5. Примеры C_k -графов, приводящих к суммам наибольшей кратности $[k/2]$

Наиболее трудоёмкой операцией в выражениях для c_3, \dots, c_7 после таких преобразований оказывается возведение матрицы смежности в степень.

В случае длины 8 почти все суммы (32 из 35) при использовании степеней матрицы смежности также приобретают кратность один или два. Имеются два C_8 -графа, для которых использование только степеней матрицы смежности приводит к тройным суммам, однако с помощью других матриц достигается и двойная кратность:

$$\alpha \left(\begin{array}{c} k \\ \text{Graph} \\ i \end{array} \right) = \sum_i \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ik} a_{jk} a_{ik}^{(2)} a_{jk}^{(2)} = \sum_i \sum_j a_{ij} ((A \times A^2)^2)_{ij}, \tag{24}$$

$$\alpha \left(\begin{array}{c} k \\ \text{Graph} \\ i \end{array} \right) = \sum_i \sum_j \sum_k a_{ij} a_{ij}^{(2)} a_{ik} a_{jk} d_k = \sum_i \sum_j a_{ij} a_{ij}^{(2)} (A \cdot d(A^2) \cdot A)_{ij}. \tag{25}$$

С помощью операций « \cdot », « \times », « d » и « tr » в выражениях для c_3, \dots, c_7 (вообще, если кратность сумм не превышает три) можно избавиться от знаков суммирования. При такой записи формул вычислительно наиболее трудной операцией оказывается умножение матриц.

Оставшийся C_8 -граф K_4 приводит к четырёхкратной сумме. В общем члене исходного выражения $\alpha(K_4)$ каждый индекс встречается в парах с тремя другими, поэтому не удаётся исключить какой-либо индекс за счёт введения вспомогательной матрицы.

Выясним, насколько велико может быть количество «неисключаемых» индексов в исходной сумме (19) для произвольного значения длины цикла $k \geq 8$. Представляют интерес именно исходные суммы, так как в результате их упрощения согласно описанных выше правил количество «неисключаемых» индексов не увеличивается. Количество индексов, с которыми индекс i_v встречается в парах в (19), есть степень d_v вершины v в графе $G = (V; E)$. Следовательно требуется оценить наибольшее количество вершин графа G степенью не менее трёх. Пусть f — гомоморфизм C_k на G . Тогда

$$\sum_{v \in V} |f^{-1}(v)| = k. \tag{26}$$

В случае $d_v \geq 3$ имеем $|f^{-1}(v)| \geq 2$, поэтому количество вершин степенью три или более не превышает $[k/2]$. Примеры графов, на которых это значение достигается, представлены на рисунке 5. Убедиться, что перечисленные графы являются гомоморфными образами C_k , нетрудно, построив замкнутые маршруты длиной k , проходящие по всем рёбрам. Например, для $k = 17$ это $(1; 2; \dots; 8; 1; 3; 5; 7; 1; 2; 4; 6; 8; 1)$. Начиная от $k = 10$ с шагом 4 структура графов повторяется. Существенно, что степени всех вершин в этих графах не менее трёх, то есть кратности соответствующих сумм не уменьшаются (с помощью описанных выше правил), как, например, в (23), (24) и (25). Проведённые рассуждения позволяют сделать вывод, что наибольшая кратность суммы в формуле для количества циклов длиной $k \geq 8$ после упрощения равна $[k/2]$.

Вычислительная сложность формул для небольших значений длины цикла определяется плотными C_k -графами, в частности, полными, например: K_4 при $k = 8, 9$, K_5 при $k = 10$,

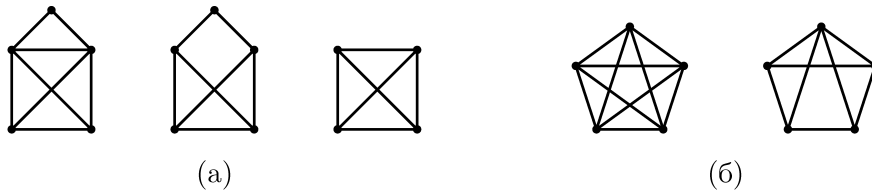


Рис. 6. Все C_9 -графы, приводящие к четырёхкратным суммам, (а) и все C_{10} -графы, приводящие к пятикратным суммам, (б)

($K_5 - e$) при $k = 11$. В общем случае такая ситуация нетипична. Характерным свойством «наиболее трудных» C_k -графов является наличие $\lfloor k/2 \rfloor$ вершин степени 3–4 (рисунок 5). В силу соотношения (26) при чётном k других вершин нет, а при нечётном допускается ещё одна вершина степенью менее трёх или равенство одной из степеней 5–6 (тогда других вершин нет) (рисунок 6).

