Информационные процессы, Том 12, № 1, 20121, стр. 117–126

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Об интервальной модели для процесса рождения и гибели с гистерезисом

А. Сегхайер*, **И.И. Цитович****

**Московский технический университет связи и информатики,*
Министерство российской федерации по связи и информатизации, Москва, Россия,
***Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича,*
Российская академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 26.03.2012

Аннотация—Рассматривается задача вычисления оценок стационарных вероятностей для интервальной модели процесса рождения и гибели с гистерезисом, возникающей при управления доступом к ресурсам беспроводной широкополосной сети с разными порогами для отключения и включения доступа к ресурсам сети в зависимости от класса обслуживания. Получены оценки границ изменения стационарных вероятностей в зависимости от расположения анализируемого состояния относительно гистерезиса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие современных телекоммуникационных систем позволяет управлять доступом к ресурсам системы в зависимости от текущего состояния системы. Это позволяет оптимизировать использование ресурсов в системе в зависимости от сервисного класса пользователя.

В классических системах управления [3] выделяют состояние, при котором происходит включение управляющего воздействия, и состояние, при котором происходит выключение этого воздействия. Чтобы переключения управляющих воздействий не происходили слишком часто, выделяют некоторое количество состояний, описываемых гистерезисом, в которых возможно как наличие, так и отсутствие управляющих воздействий. Введение в рассмотрение гистерезиса усложняет задачу вычисления стационарных вероятностей случайного процесса, описывающего состояние сети, поскольку теперь некоторые состояния нужно различать для того, чтобы учесть доступ на обслуживание требований соответствующего потока.

В наиболее простом виде такой подход для анализа телекоммуникационных систем реализуется в виде соответствующего процесса рождения и гибели [1], [6]–[10]. Вместе с тем, как отмечалось в [6]–[10], необходимо учитывать то обстоятельство, что даже в простейших случаях, когда делаются предположения о независимости поступающих потоков требований, при их большом числе и большой емкости сети число определяемых параметров (стационарных вероятностей модели) столь велико, что приходится прибегать к приближенным методам описания моделей. Кроме того, необходимо учитывать и то обстоятельство, что значения параметров получают на основании измерений на сети статистическими методами, что так же приводит к погрешностям в определении их значений. Таким образом, параметры модели телекоммуникационной системы приходится задавать в виде интервалов их возможного изменения. Поэтому возникает необходимость исследования интервальных моделей. Это направление широко представлено в литературе. Однако на практике применение соответствующих методов не получает широкое распространение, поскольку получающиеся при применении этих методов границы изменения интересующих параметров оказываются очень широкими. При этом, чем сложнее модель, тем шире получаются интервалы возможных значений параметров. Таким образом, в случае усложнения моделей действует эффект наложения двух негативных факторов: рост числа переменных и рост неопределенности в значениях параметров модели.

В [4], [5] рассмотрен интервальный метод оценивания характеристик узла телекоммуникационной системы с помощью процесса рождения и гибели и показано, что при определенных обстоятельствах потеря точности, связанная с использованием более простой модели, компенсируется за счет меньшей погрешности используемой интервальной модели. Введение гистерезиса в процесс рождения и гибели приводит к необходимости уточнения используемых в [4], [5] оценок для значений стационарных вероятностей. Целью настоящей работы является обобщение такого подхода на случай гистерезиса, рассмотренного в [6].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ДОСТУПОМ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

В соответствии с [6] рассматривается упрощенная модель дифференцированного обслуживания абонентов мобильной сети, поскольку имеются потребители с различными требованиями к качеству обслуживания, с различным объемом и видом передаваемого трафика.

В работе [6] рассматриваются процессы, происходящие в фиксированной инфраструктуре мобильной сети. Усложнение характера и рост объема информационной и сигнальной нагрузки приводит к тому, что требуемое качество обслуживания может быть обеспечено только при использовании эффективных методов повышения пропускной способности фиксированной инфраструктуры мобильных сетей. Одним из таких методов является метод дифференцированного обслуживания абонентов, т.е. выделение категорий абонентов, обслуживание которых происходит с повышенным качеством.

