Информационные процессы, Том 12, № 3, 2012, стр. 176–190
© *2012 К. Ю. Жерновый, Ю. В. Жерновый.*

Система $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$ с гистерезисным переключением интенсивности обслуживания

К. Ю. Жерновый, Ю. В. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 07.08.2012

Аннотация—Для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$ применяются два режима обслуживания (основной и послепороговый) с функциями распределения времени обслуживания $F(x)$ и $\widetilde{F}(x)$ соответственно. Послепороговый режим начинает функционировать, если в момент t начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе $\xi(t)$ удовлетворяет условию $\xi(t) > h_2$. Возвращение к основному режиму осуществляется в момент начала обслуживания той заявки, для которой $\xi(t) \le h_1$, где $h_1 \le h_2$. Определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для стационарного распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Полученные результаты проверены с помощью имитационных моделей, построенных с привлечением инструментальных средств GPSS World.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система обслуживания, групповое поступление заявок, переключение интенсивности обслуживания, гистерезисная стратегия, стационарное распределение числа заявок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели систем массового обслуживания, в которых может применяться разная интенсивность обслуживания в зависимости от длины очереди, а заявки прибывают группами, часто используются для изучения телекоммуникационных процессов [1–7].

Двухпороговая гистерезисная стратегия переключения интенсивности обслуживания (пороги $h_1 \le h_2$, две интенсивности обслуживания, переключение режимов осуществляется, когда число заявок превышает h_2 и меньше, чем h_1) впервые предложена в статье [8]. Такая же стратегия рассмотрена в [9, 10] для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$. Описание результатов работ [8–10] приведено в нашей статье [11], в которой с помощью метода потенциала В. С. Королюка [12] изучена двухпороговая гистерезисная стратегия переключения интенсивности обслуживания для системы с ограниченным объёмом накопителя $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$. В этой системе m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. В настоящей работе мы используем результаты статьи [11] для исследования аналогичной системы без ограничений на длину очереди, то есть в случае, когда $m = \infty$.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему обслуживания $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$, которую формально опишем следующим образом. Пусть заданы последовательности независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{\alpha_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$ ($n \ge 1$), где α_n — время между поступлением $(n-1)$–ой и n–ой группы заявок, θ_n — число заявок в n–ой группе, а β_n — время обслуживания n–ой заявки, причём $\mathbf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$), $\mathbf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$ ($i \ge 1$), $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Если $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то заявки в систему поступают по одной.

Заявки обслуживаются по одной, обслуженная заявка покидает систему, а обслуживающее устройство немедленно начинает обслуживать заявку из очереди при её наличии или же ждёт поступления очередной группы заявок. Применяется дисциплина обслуживания FIFO. Очередь внутри одной группы заявок может быть организована произвольно, поскольку изучаемые нами характерисики не зависят от способа её организации.

В зависимости от числа заявок в момент начала обслуживания очередной заявки в системе применяются два режима обслуживания (основной или послепороговый) с функциями распределения времени обслуживания $F(x)$ и $\widetilde{F}(x)$ соответственно. Обозначим через $\xi(t)$ число заявок в системе в момент времени t и рассмотрим два порога $h_1 \le h_2$, где $h_1 \ge 0$, $h_2 \ge 1$. Если t — момент начала обслуживания очередной заявки и $\xi(t) > h_2$, то $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = \widetilde{F}(x)$ $(x \ge 0)$, $\widetilde{F}(0) = 0$, то есть применяется послепороговый режим обслуживания. Возвращение к основному режиму осуществляется в момент начала обслуживания очередной заявки, для которой $\xi(t) \le h_1$, а для случая $h_1 = 0$ — в момент начала обслуживания первой заявки после простоя системы (если для неё $\xi(t) \le h_2$). Если $h_1 = 0$, то послепороговый режим длится до освобождения системы. Для основного режима $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ $(x \ge 0)$, $F(0) = 0$. Итак, если в момент начала обслуживания заявки $\xi(t) \le h_1$ (здесь $h_1 \ge 1$), то применяется основной режим, а если $h_1 < \xi(t) \le h_2$, то для очередной заявки сохраняется режим обслуживания предыдущей заявки (кроме первой после периода простоя, если $h_1 = 0$). Обозначим описанную систему обслуживания через $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2), \widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2)/1$.

3. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Обозначим через $\mathbf{P}_{F,n}$ $(\mathbf{P}_{\widetilde{F},n})$ условную вероятность при условии, что в начальный момент времени в системе находится $n \ge 0$ $(n \ge h_1 + 1)$ заявок и начинается обслуживание заявки, время обслуживания которой распределено по закону $F(x)$ $\big(\widetilde{F}(x)\big)$, и через $\mathbf{E}$ $(\mathbf{P})$ условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что система начинает работать, когда прибывает первая группа заявок. Будем использовать следующие обозначения: $\eta(x)$ — число заявок, поступивших в систему на промежутке времени $[0; x)$; a_i^{k*} — k–кратная свёртка последовательности a_i; $\rho_k = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k\,\}$ — стационарное распределение числа заявок в системе; $a(s,\, z) = s + \lambda\big(1 - \alpha(z)\big)$. Пусть

$$f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF(x), \qquad M = \int\limits_0^\infty x dF(x) < \infty, \qquad \overline{F}(x) = 1 - F(x); \qquad b_1 = \sum_{k=1}^\infty k a_k < \infty;$$

$$\alpha(z) = \sum_{k=1}^\infty z^k a_k; \qquad \overline{a}_n = \sum_{k=n}^\infty a_k, \qquad \overline{p}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty p_k(s), \qquad \overline{q}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty q_k(s), \qquad \sum_{k=1}^0 c_k = 0.$$

Для $\mathrm{Re}\ s \ge 0$ определим последовательности $p_i(s)$ $(i = -1, 0, 1, \ldots)$ и $q_i(s)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ с помощью соотношений

$$\sum_{i=-1}^\infty z^i p_i(s) = \frac{f(a(s,z))}{z f(s)}\,, \qquad \sum_{i=0}^\infty z^i q_i(s) = \frac{1 - f(a(s,z))}{a(s,z)}\,, \tag{1}$$

то есть

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \frac{1}{f(s)} \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i+1\}\, dF(x) = \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x); \\ q_i(s) &= \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i\,\}\, \overline{F}(x)\, dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}(x)\, dx. \end{aligned} \tag{2}$$

Функции $R_k(s)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ определим с помощью равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(s) = \frac{z}{f\big(a(s,z)\big) - z}, \qquad |z| < \nu_-(s), \tag{3}$$

где $\nu_-(s)$ — единственный корень уравнения $f\big(a(s,z)\big) = z$ на промежутке $[0;\, 1]$.

Поскольку $\sum\limits_{i=-1}^{\infty} p_i(s) = 1$, то $p_i(s)$ $(i \geq -1)$ можно интерпретировать как распределение скачков некоторого непрерывного снизу случайного блуждания, которое зависит от параметра $s > 0$ и соответствует функции распределения $F(x)$ основного режима обслуживания.

Пусть $\rho = \lambda M b_1$, $\nu_- = \lim\limits_{s\to+0,\ \rho>1} \nu_-(s)$;

$$p_i = \lim_{s\to+0} p_i(s), \qquad R_i = \lim_{s\to+0} R_i(s), \qquad q_i = \lim_{s\to+0} q_i(s).$$

Тогда из равенств (1)–(3) получим:

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i = \frac{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{z}\,; \qquad p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k = \frac{z}{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) - z}\,, \qquad |z| < \min\{1,\, \nu_-\}\,;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i = \frac{1 - f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{\lambda(1-\alpha(z))}\,, \quad q_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}(x)\, dx, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = M.$$