С ростом длины цикла увеличивается не только наибольшая кратность суммы, но и количество сумм высокой кратности (таблица 3). Строки кроме последней соответствуют кратностям

Таблица 3. Распределение количества слагаемых в формулах по кратностям сумм не менее 4

	c_8	c_9	c_{10}		c_{11}		c_{12}		c_{13}		c_{14}		c_{15}	
4	1	3	15	11	60	34	239	118	802	383	2624	1312	7707	4402
5			2	2	9	6	56	29	289	118	1361	491	5662	1952
6							6	6	37	27	291	168	1782	854
7											14	14	162	119
все	35	58	160		341		958		2444		7242		21190	

сумм. В последней строке указано общее количество слагаемых в формулах. В случаях $k \geq 10$ за счёт вспомогательных матриц с использованием операций « \cdot », « \times » и « d » удастся понизить кратность многих сумм. Соответствующее количество слагаемых указано в правых столбцах. Левые столбцы относятся к случаю, когда используются только степени матрицы смежности.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены два способа вывода явных формул для подсчёта циклов фиксированной длины в неориентированных графах. Общим узким местом реализаций обоих способов является проверка изоморфизма при исключении изоморфных C_k -графов. В программе, основанной на подходе Харари и Манвела, ещё более трудоёмкой оказалась процедура вычисления коэффициентов в формулах. За счёт этого указанная программа уступает в производительности реализации модифицированного метода Росса и Харари.

Область применения рассмотренных подходов не ограничивается случаем произвольных графов. При выводе формул удастся учитывать различные свойства графов, например, двудольность и обхват [29, 26, 33], в результате чего получаются более эффективные частные формулы. В этом аспекте подход Харари и Манвела обладает большими возможностями по сравнению с методом Росса и Харари. Данный вопрос предполагается обсудить в будущих работах.

Возможны различные пути совершенствования алгоритмов и формул, которые они выводят. Направления дальнейшего исследования перечислены в следующем списке.

1. Исследование формул для частных семейств графов. Представляет интерес как вывод самих выражений для подсчёта циклов с учётом свойств, так и оценка зависимости их сложности от длины цикла. При выводе формул можно использовать множества всех C_k -графов,

сгенерированные ранее для вывода общих выражений. Если же удастся учесть свойства графов в ходе генерации C_k -графов, то возможно продвижение по длине цикла. Оценка вычислительной сложности формул связана с выявлением C_k -графов, которые вносят в выражения суммы с наибольшей кратностью. Важно выяснить зависимость этой кратности от длины цикла.

2. Оптимизация алгоритмов и их реализаций. Наиболее узкими местами алгоритмов являются проверка изоморфизма C_k -графов и вычисление коэффициентов в выражении. В настоящих реализациях не учитывается специфика семейств C_k -графов. Например, при чётном k в это семейство входят все деревья порядка не более $k/2 + 1$, генерацию которых можно выполнять отдельно. Коэффициенты в формулах напрямую связаны с количеством гомоморфизмов C_k -графов друг на друга. Эффективность вычисления этих величин в данной работе не исследовалась. Ещё одно возможное направление ускорить работу программ — создать бинарные реализации.
3. Оптимизация формул.
 - Улучшение оценки сложности. Для подсчёта циклов длиной 8 авторы [35] указали оценку $O(n \cdot r(n))$, где $r(n)$ — сложность умножения $n \times n$ -матриц, тогда как алгоритм, предложенный в данной работе, выводит формулу, имеющую сложность $O(n^4)$. Представляет интерес обобщение способа, указанного в [35], для больших значений длины цикла. Также не исследовался вопрос, насколько ниже может оказаться порядок сложности при затратах памяти, кубических относительно количества вершин в графе.
 - Оптимизация кода. Существуют различные способы оптимизировать вычисление выражений: группировка слагаемых для вынесения общих множителей, «обход» нулевых слагаемых с помощью условных инструкций, использование побитовых операций и по возможности «коротких» типов данных.
4. Расширение функциональности и обобщение алгоритмов.
 - Автоматическая оптимизация формул. Способы оптимизации, указанные в предыдущем пункте, вручную апробировались в [31, 30]. Ввиду громоздкости выражений следует автоматизировать эту работу.
 - Оценка вычислительной сложности формул. Проверка изоморфизма, выполняемая при генерации C_k -графов, не требуется для выявления конфигураций, подсчёт которых представляет наибольшую сложность. Возможно, соответствующая модификация алгоритма позволит дальше продвинуться по длине цикла и выяснить зависимость вычислительной сложности формул для разных классов графов от значения длины.
 - Вывод явных формул для подсчёта подграфов, изоморфных данному графу G . Предложенный алгоритм вывода формул для количества циклов длиной k на основе подхода Харари и Манвела выполняет эту функцию, если заменить множество C_k -графов на множество G -графов. Кроме того, при выводе выражения для подсчёта подграфов, изоморфных G , попутно выводятся выражения для подсчёта подграфов, изоморфных другим G -графам. Это позволяет выдавать вместо одной формулы набор взаимосвязанных формул той же сложности, с помощью которого подсчитывается статистика по всем G -графам.