На основании анализа действующих тарифных планов различных операторов и наблюдений за информационной и сигнальной нагрузками в сети крупного транзитного оператора мобильной связи было выделено две категории мобильных абонентов: "бизнес" и "экономные". Первая категория — "бизнес"-абоненты. Она характеризуется меньшей длительностью разговора, но большим числом вызовов от абонента. Для данной категории характерно активное использование дополнительных услуг (таких как удержание вызова и/или переадресация). Указанные абоненты приносят существенно больший доход в расчете на одного абонента, чем "экономные" абоненты. Кроме того, они предъявляют более жесткие требования к качеству обслуживания и при неудовлетворительном с их точки зрения качестве услуг могут перейти к другим операторам. Для категории "экономных" абонентов характерно активное использование услуги коротких сообщений. В основном эта категория абонентов создает нагрузку на сеть сигнализации. Поэтому в работе рассматриваются две категории пользователей: "бизнес"-абоненты, требования которых рассматриваются как приоритетные, и "бизнес"-абоненты, требования которых рассматриваются как неприоритетные.

В случаях высокой нагрузки в сети неприоритетные требования будут часто получать отказ в обслуживании. Это дает основание считать, что такие пользователи будут совершать повторные попытки соединения. Поэтому в рассматриваемой задаче было предусмотрено наличие потока повторных требований. Следовательно возникает несколько потоков требований, каждый из которых имеет принципиальные отличия от других. Эти отличия обусловлены как различным временем обслуживания, так и видом распределения времени обслуживания, поскольку обслуживание "бизнес"-абонентов рассматривается как двухфазное. Отличия состоят и в принципах формирования этих потоков требований. Для потока "экономных" абонентов характерно наличие обратной связи, поскольку интенсивность потока зависит от качества обслуживания требований в сети.

Математическая модель обслуживания двух потоков сообщений звеном фиксированной инфраструктуры мобильной сети предполагает, что имеется v информационных каналов, при этом для требований второго потока доступны только $l, 0 \leq l \leq v$, каналов. Требования из первого потока образуют пуассоновский поток интенсивности λ_1 и занимают любой свободный канал на время обслуживания, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ_1. После завершения обслуживания требование может с вероятностью p продолжить обслуживание, заказав некоторую дополнительную услугу. Продолжительность дополнительного обслуживания имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_3. В том случае, когда требование не поступает на обслуживание, оно не может заказать и дополнительную услугу. Требования из второго потока образуют пуассоновский поток интенсивности λ_2 и занимают любой доступный им свободный канал, если общее число занятых каналов меньше l, на время обслуживания, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ_2. Для требований из второго потока дополнительное обслуживание не предусмотрено.

Такая модель описывается марковским процессом, состояния которого описываются трехмерным вектором (i_1, i_2, i_3), где i_1 — число каналов, занятых обслуживанием требований первого потока, i_3 — число каналов, занятых дообслуживанием требований первого потока, i_2 — число каналов, занятых обслуживанием требований второго потока. Множество возможных состояний имеет вид $S_G = \{(i_1, i_2, i_3) : i_1 + i_2 + i_3 \le v, 0 \le i_1 \le v, 0 \le i_2 \le v, 0 \le i_3 \le v\}$.

Для построения более простой модели делаются некоторые упрощения. Первое упрощение состоит в том, что двухэтапное обслуживание требований первого потока заменяется одноэтапным; среднее время обслуживания считается равным $t^* = t_1 + pt_3$. Здесь t_1 — средняя продолжительность обслуживания требований первого потока, $t_1 = \frac{1}{\mu_1}$, t_3 — средняя продолжительность дообслуживания требований первого потока, $t_3 = \frac{1}{\mu_3}$. Это упрощение основано на том факте, что характеристики качества обслуживания потоков большой емкости мало чувствительны к закону распределения времени обслуживания, а, в первую очередь, зависят от среднего значения времени обслуживания.