Аналогично определим функции и постоянные, описывающие непрерывное снизу случайное блуждание, соответствующее распределению времени обслуживания $\widetilde{F}(x)$ послепорогового режима. Их будем помечать символом "волна например,

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\widetilde{F}(x), \qquad \widetilde{M} = \int_0^{\infty} x d\widetilde{F}(x) < \infty, \qquad \overline{\widetilde{F}}(x) = 1 - \widetilde{F}(x);$$

$$\widetilde{p}_i(s) = \frac{1}{\widetilde{f}(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, d\widetilde{F}(x);$$

$$\widetilde{q}_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{\widetilde{F}}(x)\, dx; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{q}_k = \widetilde{M}$$

и так далее.

Для последовательности $\{\widetilde{R}_n\}$ непосредственно из теоремы 1.5 [13, с. 38] вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $\widetilde{\rho} = \lambda \widetilde{M} b_1 < 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{R}_n = \frac{1}{1 - \widetilde{\rho}}\,. \tag{4}$$

Если же $\widetilde{\rho} \geq 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{R}_n = \infty$.

Введём обозначения:

$$R(h_1,h_2)=\frac{1}{R_{h_2-h_1+1}}\left(R_{h_2+1}-\sum_{n=1}^{h_2}a_nR_{h_2+1-n}\right);$$

$$r_k(h_2)=\sum_{i=1}^{h_2}R_ip_{k-i}-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\sum_{i=1}^{h_2-n}R_ip_{k-n-i}; \tag{5}$$

$$r_k(h_1,h_2)=r_k(h_2)-R(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{h_2-h_1}R_ip_{k-h_1-i};$$

$$P(n,h_2)=\sum_{i=1}^{h_2-n}R_i\left((n+i)\overline{p}_{h_2+1-n-i}-\sum_{k=1}^{h_2-n-i}kp_k\right).$$

Лемма 2. *Для последовательностей $r_k(h_2)$ и $r_k(h_1,h_2)$ выполняются равенства*

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty}r_k(h_2)=p_{-1}\left(R_{h_2+1}-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_nR_{h_2+1-n}\right)-\overline{a}_{h_2};$$

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty}r_k(h_1,h_2)=R(h_1,h_2)-\overline{a}_{h_2+1}. \tag{6}$$

Доказательство. Используя равенства [13, с. 50, с. 84]

$$\sum_{k=1}^{n}R_k\overline{p}_{n-k}=R_n-1,\qquad \sum_{k=1}^{n}R_kp_{n-k}=R_n-p_{-1}R_{n+1}\qquad (n\ge 1),$$

находим

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_2}R_ip_{k-i}=\sum_{i=1}^{h_2}R_i\overline{p}_{h_2-i}-\sum_{i=1}^{h_2}R_ip_{h_2-i}=p_{-1}R_{h_2+1}-1. \tag{7}$$

С помощью (5) из (7) получаем

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty}r_k(h_2)=\sum_{k=h_2+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_2}R_ip_{k-i}-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\sum_{k=h_2+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_2-n}R_ip_{k-n-i}$$

$$=p_{-1}R_{h_2+1}-1-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n(p_{-1}R_{h_2+1-n}-1)=p_{-1}\left(R_{h_2+1}-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_nR_{h_2+1-n}\right)-\overline{a}_{h_2};$$

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty}r_k(h_1,h_2)=\sum_{k=h_2+1}^{\infty}r_k(h_2)-R(h_1,h_2)\sum_{k=h_2+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_2-h_1}R_ip_{k-h_1-i}$$

$$=p_{-1}\left(R_{h_2+1}-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_nR_{h_2+1-n}\right)-\overline{a}_{h_2}$$

$$-\frac{1}{R_{h_2-h_1+1}}\left(p_{-1}R_{h_2-h_1+1}-1\right)\left(R_{h_2+1}-\sum_{n=1}^{h_2}a_nR_{h_2+1-n}\right)=R(h_1,h_2)-\overline{a}_{h_2+1}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Для последовательностей $r_k(h_2)$ и $r_k(h_1,h_2)$ выполняются равенства*