А. ВЫВОД ФОРМУЛ R_k И c_k НА ОСНОВЕ МЕТОДА РОССА И ХАРАРИ**Таблица 4.** Количество слагаемых в формулах для матриц R_k

k	3	4	5	6	7	8	9	10
Алгоритм 1	3	9	32	101	351	1278		
Алгоритм 2	3	9	32	101	354	1327	5378	23944
Алгоритм 3	3	9	32	101	348	1225	4555	17475
Перечисление	2	6	24	88	378	1756	8985	49411

Таблица 5. Время (с.) вывода формул для матриц R_k

k	6	7	8	9	10
Алгоритм 1	0,3	38	2175		
Алгоритм 2	0,1	0,7	4,4	27	216
Алгоритм 3	0,1(0,1)	0,6(0,3)	4,1(1,2)	48(5,3)	1042(25)
Перечисление	0	0,1	0,5	2,6	20

Таблица 6. Количество слагаемых в формулах для величин c_k

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Алгоритм 1	1	4	6	20	43	137					
Алгоритм 2	1	3	3	10	16	55	120	443	1635	7643	38401
Алгоритм 3	1	3	3	10	12	35	58	160	341	958	2444
Перечисление	1	3	3	12	20	81	238	1079	4752	25421	141772

В. ДЕТАЛИ ВЫВОДА ФОРМУЛЫ c_6 НА ОСНОВЕ МЕТОДА РОССА И ХАРАРИ

1. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 = \emptyset$, $b_0 = 1$.

- (a) $\mathcal{P} \cup \{13\} = \{13\}$. Путём сдвига получают разбиения $\{24\}$, $\{35\}$, $\{46\}$, $\{15\}$ (двойственное) и $\{26\}$. $\{13\}$ оказывается наименьшим, поэтому полагаем $\mathcal{P}_1 = \{13\}$. $b_1 = -6$.
- (b) $\mathcal{P} \cup \{14\} = \{14\}$. Разбиение самодвойственно. В результате сдвига образуются $\{25\}$ и $\{36\}$. $\{14\}$ является наименьшим, следовательно полагаем $\mathcal{P}_2 = \{14\}$. $b_2 = -3$.
- (c) $\mathcal{P} \cup \{15\} = \{15\}$. Двойственное разбиение $\{13\}$ меньше, поэтому разбиение $\{15\}$ далее не рассматривается.
- (d) $\mathcal{P} \cup \{135\} = \{135\}$. Разбиение самодвойственно. Сдвиг даёт разбиение $\{246\}$.
 $\mathcal{P}_3 = \{135\}$, $b_3 = 4$.
- (e) $\mathcal{P} \cup \{I\}$, $I = 24, 25, 26, 35, 246$. Разбиение получается в результате сдвига меньшего разбиения, поэтому исключается из рассмотрения.
- (f) $\mathcal{P} \cup \{I\}$, $I = 36, 46$. Разбиение больше двойственного.

2. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{13\}$.