Второе упрощение состоит в том, что время обслуживания считается для всех потоков одинаковым, а интенсивности поступления требований пересчитываются таким образом, чтобы сохранить общую нагрузку от соответствующего потока в единицу времени: интенсивность первого потока принимается равной $\Lambda_1 = \lambda_1 t^*$, а интенсивность второго потока — равной $\Lambda_2 = \lambda_2 t_2$, где $t_2 = \frac{1}{\mu_2}$.

Процесс занятия каналов в такой модели описывается уже одномерным марковским процессом, состояния которого задаются параметром i — числом занятых каналов. Множество возможных состояний теперь уже $S = \{(i) : 0 \le i \le v\}$.

Получающий марковский процесс является процессом рождения и гибели, для стационарных вероятностей которого получаем уравнения:

$$p_i = p_{i-1}\frac{\Lambda}{i}, 1 \le i \le k, \tag{1}$$

где

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \tag{2}$$

$$p_i = p_{i-1}\frac{\Lambda_1}{i}, k + 1 \le i \le v. \tag{3}$$

Вероятность отказа в обслуживании для требований из первого потока

$$\pi_1 = p_v, \tag{4}$$

а для второго —

$$\pi_2 = \sum_{i=k}^{v} p_i. \tag{5}$$

Эффективность такого упрощения модели исследовалась в [2].

Проведенные в [6] исследования показали, что без применения дифференцированного обслуживания качество обслуживания потока первой категории является низким. Введение дифференцированного обслуживания позволяет гарантировать качество обслуживания, требуемое для потока первой категории, не значительно ухудшая качество второго потока. При отсутствии порога для обслуживания потока второй категории, несмотря на большое количество обслуженных вызовов, общий доход сети падает. При введении в модель повторных вызовов негативный эффект присутствия пользователей низшего приоритета будет еще более значительным, что позволит выявить дополнительные преимущества дифференцированного обслуживания.

Таким образом, было обосновано применение управления доступом к ресурсам сети, представляющее собой ограничение доступа для пользователей низшего приоритетного класса при больших нагрузках в сети. Для реализации такого подхода необходимо задать два порога: l — число занятых каналов, когда прекращается обслуживание низкоприоритетных требований и k — число занятых каналов, когда возобновляется обслуживание низкоприоритетных требований. Понятно, что $0 < k < l < v$.

Теперь вместо множества S состояний, задаваемых количеством занятых каналов, нужно рассматривать два S_1 и S_2. Первое содержит состояния, когда обслуживаются оба потока требований, и состоит из l элементов: $S_1 = \{0, \ldots, l-1\}$; второе содержит состояния, когда обслуживается только первый поток требований, и содержит $v-k$ элементов, k — число устройств, когда начинается обслуживание низкоприоритетных требований. Суммарная интенсивность обоих потоков обозначена далее через λ_1 (для простоты обозначений), а интенсивность высокоприоритетного потока — через λ_2. Среднее время обслуживания $\mu = 1$. Стационарные вероятности для состояний из S_1 обозначаются через $p_i, i = 0, ..., l-1$, а для состояний из S_2 — через $q_i, i = k+1, ..., v$.

Математическая модель описанного метода регулирования доступа к ресурсам сети двух потоков требований с различными приоритетами представляет собой процесс рождения и гибели с гистерезисом.

Таким образом, можно сделать вывод, что рассматриваемая модель является приближенной и значения ее параметров могут варьироваться в некоторых пределах. Границы интервалов должны быть настолько широкими, чтобы охватить погрешности, связанные с приближенным описанием реальных процессов (например, связанные со сделанными ранее упрощениями). Будем предполагать, что интервалы изменения параметров имеют вид: $\lambda_i \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+]$, $i = 1, 2$, $\mu \in [\mu^-, \mu^+]$.