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty} kr_k(h_2) = (\rho-1+p_{-1})\sum_{i=1}^{h_2} R_i\overline{a}_{h_2+1-i} + P(0,h_2) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_nP(n,h_2); \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=h_2+1}^{\infty} kr_k(h_1,h_2) &= (\rho-1+p_{-1})T_0(h_1,h_2) + P(0,h_2)\\ &- \sum_{n=1}^{h_2-1} a_nP(n,h_2) - R(h_1,h_2)P(h_1,h_2),\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$T_0(h_1,h_2) = \sum_{i=1}^{h_2} R_i\overline{a}_{h_2+1-i} - R(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i.$$

Доказательство. Учитывая, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)p_k = \rho$, находим

$$\begin{aligned}\sum_{k=h_2+1}^{\infty} kp_{k-i} &= \sum_{k=h_2+1}^{\infty}(k-i+1)p_{k-i} + (i-1)\sum_{k=h_2+1}^{\infty} p_{k-i}\\ &= \rho - \sum_{k=0}^{h_2-i}(k+1)p_k + (i-1)\overline{p}_{h_2+1-i} = \rho-1+p_{-1}+i\overline{p}_{h_2+1-i} - \sum_{k=1}^{h_2-i} kp_k.\end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty} kr_k(h_2) = \sum_{i=1}^{h_2} R_i\sum_{k=h_2+1}^{\infty} kp_{k-i} - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i\sum_{k=h_2+1}^{\infty} kp_{k-n-i}\,;$$

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty} kr_k(h_1,h_2) = \sum_{k=h_2+1}^{\infty} kr_k(h_2) - R(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i\sum_{k=h_2+1}^{\infty} kp_{k-h_1-i}\,,$$

то отсюда с помощью (10) получаем (8), а с помощью (8) и (10) приходим к равенству (9). Лемма доказана. □

4. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть $\tau = \inf\{\,t \ge 0 : \xi(t) = 0\,\}$ обозначает первый период занятости для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1$. Для первого периода занятости системы с ограниченным объёмом накопителя $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$, изученной в [11], будем использовать обозначение $\tau(m)$.

Теорема 1. *Если $\widetilde{\rho} < 1$, то*

$$\lim_{m\to\infty}\mathbf{E}\,\tau(m) = MT_0(h_1,h_2) + \widetilde{M}T_1(\infty,h_1,h_2), \tag{11}$$

где

$$T_1(\infty,h_1,h_2) = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\left(b_1 - \sum_{k=1}^{h_2} ka_k - h_1R(h_1,h_2) + \sum_{k=h_2+1}^{\infty} kr_k(h_1,h_2)\right).$$

а $\sum\limits_{k=h_2+1}^{\infty} kr_k(h_1,h_2)$ *определяется согласно* (9).

Доказательство. Используем формулу, полученную в [11] для средней продолжительности периода занятости системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$

$$\mathbf{E}\,\tau(m) = M\,T_0(h_1,h_2) + \widetilde{M}T_1(m,h_1,h_2), \tag{12}$$

где

$$T_1(m,h_1,h_2) = R(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{R}_i - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} r_n(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i + \overline{a}_{m+1}. \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (11), видим, что для доказательства теоремы достаточно проверить равенство

$$\lim_{m\to\infty} T_1(m,h_1,h_2) = T_1(\infty,h_1,h_2).$$

Выполним преобразования, которые позволят перейти в (13) к пределу при $m\to\infty$. Имеем:

$$\begin{aligned} S(m) &= R(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{R}_i - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} r_n(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_n\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i \\ &= \sum_{k=0}^{m-h_1-1}\widetilde{R}_{m-h_1-k}\Bigg(R(h_1,h_2) - \sum_{n=h_2+1}^{h_1+k} r_n(h_1,h_2) - \sum_{n=h_2+1}^{h_1+k} a_n\Bigg) \\ &= \sum_{j=1}^{m-h_1}\widetilde{R}_j\Bigg(R(h_1,h_2) - \sum_{i=h_2+1}^{m-j} r_i(h_1,h_2) - \sum_{n=h_2+1}^{m-j} a_n\Bigg). \end{aligned}$$