- (a) $\mathcal{P} \cup \{I\}$, $I = 24, 25$. Путём сдвига образуются 5 новых разбиений, включая двойственное. Исходное разбиение является наименьшим. $\mathcal{P}_4 = \{13; 24\}$, $b_4 = 6$; $\mathcal{P}_5 = \{13; 25\}$, $b_5 = 6$.
- (b) $\mathcal{P} \cup \{26\}$. Получается в результате сдвига меньшего разбиения.
- (c) $\mathcal{P} \cup \{46\}$. Сдвиг даёт 2 новых разбиения, включая двойственное. Исходное оказывается наименьшим. $\mathcal{P}_6 = \{13; 46\}$, $b_6 = 3$.

Таблица 7. Время (с.) вывода формул для величин c_k

k	7	8	9	10	11	12	13
Алгоритм 1	0,4	39					
Алгоритм 2	0	0,2	1	4,9	25	164	1486
Алгоритм 3	0(0)	0,2(0,1)	0,7(0,1)	3,5(0,3)	22(0,9)	257(3,1)	5768(11)
Перечисление	0	0,1	0,4	2	10	60	412

- (d) $\mathcal{P} \cup \{246\}$. Как в предыдущем случае, но с 5 новыми разбиениями.
 $\mathcal{P}_7 = \{13; 246\}$, $b_7 = -12$.
3. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{14\}$.
- (a) $\mathcal{P} \cup \{25\}$. Путём сдвига образуются 2 новых разбиения, включая двойственное. Оба больше исходного. $\mathcal{P}_8 = \{14; 25\}$, $b_8 = 3$.
- (b) $\mathcal{P} \cup \{I\}$, $I = 26, 35$. Получается в результате сдвига меньшего разбиения.
- (c) $\mathcal{P} \cup \{36\}$. Больше двойственного.
4. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_3 = \{135\}$.
- (a) $\mathcal{P} \cup \{I\}$, $I = 24, 26$. Сдвиг даёт меньшее разбиение.
- (b) $\mathcal{P} \cup \{46\}$. Больше двойственного.
- (c) $\mathcal{P} \cup \{246\}$. Самодвойственно и инвариантно относительно сдвига. $\mathcal{P}_9 = \{135; 246\}$, $b_9 = 4$.
5. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_4 = \{13; 24\}$. Не порождает новых разбиений.
6. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_5 = \{13; 25\}$.
- (a) $\mathcal{P} \cup \{46\}$. Путём сдвига образуются 2 новых разбиения, включая двойственное, которые больше исходного. $\mathcal{P}_{10} = \{13; 25; 46\}$, $b_{10} = -3$.
7. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_6, \mathcal{P}_7$. Новые разбиения не генерируются.
8. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_8 = \{14; 25\}$.
- (a) $\mathcal{P} \cup \{36\}$. Самодвойственно и инвариантно относительно сдвига.
 $\mathcal{P}_{11} = \{14; 25; 36\}$, $b_{11} = -1$.
9. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_9, \mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{11}$. Не даёт новых разбиений.

С. ДЕТАЛИ ВЫВОДА ФОРМУЛЫ c_6 НА ОСНОВЕ ПОДХОДА ХАРАРИ И МАНВЕЛА

$$\alpha(H_{10}) = \sum_{i=1}^n d_i,$$

$$\gamma_{H_{10}}(H_{10}) = \alpha(H_{10})|_{H_{10}} = 2,$$

$$\beta(H_{10}) = \frac{1}{2}\alpha(H_{10});$$

$$\alpha(H_9) = \sum_{i=1}^n d_i^2,$$

$$\gamma_{H_9}(H_{10}) = \alpha(H_9)|_{H_{10}} = 2,$$

$$\gamma_{H_9}(H_9) = (\alpha(H_9) - \gamma_{H_9}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_9} = 6 - 2 \cdot 2 = 2,$$

$$\beta(H_9) = \frac{1}{2}\alpha(H_9) - \beta(H_{10}) = \frac{1}{2}(\alpha(H_9) - \alpha(H_{10}));$$

$$\alpha(H_8) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)},$$

$$\gamma_{H_8}(H_8) = \alpha(H_8)|_{H_8} = 6,$$

$$\beta(H_8) = \frac{1}{6}\alpha(H_8);$$

$$\alpha(H_7) = \sum_{i=1}^n d_i^3,$$

$$\gamma_{H_7}(H_{10}) = \alpha(H_7)|_{H_{10}} = 2,$$

$$\gamma_{H_7}(H_9) = (\alpha(H_7) - \gamma_{H_7}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_9} = 10 - 2 \cdot 2 = 6,$$