Для получения оценок стационарных вероятностей выделенного состояния нужно выразить все вероятности как относительные величины, когда относительная вероятность этого состояния принята равной 1 ([4]). Но, в отличие от этой работы, теперь нужно рассмотреть 4 случая расположения этого состояния относительно гистерезиса. Эта задача рассматривается в следующих разделах.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРОЯТНОСТИ q_{k+1}

Система уравнений статистического равновесия при наличии гистерезиса принимает более сложный вид, чем уравнения (1)–(3). Записать эту систему уравнений можно похожим образом введя величину $q_{k+1}(k+1)\mu = a$. Через эту величину выразим остальные стационарные вероятности следующим образом:

$$p_{l-1} = \frac{a}{\lambda_1}, \tag{6}$$

$$p_i = \frac{p_{i+1}(i+1)\mu + a}{\lambda_1},\ i = k, ..., l-2, \tag{7}$$

$$q_i = \frac{q_{i-1}\lambda_2 + a}{i\mu},\ i = k+2, ..., l, \tag{8}$$

$$p_i = \frac{p_{i+1}(i+1)\mu}{\lambda_1},\ i = 0, ..., k-1, \tag{9}$$

$$q_i = \frac{q_{i-1}\lambda_2}{i\mu},\ i = l+1, ..., v. \tag{10}$$

Из уравнений (6) и (7) следует, что

$$p_i = \frac{a}{\lambda_1^{l-i}} \sum_{n=0}^{l-i-1} \lambda_1^n \mu^{l-i-1-n} \prod_{m=1}^{l-i-1-n} (i+m),\ i = k, ..., l-1, \tag{11}$$

причем в случае, когда произведение содержит пустое множество сомножителей, оно считается равным 1. Доказывается формула методом математической индукции постепенным уменьшением индекса i.

Из (11) при $i = k$ получаем

$$p_k = \frac{a}{\lambda_1^{l-k}} \sum_{n=0}^{l-k-1} \lambda_1^n \mu^{l-k-1-n} \prod_{m=1}^{l-k-1-n} (k+m). \tag{12}$$

Из уравнений (9)

$$p_i = \frac{\mu^{k-i} \prod_{m=1}^{k-i}(i+m)}{\lambda_1^{k-i}} p_k,\ i = 0, ..., k-1, \tag{13}$$

поэтому вместе с (12) получаем

$$p_i = \frac{a\mu^{k-i}}{\lambda_1^{l-i}} \prod_{m=1}^{k-i}(i+m) \sum_{n=0}^{l-k-1} \lambda_1^n \mu^{l-k-1-n} \prod_{m=1}^{l-k-1-n} (k+m) =$$

$$= a \sum_{n=0}^{l-k-1} \lambda_1^{n+i-l} \mu^{l-i-1-n} \prod_{m=1}^{l-i-1-n} (i+m),\ i = 0, ..., k-1. \tag{14}$$

Аналогично получаем формулы для вероятностей q_i. Из уравнений (8) и определения a следует, что

$$q_i = \frac{a}{\mu^{i-k} \prod_{n=1}^{i-k}(k+n)} \sum_{n=0}^{i-k-1} \lambda_2^n \mu^{i-k-1-n} \prod_{m=1}^{i-k-1-n} (i-m),\ i = k+1, ..., l, \tag{15}$$

причем в случае, когда произведение содержит пустое множество сомножителей, оно считается равным 1. Доказывается формула методом математической индукции постепенным увеличением индекса i.

Из (15) при $i = l$ получаем

$$q_l = \frac{a}{\mu^{l-k}\prod_{n=1}^{l-k}(k+n)} \sum_{n=0}^{l-k-1} \lambda_2^n \mu^{l-k-1-n} \prod_{m=1}^{l-k-1-n} (l-m). \tag{16}$$

Из уравнений (10)

$$q_i = \frac{\lambda_2^{i-l}}{\mu^{i-l}\prod_{m=1}^{i-l}(l+m)} q_l,\ i = l+1, ..., v, \tag{17}$$

поэтому вместе с (16) получаем

$$q_i = \frac{\lambda_2^{i-l}}{\mu^{i-l}\prod_{m=1}^{i-l}(l+m)} \frac{a}{\mu^{l-k}\prod_{n=1}^{l-k}(k+n)} \sum_{n=0}^{l-k-1} \lambda_2^n \mu^{l-k-1-n} \prod_{m=1}^{l-k-1-n} (l-m) =$$

$$= a\frac{\lambda_2^{i-l}}{\mu^{i-k}\prod_{m=1}^{i-k}(k+m)} \sum_{n=0}^{l-k-1} \lambda_2^n \mu^{l-k-1-n} \prod_{m=1}^{l-k-1-n} (l-m),\ i = l+1, ..., v. \tag{18}$$