Используя равенство (6), отсюда получим

$$\begin{aligned} S(m) &= R(h_1,h_2)\sum_{j=m-h_2}^{m-h_1}\widetilde{R}_j + \sum_{j=1}^{m-h_2-1}\widetilde{R}_j\Bigg(\sum_{i=m-j+1}^{\infty} r_i(h_1,h_2) + \overline{a}_{m-j+1}\Bigg) \\ &= R(h_1,h_2)\sum_{j=h_1}^{h_2}\widetilde{R}_{m-j} + \sum_{j=h_2+1}^{m-1}\widetilde{R}_{m-j}\Bigg(\sum_{i=j+1}^{\infty} r_i(h_1,h_2) + \overline{a}_{j+1}\Bigg). \end{aligned} \tag{14}$$

Переходя в (14) к пределу при $m\to\infty$, используем соотношение (4). Тогда

$$\lim_{m\to\infty} S(m) = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\Bigg((h_2-h_1+1)R(h_1,h_2) + \sum_{j=h_2+1}^{\infty}\Bigg(\sum_{i=j+1}^{\infty} r_i(h_1,h_2) + \overline{a}_{j+1}\Bigg)\Bigg). \tag{15}$$

Поскольку

$$\sum_{j=h_2+1}^{\infty}\sum_{i=j+1}^{\infty} r_i(h_1,h_2) = \sum_{k=h_2+2}^{\infty}(k-h_2-1)r_k(h_1,h_2);$$

$$\sum_{j=h_2+1}^{\infty}\overline{a}_{j+1} = b_1 - \sum_{k=1}^{h_2+1} ka_k - (h_2+1)\overline{a}_{h_2+2},$$

то снова используя (6), из (15) получим

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} S(m) &= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\Bigg((h_2-h_1+1)R(h_1,h_2) + b_1 - \sum_{k=1}^{h_2+1} ka_k - (h_2+1)\overline{a}_{h_2+2} \\ &+ \sum_{k=h_2+1}^{\infty}(k-h_2-1)r_k(h_1,h_2)\Bigg) = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\Bigg(b_1 - \sum_{k=1}^{h_2} ka_k - h_1R(h_1,h_2) + \sum_{k=h_2+1}^{\infty} kr_k(h_1,h_2\Bigg). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Введём обозначения: $\xi_m(t)$ — число заявок в системе $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2), \widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ в момент времени t,

$$\varphi_{F,n}(t,\, k) = \mathbf{P}_{F,n}\{\,\xi(t) = k,\ \tau > t\,\} \qquad (\,n,\, k \geq 1\,);$$

$$\varphi_{\widetilde{F},n}(t,\, k) = \mathbf{P}_{\widetilde{F},n}\{\,\xi(t) = k,\ \tau > t\,\} \qquad (\,n \geq h_1 + 1;\ k \geq 1\,);$$

$$\varphi_n(t,\, k) = \begin{cases} \varphi_{F,n}(t,\, k), & n = \overline{1, h_2}\,; \\ \varphi_{\widetilde{F},n}(t,\, k), & n \geq h_2 + 1\,; \end{cases}$$

$$\Phi_n(s,\, k) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}\varphi_n(t,\, k)\, dt, \qquad \widetilde{\Phi}_n(s,\, k) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}\varphi_{\widetilde{F},n}(t,\, k)\, dt, \qquad \mathrm{Re}\ s > 0;$$