$$\gamma_{H_7}(H_7) = (\alpha(H_7) - \gamma_{H_7}(H_9)\beta(H_9) - \gamma_{H_7}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_7} = 30 - 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6,$$

$$\beta(H_7) = \frac{1}{6}(\alpha(H_7) - 6\beta(H_9) - 2\beta(H_{10})) = \frac{1}{6}(\alpha(H_7) - 3\alpha(H_9) + 2\alpha(H_{10}));$$

$$\alpha(H_6) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(3)},$$

$$\gamma_{H_6}(H_{10}) = \alpha(H_6)|_{H_{10}} = 2,$$

$$\gamma_{H_6}(H_9) = (\alpha(H_6) - \gamma_{H_6}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_9} = 8 - 2 \cdot 2 = 4,$$

$$\gamma_{H_6}(H_8) = (\alpha(H_6) - \gamma_{H_6}(H_9)\beta(H_9) - \gamma_{H_6}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_8} = 24 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6,$$

$$\gamma_{H_6}(H_6) = (\alpha(H_6) - \gamma_{H_6}(H_9)\beta(H_9) - \gamma_{H_6}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_6} = 16 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 2,$$

$$\beta(H_6) = \frac{1}{2}\alpha(H_6) - 3\beta(H_8) - 2\beta(H_9) - \beta(H_{10}) = \frac{1}{2}(\alpha(H_6) - \alpha(H_8) - 2\alpha(H_9) + \alpha(H_{10}));$$

$$\alpha(H_5) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(4)},$$

$$\gamma_{H_5}(H_{10}) = \alpha(H_5)|_{H_{10}} = 2,$$

$$\gamma_{H_5}(H_9) = (\alpha(H_5) - \gamma_{H_5}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_9} = 8 - 2 \cdot 2 = 4,$$

$$\gamma_{H_5}(H_5) = (\alpha(H_5) - \gamma_{H_5}(H_9)\beta(H_9) - \gamma_{H_5}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_5} = 32 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 8,$$

$$\beta(H_5) = \frac{1}{8}(\alpha(H_5) - 4\beta(H_9) - 2\beta(H_{10})) = \frac{1}{8}(\alpha(H_5) - 2\alpha(H_9) + \alpha(H_{10}));$$

$$\alpha(H_4) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{ij}^{(2)}\right)^2 a_{ij},$$

$$\gamma_{H_4}(H_8) = \alpha(H_4)|_{H_8} = 6,$$

$$\gamma_{H_4}(H_4) = (\alpha(H_4) - \gamma_{H_4}(H_8)\beta(H_8))|_{H_4} = 16 - 6 \cdot 2 = 4,$$

$$\beta(H_4) = \frac{1}{4}(\alpha(H_4) - 6\beta(H_8)) = \frac{1}{4}(\alpha(H_4) - \alpha(H_8));$$

$$\alpha(H_3) = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(4)} d_i,$$

$$\gamma_{H_3}(H_{10}) = \alpha(H_3)|_{H_{10}} = 2,$$

$$\gamma_{H_3}(H_9) = (\alpha(H_3) - \gamma_{H_3}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_9} = 12 - 2 \cdot 2 = 8,$$

$$\gamma_{H_3}(H_8) = (\alpha(H_3) - \gamma_{H_3}(H_9)\beta(H_9) - \gamma_{H_3}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_8} = 36 - 8 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6,$$

$$\gamma_{H_3}(H_7) = (\alpha(H_3) - \gamma_{H_3}(H_9)\beta(H_9) - \gamma_{H_3}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_7} = 36 - 8 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 6,$$

$$\gamma_{H_3}(H_6) = (\alpha(H_3) - \gamma_{H_3}(H_9)\beta(H_9) - \gamma_{H_3}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_6} = 24 - 8 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 2,$$

$$\gamma_{H_3}(H_5) = (\alpha(H_3) - \gamma_{H_3}(H_6)\beta(H_6) - \gamma_{H_3}(H_9)\beta(H_9) - \gamma_{H_3}(H_{10})\beta(H_{10}))|_{H_5}$$

$$= 64 - 2 \cdot 4 - 8 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 16,$$