Суммируя (11), (14), (15) и (18) получаем из условия нормировки стационарных вероятностей

$$a^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{l-k-1} \lambda_1^{n+i-l} \mu^{l-i-1-n} \prod_{m=1}^{l-i-1-n} (i+m) + \sum_{i=k}^{l-1} \frac{1}{\lambda_1^{l-i}} \sum_{n=0}^{l-i-1} \lambda_1^n \mu^{l-i-1-n} \prod_{m=1}^{l-i-1-n} (i+m) +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{l} \frac{1}{\mu^{i-k}\prod_{n=1}^{i-k}(k+n)} \sum_{n=0}^{i-k-1} \lambda_2^n \mu^{i-k-1-n} \prod_{m=1}^{i-k-1-n} (i-m) +$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{v} \frac{\lambda_2^{i-l}}{\mu^{i-k}\prod_{m=1}^{i-k}(k+m)} \sum_{n=0}^{l-k-1} \lambda_2^n \mu^{l-k-1-n} \prod_{m=1}^{l-k-1-n} (l-m). \tag{19}$$

Таким образом, максимизируя правую часть (19) по области возможных значений λ_1, λ_2 и μ мы получим минимальное значение a и наоборот, минимизируя правую часть (19) — мы получим максимальное значение a. Задачу определения границ изменения значения a можно решить приближенно выбирая крайние значения параметров λ_1, λ_2 и μ, только в отличие от результата [4] теперь соответствующие границы могут не достигаться, поскольку один и тот же параметр может быть как в числителе, так и в знаменателе соответствующей дроби.

Аппроксимации границ изменения значения a выглядят следующим образом:

$$a \leq \Big(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu^-)^{k-i}}{(\lambda_1^+)^{l-i}} \prod_{m=1}^{k-i} (i+m) \sum_{n=0}^{l-k-1} (\lambda_1^-)^n (\mu^-)^{l-k-1-n} \prod_{m=1}^{l-k-1-n} (k+m) +$$

$$\sum_{i=k}^{l-1} \frac{1}{(\lambda_1^+)^{l-i}} \sum_{n=0}^{l-i-1} (\lambda_1^-)^n (\mu^-)^{l-i-1-n} \prod_{m=1}^{l-i-1-n} (i+m) +$$

$$+\sum_{i=k+1}^{l}\frac{1}{(\mu^+)^{i-k}\prod_{n=1}^{i-k}(k+n)}\sum_{n=0}^{i-k-1}(\lambda_2^-)^n(\mu^-)^{i-k-1-n}\prod_{m=1}^{i-k-1-n}(i-m)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{v}\frac{(\lambda_2^-)^{i-l}}{(\mu^+)^{i-k}\prod_{m=1}^{i-k}(k+m)}\sum_{n=0}^{l-k-1}(\lambda_2^-)^n(\mu^-)^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)\Big)^{-1}, \tag{20}$$

$$a\geq\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\mu^+)^{k-i}}{(\lambda_1^-)^{l-i}}\prod_{m=1}^{k-i}(i+m)\sum_{n=0}^{l-k-1}(\lambda_1^+)^n(\mu^+)^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(k+m)+$$

$$\sum_{i=k}^{l-1}\frac{1}{(\lambda_1^-)^{l-i}}\sum_{n=0}^{l-i-1}(\lambda_1^+)^n(\mu^+)^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m)+$$

$$+\sum_{i=k+1}^{l}\frac{1}{(\mu^-)^{i-k}\prod_{n=1}^{i-k}(k+n)}\sum_{n=0}^{i-k-1}(\lambda_2^+)^n(\mu^+)^{i-k-1-n}\prod_{m=1}^{i-k-1-n}(i-m)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{v}\frac{(\lambda_2^+)^{i-l}}{(\mu^-)^{i-k}\prod_{m=1}^{i-k}(k+m)}\sum_{n=0}^{l-k-1}(\lambda_2^+)^n(\mu^+)^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)\Big)^{-1}. \tag{21}$$

4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ С ГИСТЕРЕЗИСОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем разделе, необходимо повторить для получения явных формул стационарных вероятностей, выраженных через вероятность исследуемого состояния. Как следует из уравнений (6)–(10), формулы будут содержать параметр a, границы изменения которого получены в предыдущем разделе.