$$\varphi^{(m)}_{F,n}(t,\, k) = \mathbf{P}_{F,n}\{\,\xi_m(t) = k,\ \tau(m) > t\,\} \qquad (\,1 \leq n,\, k \leq m + 1\,);$$

$$\varphi^{(m)}_{\widetilde{F},n}(t,\, k) = \mathbf{P}_{\widetilde{F},n}\{\,\xi_m(t) = k,\ \tau(m) > t\,\} \qquad (h_1 + 1 \leq n \leq m + 1;\ 1 \leq k \leq m + 1\,);$$

$$\varphi^{(m)}_n(t,\, k) = \begin{cases} \varphi^{(m)}_{F,n}(t,\, k), & n = \overline{1, h_2}\,; \\ \varphi^{(m)}_{\widetilde{F},n}(t,\, k), & n = \overline{h_2 + 1, m + 1}\,; \end{cases}$$

$$\Phi^{(m)}_n(s,\, k) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}\varphi^{(m)}_n(t,\, k)\, dt, \qquad \widetilde{\Phi}^{(m)}_n(s,\, k) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}\varphi^{(m)}_{\widetilde{F},n}(t,\, k)\, dt, \qquad \mathrm{Re}\ s > 0.$$

$$\Phi^{(m)}_n(k) = \lim_{s\to+0} \Phi^{(m)}_n(s,\, k), \quad \Phi_n(k) = \lim_{s\to+0} \Phi_n(s,\, k); \quad \Phi^{(m)}_n = \sum_{k=1}^{m+1} \Phi^{(m)}_n(k), \quad \Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n(k).$$

Лемма 4. *Выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{m\to\infty} \Phi^{(m)}_n(k) = \Phi_n(k) \qquad (n,\, k \geq 1), \tag{16}$$

причём

$$\begin{aligned} \Phi_n(k) &= \frac{1}{R_{h_2+1}}\big(R_{h_2+1-n}D_0(k) + (R_{h_2+1} - R_{h_2+1-n})\Phi^{(m)}_m(k)\big) - D_n(k) \qquad (1 \leq n \leq h_2); \\ \Phi_n(k) &= \Phi^{(m)}_m(k) - \sum_{i=1}^{k-n} \widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-n-i} \qquad (n \geq h_2 + 1), \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^{(m)}_m(k) &= \sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} \qquad (1 \leq k \leq h_1); \qquad \Phi^{(m)}_m(k) = \sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} \\ &+ \frac{R_{h_2+1}}{R_{h_2-h_1+1}}\left(\sum_{i=1}^{k-h_1} \widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-h_1-i} - \sum_{i=1}^{k-h_1} R_i q_{k-h_1-i}\right) \quad (h_1 + 1 \leq k \leq h_2); \\ \Phi^{(m)}_m(k) &= \sum_{i=1}^{h_2} R_i q_{k-i} - \sum_{u=1}^{h_2} R_u \sum_{j=h_2+1}^{k-1} p_{j-u} \sum_{i=1}^{k-j} \widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-j-i} \\ &+ \frac{R_{h_2+1}}{R_{h_2-h_1+1}}\left(\sum_{i=1}^{k-h_1} \widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-h_1-i} - \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i q_{k-h_1-i}\right. \\ &+ \left.\sum_{u=1}^{h_2-h_1} R_u \sum_{j=h_2+1}^{k-1} p_{j-h_1-u} \sum_{i=1}^{k-j} \widetilde{R}_i\widetilde{q}_{k-j-i}\right) \quad (k \geq h_2 + 1); \end{aligned} \tag{18}$$

$$D_n(k) = \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \qquad (1 \le k \le h_2);$$

$$D_n(k) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i q_{k-n-i} - \sum_{u=1}^{h_2-n} R_u \sum_{j=h_2+1}^{k-1} p_{j-n-u} \sum_{i=1}^{k-j} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-j-i} \qquad (k \ge h_2+1).$$