$$\begin{aligned} \gamma_{H_3}(H_4) &= (\alpha(H_3) - \gamma_{H_3}(H_5) \beta(H_5) - \gamma_{H_3}(H_6) \beta(H_6) - \gamma_{H_3}(H_7) \beta(H_7) \\ &\quad - \gamma_{H_3}(H_8) \beta(H_8) - \gamma_{H_3}(H_9) \beta(H_9) - \gamma_{H_3}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_4} \\ &= 130 - 16 \cdot 1 - 2 \cdot 6 - 6 \cdot 2 - 6 \cdot 2 - 8 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = 4, \\ \gamma_{H_3}(H_3) &= (\alpha(H_3) - \gamma_{H_3}(H_5) \beta(H_5) - \gamma_{H_3}(H_6) \beta(H_6) - \gamma_{H_3}(H_7) \beta(H_7) - \gamma_{H_3}(H_9) \beta(H_9) \\ &\quad - \gamma_{H_3}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_3} = 94 - 16 \cdot 1 - 2 \cdot 6 - 6 \cdot 1 - 8 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 2, \\ \beta(H_3) &= \frac{1}{2} \alpha(H_3) - 2 \beta(H_4) - 8 \beta(H_5) - \beta(H_6) - 3 \beta(H_7) - 3 \beta(H_8) - 4 \beta(H_9) - \beta(H_{10}) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha(H_3) - \alpha(H_4) - 2 \alpha(H_5) - \alpha(H_6) - \alpha(H_7) + \alpha(H_8) + 5 \alpha(H_9) - 2 \alpha(H_{10})); \\ \alpha(H_2) &= \sum_{i=1}^n \left(a_{ii}^{(3)} \right)^2, \\ \gamma_{H_2}(H_8) &= \alpha(H_2) \Big|_{H_8} = 12, \\ \gamma_{H_2}(H_4) &= (\alpha(H_2) - \gamma_{H_2}(H_8) \beta(H_8)) \Big|_{H_4} = 40 - 12 \cdot 2 = 16, \\ \gamma_{H_2}(H_2) &= (\alpha(H_2) - \gamma_{H_2}(H_8) \beta(H_8)) \Big|_{H_2} = 32 - 12 \cdot 2 = 8, \\ \beta(H_2) &= \frac{1}{8} \alpha(H_2) - 2 \beta(H_4) - \frac{3}{2} \beta(H_8) = \frac{1}{8} (\alpha(H_2) - 4 \alpha(H_4) + 2 \alpha(H_8)); \\ \alpha(H_1) &= \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(6)}, \\ \gamma_{H_1}(H_{10}) &= \alpha(H_1) \Big|_{H_{10}} = 2, \\ \gamma_{H_1}(H_9) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_9} = 16 - 2 \cdot 2 = 12, \\ \gamma_{H_1}(H_8) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_9) \beta(H_9) - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_8} = 66 - 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 24, \\ \gamma_{H_1}(H_7) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_9) \beta(H_9) - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_7} = 54 - 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 12, \\ \gamma_{H_1}(H_6) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_9) \beta(H_9) - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_6} = 36 - 12 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6, \\ \gamma_{H_1}(H_5) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_6) \beta(H_6) - \gamma_{H_1}(H_9) \beta(H_9) - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_5} \\ &= 128 - 6 \cdot 4 - 12 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 48, \\ \gamma_{H_1}(H_4) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_5) \beta(H_5) - \gamma_{H_1}(H_6) \beta(H_6) - \gamma_{H_1}(H_7) \beta(H_7) \\ &\quad - \gamma_{H_1}(H_8) \beta(H_8) - \gamma_{H_1}(H_9) \beta(H_9) - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_4} \\ &= 298 - 48 \cdot 1 - 6 \cdot 6 - 12 \cdot 2 - 24 \cdot 2 - 12 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = 36, \\ \gamma_{H_1}(H_3) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_5) \beta(H_5) - \gamma_{H_1}(H_6) \beta(H_6) - \gamma_{H_1}(H_7) \beta(H_7) - \gamma_{H_1}(H_9) \beta(H_9) \\ &\quad - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_3} = 190 - 48 \cdot 1 - 6 \cdot 6 - 12 \cdot 1 - 12 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 12, \\ \gamma_{H_1}(H_2) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_6) \beta(H_6) - \gamma_{H_1}(H_7) \beta(H_7) - \gamma_{H_1}(H_8) \beta(H_8) - \gamma_{H_1}(H_9) \beta(H_9) \\ &\quad - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_2} = 300 - 6 \cdot 8 - 12 \cdot 4 - 24 \cdot 2 - 12 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 24, \\ \gamma_{H_1}(H_1) &= (\alpha(H_1) - \gamma_{H_1}(H_6) \beta(H_6) - \gamma_{H_1}(H_9) \beta(H_9) - \gamma_{H_1}(H_{10}) \beta(H_{10})) \Big|_{H_1} \\ &= 132 - 6 \cdot 6 - 12 \cdot 6 - 2 \cdot 6 = 12, \\ \beta(H_1) &= \frac{1}{12} \alpha(H_1) - 2 \beta(H_2) - \beta(H_3) - 3 \beta(H_4) - 4 \beta(H_5) - \frac{1}{2} \beta(H_6) - \beta(H_7) - 2 \beta(H_8) \\ &\quad - \beta(H_9) - \frac{1}{6} \beta(H_{10}) = \frac{1}{12} (\alpha(H_1) - 3 \alpha(H_2) - 6 \alpha(H_3) + 9 \alpha(H_4) + 6 \alpha(H_5) \\ &\quad + 3 \alpha(H_6) + 4 \alpha(H_7) - 4 \alpha(H_8) - 12 \alpha(H_9) + 4 \alpha(H_{10})). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Harary F., Kimmel H.J. Matrix Measures for Transitivity and Balance. *Journal of Mathematical Sociology*, 1979, vol. 6, issue 2, pp. 199–210.
2. Newman M.E.J. The Structure and Function of Complex Networks. *SIAM Review*, 2003, vol. 45, no. 2, pp. 167–256.
3. Newman M.E.J., Strogatz S.H., Watts D.J. Random Graphs with Arbitrary Degree Distributions and Their Applications. *Physical Review E*, 2001, vol. 64, no. 2, pp. 026118(17).
4. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective Dynamics of «Small-World» Networks. *Nature*, 1998, vol. 393, issue 6684, pp. 440–442.
5. Robins G., Alexander M. Small Worlds among Interlocking Directors: Network Structure and Distance in Bipartite Graphs. *Computational & Mathematical Organization Theory*, 2004, vol. 10, pp. 69–94.
6. Cardillo A., Scellato S., Latora V., Porta S. Structural Properties of Planar Graphs of Urban Street Patterns. *Physical Review E*, 2006, vol. 73, issue 6, pp. 066107(8).
7. Bianconi G., Capocci A. Number of Loops of Size h in Growing Scale-Free Networks. *Physical Review Letters*, 2003, vol. 90, no. 7, pp. 078701(4).
8. Domb C., Sykes M.F. The Calculation of Lattice Constants in Crystal Statistics. *Philosophical Magazine*, 1957, ser. 8, vol. 2, no. 18, pp. 733–749.
9. Halford T.R., Chugg K.M. An Algorithm for Counting Short Cycles in Bipartite Graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, vol. 52, no. 1, pp. 287–292.
10. Enting I.G., Jensen I. Exact Enumerations. In: *Polygons, Polyominoes and Polycubes. Lecture Notes in Physics*. Ed. A. Guttmann. Heidelberg : Springer, 2009, vol. 775, pp. 143–179.
11. Jensen I. A Parallel Algorithm for the Enumeration of Self-Avoiding Polygons on the Square Lattice. *Journal of Physics A*, 2003, vol. 36, no. 21, pp. 5731–5745.
12. Series for Self-Avoiding Polygons Iwan Jensen.
http://www.ms.unimelb.edu.au/~iwan/polygons/Polygons_ser.html.
13. Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V., Mendes J.F.F. Pseudofractal Scale-Free Web. *Physical Review E*, 2002, vol. 65, no. 6, pp. 066122(4).
14. Rozenfeld H.D., Kirk J.E., Bollt E.M., ben-Avraham D. Statistics of Cycles: How Loopy Is Your Network? *Journal of Physics A*, 2005, vol. 38, pp. 4589–4595.
15. Welch J.T.Jr. A Mechanical Analysis of the Cyclic Structure of Undirected Linear Graphs. *Journal of the ACM*, 1966, vol. 13, no. 2, pp. 205–210.
16. Tiernan J.C. An Efficient Search Algorithm to Find the Elementary Circuits of a Graph. *Communications of the ACM*, 1970, vol. 13, no. 12, pp. 722–726.
17. Mateti P., Deo N. On Algorithms for Enumerating All Circuits of a Graph. *SIAM Journal on Computing*, 1976, vol. 5, no. 1, pp. 90–99.
18. Tarjan R. Enumeration of the Elementary Circuits of a Directed Graph. *SIAM Journal on Computing*, 1973, vol. 2, no. 3, pp. 211–216.
19. Gibbs N.E. Algorithm 492: Generation of All the Cycles of a Graph from a Set of Basic Cycles. *Communications of the ACM*, 1975, vol. 18, no. 6, p. 310.
20. Johnson D.B. Finding All the Elementary Circuits of a Directed Graph. *SIAM Journal on Computing*, 1975, vol. 4, no. 1, pp. 77–84.
21. Szwarcfiter J.L., Lauer P.E. A Search Strategy for the Elementary Cycles of a Directed Graph. *BIT Numerical Mathematics*, 1976, vol. 16, no. 2, pp. 192–204.
22. Sysło M.M. An Efficient Cycle Vector Space Algorithm for Listing All Cycles of a Planar Graph. *SIAM Journal on Computing*, 1981, vol. 10, no. 4, pp. 797–808.