Пусть i_0 — состояние из S_2, причем $i_0 \geq l$. Тогда из (7)

$$q_i=\frac{\lambda_2^{i-i_0}}{\mu^{i-i_0}\prod_{m=1}^{i-i_0}(i_0+m)},\ i=i_0+1,...,v, \tag{22}$$

$$q_i=\frac{\mu^{i_0-i}\prod_{m=1}^{i_0-i}(i_0-m+1)}{\lambda_2^{i_0-i}},\ i=i_0-1,...,l. \tag{23}$$

В частности,

$$q_l=\frac{\mu^{i_0-l}\prod_{m=1}^{i_0-l}(i_0-m+1)}{\lambda_2^{i_0-l}}. \tag{24}$$

Из (17)

$$a=\frac{q_l\mu^{l-k}\prod_{n=1}^{l-k}(k+n)}{\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}=$$

$$=\frac{\mu^{i_0-l}\prod_{m=1}^{i_0-l}(i_0-m+1)\mu^{l-k}\prod_{n=1}^{l-k}(k+n)}{\lambda_2^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (11), (14), (15) получаем

$$p_i=\frac{\mu^{i_0-l}\prod_{m=1}^{i_0-l}(i_0-m+1)\mu^{l-k}\prod_{n=1}^{l-k}(k+n)}{\lambda_2^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)\lambda_1^{l-i}}\sum_{n=0}^{l-i-1}\lambda_1^n\mu^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m)=$$

$$=\frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)}{\lambda_1^{l-i}\lambda_2^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}\sum_{n=0}^{l-i-1}\lambda_1^n\mu^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m), \tag{26}$$

$$i=k,...,l-1,$$

$$p_i=\frac{\mu^{i_0-l}\prod_{m=1}^{i_0-l}(i_0-m+1)\mu^{l-k}\prod_{n=1}^{l-k}(k+n)}{\lambda_2^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_1^{n+i-l}\mu^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m)=$$

$$=\frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)}{\lambda_2^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_1^{n+i-l}\mu^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m), \tag{27}$$

$$i=0,...,k-1,$$

$$q_i=\frac{\mu^{i_0-l}\prod_{m=1}^{i_0-l}(i_0-m+1)\mu^{l-k}\prod_{n=1}^{l-k}(k+n)\sum_{n=0}^{i-k-1}\lambda_2^n\mu^{i-k-1-n}\prod_{m=1}^{i-k-1-n}(i-m)}{\lambda_2^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)\mu^{i-k}\prod_{n=1}^{i-k}(k+n)}=$$

$$=\frac{\mu^{i_0-i}\prod_{n=1}^{i_0-i}(i+n)\sum_{n=0}^{i-k-1}\lambda_2^n\mu^{i-k-1-n}\prod_{m=1}^{i-k-1-n}(i-m)}{\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^{i_0-l+n}\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)},\ i=k+1,...,l. \tag{28}$$

Суммируя (22), (23), (26), (27) и (28) получаем аналогично (19) из условия нормировки стационарных вероятностей

$$q_{i_0}^{-1}=1+\sum_{i=i_0+1}^{v}\frac{\lambda_2^{i-i_0}}{\mu^{i-i_0}\prod_{m=1}^{i-i_0}(i_0+m)}+\sum_{l}^{i=i_0-1}\frac{\mu^{i_0-i}\prod_{m=1}^{i_0-i}(i_0-m+1)}{\lambda_2^{i_0-i}}+$$

$$+\sum_{i=k+1}^{l}\frac{\mu^{i_0-i}\prod_{n=1}^{i_0-i}(i+n)\sum_{n=0}^{i-k-1}\lambda_2^n\mu^{i-k-1-n}\prod_{m=1}^{i-k-1-n}(i-m)}{\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^{i_0-l+n}\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}+$$

$$+\sum_{i=k}^{l-1}\frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)}{\lambda_1^{l-i}\lambda_2^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}\sum_{n=0}^{l-i-1}\lambda_1^n\mu^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m)+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)}{\lambda_2^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_1^{n+i-l}\mu^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m). \tag{29}$$