Доказательство. С помощью формулы полной вероятности запишем равенства

$$\begin{aligned} \varphi_n(t,\, k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = j\,\}\, \varphi_{n+j-1}(t-x,\, k)\, dF(x) \\ &\qquad + \mathbf{P}\{\eta(t) = k-n\,\} \overline{F}(t) \qquad (1 \le n \le h_2); \\ \varphi_{\widetilde{F},n}(t,\, k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = j\,\}\, \varphi_{\widetilde{F},n+j-1}(t-x,\, k)\, d\widetilde{F}(x) \\ &\qquad + \mathbf{P}\{\eta(t) = k-n\,\} \overline{\widetilde{F}}(t) \qquad (n \ge h_1+1) \end{aligned} \tag{19}$$

с очевидными граничными условиями

$$\varphi_0(t,\, k) = 0, \qquad \varphi_{\widetilde{F},h_1}(t,\, k) = \varphi_{h_1}(t,\, k). \tag{20}$$

После перехода в равенствах (19) и (20) к преобразованиям Лапласа получим систему уравнений для определения функций $\Phi_n(s,\, k)$ и $\widetilde{\Phi}_n(s,\, k)$

$$\begin{aligned} \Phi_n(s,\, k) &= f(s) \sum_{j=0}^{\infty} p_{j-1}(s) \Phi_{n+j-1}(s,\, k) + q_{k-n}(s) \qquad (1 \le n \le h_2), \\ \widetilde{\Phi}_n(s,\, k) &= \widetilde{f}(s) \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{p}_{j-1}(s) \widetilde{\Phi}_{n+j-1}(s,\, k) + \widetilde{q}_{k-n}(s) \qquad (n \ge h_1+1); \\ \Phi_0(s,\, k) &= 0, \qquad \widetilde{\Phi}_{h_1}(s,\, k) = \Phi_{h_1}(s,\, k). \end{aligned} \tag{21}$$

После перехода к пределу при $s \to +0$ уравнения (21) приобретают вид

$$\begin{aligned} \Phi_n(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{j-1} \Phi_{n+j-1}(k) + q_{k-n} \qquad (1 \le n \le h_2), \\ \widetilde{\Phi}_n(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{p}_{j-1} \widetilde{\Phi}_{n+j-1}(k) + \widetilde{q}_{k-n} \qquad (n \ge h_1+1); \\ \Phi_0(k) &= 0, \qquad \widetilde{\Phi}_{h_1}(k) = \Phi_{h_1}(k). \end{aligned} \tag{22}$$

Пользуясь уравнениями для функций $\Phi_n^{(m)}(s,\, k)$ и $\widetilde{\Phi}_n^{(m)}(s,\, k)$, приведёнными в [11], получим

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{m-n} p_{j-1} \Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + \overline{p}_{m-n} \Phi_m^{(m)}(k) + f_n(k,m) \qquad (1 \le n \le h_2), \\ \widetilde{\Phi}_n^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{m-n} \widetilde{p}_{j-1} \widetilde{\Phi}_{n+j-1}^{(m)}(k) + \overline{\widetilde{p}}_{m-n} \Phi_m^{(m)}(k) + \widetilde{f}_n(k,m) \qquad (h_1+1 \le n \le m), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$f_n(k,m) = q_{k-n} + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n}, \qquad \widetilde{f}_n(k,m) = \widetilde{q}_{k-n} + I\{k = m+1\}\widetilde{\overline{q}}_{m+2-n}.$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 либо 0, в зависимости от того, состоялось событие A или нет.