23. Liu H., Wang J. A New Way to Enumerate Cycles in Graph. *Proc. Advanced International Conference on Telecommunications and International Conference on Internet and Web Applications and Services*. 2006, p. 57.
24. Хоменко Н.П., Головки Л.Д. Выделение из графа его частей некоторых типов и подсчёт их количества. *Украинский математический журнал*, 1972, том 24, № 3, стр. 385–396.
25. Хоменко Н.П., Шевченко Е.Н. К проблеме выделения и подсчёта. *Украинский математический журнал*, 1978, том 30, № 2, стр. 201–211.
26. Воропаев А.Н., Перепечко С.Н. Количество простых циклов фиксированной длины в неориентированном графе. Явные формулы в случае малых длин. *Письма в журнал «Физика элементарных частиц и атомного ядра»*, принято к публикации.
27. Harary F., Manvel B. On the Number of Cycles in a Graph. *Matematický časopis*, 1971, vol. 21, no. 1, pp. 55–63.
28. Chang Y.C., Fu H.L. The Number of 6-Cycles in a Graph. *The Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications*, 2003, vol. 39, pp. 27–30.
29. Perepechko S.N., Voropaev A.N. The Number of Fixed Length Cycles in an Undirected Graph. Explicit Formulae in Case of Small Lengths. *International Conference «Mathematical Modeling and Computational Physics». Book of Abstracts*. Dubna : JINR, 2009, pp. 148–149.
30. <http://flowproblem.ru/files/Cycles/short-cycles.zip>.
31. Караваев А.М., Воропаев А.Н. Эффективность распараллеливания явных формул для подсчёта коротких циклов в графе. *Международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии». Труды*. Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2010, стр. 486–497.
32. Flum J., Grohe M. The Parameterized Complexity of Counting Problems. *SIAM Journal on Computing*, 2004, vol. 33, no. 4, pp. 892–922.
33. Воропаев А.Н., Перепечко С.Н. Явные формулы для подсчёта простых циклов с длиной, близкой к обхвату графа. *XVII международная научная конференция «Математика. Компьютер. Образование». Тезисы*. Ижевск : РХД, 2010, выпуск 17, стр. 16.
34. Ross I.C., Harary F. On the Determination of Redundancies in Sociometric Chains. *Psychometrika*, 1952, vol. 17, no. 2, pp. 195–208.
35. Alon N., Yuster R., Zwick U. Finding and Counting Given Length Cycles. *Algorithmica*, 1997, vol. 17, no. 3, pp. 209–223.
36. Харари Ф. *Теория графов*. М. : Мир, 1973. (Harary F. *Graph Theory*. Reading : Addison-Wesley, 1969.)
37. Harary F., Ross I.C. The Number of Complete Cycles in a Communication Network. *The Journal of Social Psychology*, 1954, vol. 40, no. 2, pp. 329–332.
38. Malde P.J., Schwenk A.J., Locke S.C., Wilf H.S., Sagan B.E., Holzsager R. The Difference between Graphs of Even and Odd Size. *The American Mathematical Monthly*, 1994, vol. 101, no. 7, pp. 686–687.