Теперь можно получить оценки для q_{i_0}:

$$q_{i_0} \leq \Big(1 + \sum_{i=i_0+1}^{v} \frac{(\lambda_2^-)^{i-i_0}}{(\mu^+)^{i-i_0}\prod_{m=1}^{i-i_0}(i_0+m)} + \sum_{l}^{i=i_0-1} \frac{(\mu^-)^{i_0-i}\prod_{m=1}^{i_0-i}(i_0-m+1)}{(\lambda_2^+)^{i_0-i}} +$$

$$+\sum_{i=k+1}^{l} \frac{(\mu^-)^{i_0-i}\prod_{n=1}^{i_0-i}(i+n)\sum_{n=0}^{i-k-1}(\lambda_2^-)^n(\mu^-)^{i-k-1-n}\prod_{m=1}^{i-k-1-n}(i-m)}{\sum_{n=0}^{l-k-1}(\lambda_2^+)^{i_0-l+n}(\mu^+)^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)} +$$

$$+\sum_{i=k}^{l-1} \frac{(\mu^-)^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)\sum_{n=0}^{l-i-1}(\lambda_1^+)^{n-l+i}(\mu^-)^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m)}{(\lambda_2^+)^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}(\lambda_2^+)^n(\mu^+)^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)} +$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu^-)^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)\sum_{n=0}^{l-k-1}(\lambda_1^+)^{n+i-l}(\mu^-)^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m)}{(\lambda_2^+)^{i_0-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}(\lambda_2^+)^n(\mu^+)^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}\Big)^{-1}. \tag{30}$$

Нижняя граница получается аналогично; нужно в (30) все индексы + заменить на − и наоборот.

Пусть теперь $i_0 < l$. Тогда из (15)

$$a = \frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)}{\sum_{n=0}^{i_0-k-1}\lambda_2^n\mu^{i_0-k-1-n}\prod_{m=1}^{i_0-k-1-n}(i_0-m)}. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (11), (14), (15) и (18) получаем значения стационарных вероятностей, выраженных через q_{i_0}:

$$p_i = \frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)\sum_{n=0}^{l-i-1}\lambda_1^n\mu^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m)}{\lambda_1^{l-i}\sum_{n=0}^{i_0-k-1}\lambda_2^n\mu^{i_0-k-1-n}\prod_{m=1}^{i_0-k-1-n}(i_0-m)},\ i=k,...,l-1, \tag{32}$$

$$p_i = \frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_1^{n+i-l}\mu^{l-i-1-n}\prod_{m=1}^{l-i-1-n}(i+m)}{\sum_{n=0}^{i_0-k-1}\lambda_2^n\mu^{i_0-k-1-n}\prod_{m=1}^{i_0-k-1-n}(i_0-m)},\ i=0,...,k-1, \tag{33}$$

$$q_i = \frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)\sum_{n=0}^{i-k-1}\lambda_2^n\mu^{i-k-1-n}\prod_{m=1}^{i-k-1-n}(i-m)}{\mu^{i-k}\prod_{n=1}^{i-k}(k+n)\sum_{n=0}^{i_0-k-1}\lambda_2^n\mu^{i_0-k-1-n}\prod_{m=1}^{i_0-k-1-n}(i_0-m)},\ i=k+1,...,l, \tag{34}$$

$$q_i = \frac{\mu^{i_0-k}\prod_{n=1}^{i_0-k}(k+n)\lambda_2^{i-l}\sum_{n=0}^{l-k-1}\lambda_2^n\mu^{l-k-1-n}\prod_{m=1}^{l-k-1-n}(l-m)}{\mu^{i-k}\prod_{m=1}^{i-k}(k+m)\sum_{n=0}^{i_0-k-1}\lambda_2^n\mu^{i_0-k-1-n}\prod_{m=1}^{i_0-k-1-n}(i_0-m)},\ i=l+1,...,v. \tag{35}$$

Суммируя (32)–(35) получаем аналогично (19) из условия нормировки стационарных вероятностей значение $q_{i_0}^{-1}$.

Далее, расставляя аналогично (30) индексы + и − можно получить оценки верхней и нижней границ для значений стационарной вероятности q_{i_0}.

Для того, чтобы получить границы изменения значений стационарных вероятностей p_{i_0}, нужно выразить величину a через p_{i_0} используя формулу (11) или (14), а полученный результат подставить в (11), (14), (15) и (18). Таким образом все вероятности будут выражены через p_{i_0}. Используя условие нормировки вероятностей получаются оценки для значений p_{i_0} так же, как и в предыдущих случаях.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование показывает, что введение гистерезиса в процесс рождения и гибели не приводит к необходимости перехода к принципиально другим методам оценивания погрешностей в определении стационарных вероятностей аналогично [4]. Однако в данном случае нарушается принцип монотонной зависимости характеристик от колебаний значений входных параметров модели.

Полученные алгоритмы позволяют получать оценки погрешности вычисления характеристик, являющихся линейными функционалами стационарных вероятностей, если провести исследования, аналогичные [5]. В частности, можно получить оценки для вероятностей потерь требований используя аналоги (4) и (5).

При наличии явных формул вычисления стационарных вероятностей можно относительно легко получить и оценки для границ их возможного изменения. Поэтому анализ работы [1] и [10] показывает, что и в этом случае можно получить интервальные оценки для стационарных вероятностей не прибегая к решению систем линейных уравнений. Понятно, что можно получить таким методом и оценки в более общей постановке для процессов рождения и гибели как в [4], только при наличии гистерезисов.

В последующих работах будут приведены результаты численных исследований, позволяющих определить эффективность предложенного упрощенного метода оценивания интервалов изменения стационарных вероятностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абаев П. О., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е. Гистерезисное управление сигнальной нагрузкой в сети SIP-серверов. *Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика».* № 4. 2011. С. 55–73.

2. Богомолова Н.Е., Чернушевич Я.В. Динамическое управление приоритетами при дифференцированном обслуживании абонентов в фиксированной инфраструктуре подвижной сети. *Информационные процессы.* Т. 5, № 3. 2005. С. 194–200.

3. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* М.: Наука, 1983.

4. Сегайер А. Численное исследование алгоритмов расчета вероятности потерь для многопотоковых моделей пакетных сетей. *Информационные процессы.* Т. 9, № 3. 2009. С. 161–182.

5. Сегайер А., Цитович И.И. Об интервальных задачах для моделей пакетных сетей. *Обозрение прикладной и промышленной математики.* Т. 15. № 6, 2008. С. 1130–1131.

6. Цитович И.И., Чернушевич А.В. Влияние гистерезиса на управление приоритетами в телекоммуникационной сети. *Обозрение прикладной и промышленной математики.* Т. 15, № 6. 2008. С. 1141–1142.

7. Цитович И.И., Чернушевич А.В. О влиянии гистерезиса управления трафиком на эффективность функционирования мультисервисной сети. *Обозрение прикладной и промышленной математики.* Т. 17, № 2. 2010. С. 314–315.

8. Цитович И.И., Чернушевич А.В. Исследование влияния гистерезиса управления доступом к ресурсам БШС на эффективность ее функционирования. *Информационные процессы.* Т. 11, № 3. 2011. С. 348-368.

9. Чернушевич А.В. Управление распределением ресурсов сегмента беспроводной широкополосной сети. *T-COMM. Телекоммуникации и транспорт.* № 7. 2011. С.156–159.

10. Tsitovich I.I., Chernushevich A.V. Calculation of stationary probabilities for a three-stream model of control of the access of the resources of a wireless wideband network with hysteresis. *Journal of Communication Technology and Electronics.* Vol. 56, № 12. 2011. P. 1543–1551.