С помощью формулы (18) работы [11] находим $\Phi_m^{(m)}(k)$ в виде (18). Устремляя s к $+0$, а потом m к ∞ в выражениях (19) для функций $\Phi_n^{(m)}(s,k)$, приведённых в [11], получим значения $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k)$ в виде правых частей равенств (17). Учитывая ограниченность функций $\Phi_m^{(m)}(k)$, которая вытекает из (18), можем утверждать, что пределы $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k)$ ограничены. Итак, в уравнениях (23) мы имеем право перейти к пределу при $m \to \infty$ и получим

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{j-1} \lim_{m\to\infty} \Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + q_{k-n} \qquad (1 \le n \le h_2), \\ \lim_{m\to\infty} \widetilde{\Phi}_n^{(m)}(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{p}_{j-1} \lim_{m\to\infty} \widetilde{\Phi}_{n+j-1}^{(m)}(k) + \widetilde{q}_{k-n} \qquad (n \ge h_1 + 1). \end{aligned} \tag{24}$$

Сравнивая (24) и (22) и учитывая, что $\Phi_n(k) = \widetilde{\Phi}_n(k)$ для $n \ge h_2 + 1$, приходим к выводу, что выполняются предельные соотношения (16). Лемма доказана. □

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} r_{kn}(h_1,h_2) &= \widetilde{r}_k(h_1,h_2) - \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i p_{k-n-i} + \frac{R_{h_2+1-n}}{R_{h_2-h_1+1}} \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i p_{k-h_1-i}\,; \\ \widetilde{r}_k(h_1,h_2) &= \sum_{i=1}^{h_2} R_i p_{k-i} - \frac{R_{h_2+1}}{R_{h_2-h_1+1}} \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i p_{k-h_1-i}\,; \\ R_n(h_1,h_2) &= \frac{R_{h_2+1} - R_{h_2+1-n}}{R_{h_2-h_1+1}}\,; \qquad P_n(h_1,h_2) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i - \frac{R_{h_2+1-n}}{R_{h_2-h_1+1}} \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i. \end{aligned}$$

Лемма 5. *Если $\widetilde{\rho} < 1$, то*

$$\lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)} = \Phi_n \qquad (n \ge 1), \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n &= M\Bigg(\sum_{i=h_2+1-n}^{h_2} R_i - R_n(h_1,h_2) \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i \Bigg) \\ &\quad + \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\rho}} \Bigg(\sum_{k=h_2+1}^{\infty} k r_{kn}(h_1,h_2) - h_1 R_n(h_1,h_2) \Bigg) \qquad (1 \le n \le h_2); \\ \Phi_n &= M P_0(h_1,h_2) + \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\rho}} \Bigg(\frac{n R_{h_2-h_1+1} - h_1 R_{h_2+1}}{R_{h_2-h_1+1}} + \sum_{k=h_2+1}^{\infty} k \widetilde{r}_k(h_1,h_2) \Bigg) \qquad (n \ge h_2 + 1); \end{aligned} \tag{26}$$

$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty} k r_{kn}(h_1,h_2) = \sum_{k=h_2+1}^{\infty} k \widetilde{r}_k(h_1,h_2) - (\rho - 1 + p_{-1}) P_n(h_1,h_2)$$

$$- P(n,h_2) + \frac{R_{h_2+1-n}}{R_{h_2-h_1+1}} P(h_1,h_2);$$
$$\sum_{k=h_2+1}^{\infty} k\widetilde{r}_k(h_1,h_2) = (\rho - 1 + p_{-1})P_0(h_1,h_2) + P(0,h_2) - \frac{R_{h_2+1}}{R_{h_2-h_1+1}} P(h_1,h_2). \tag{27}$$

Доказательство. Устремив s к $+0$, а потом вычислив сумму по k от 1 до $m+1$ в выражениях для функций $\Phi_n^{(m)}(s,k)$, приведённых в [11] (формулы (19)), получим

$$\begin{aligned}
\Phi_n^{(m)} &= M\Bigg(\sum_{i=h_2+1-n}^{h_2} R_i - R_n(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i\Bigg) \\
&\quad + \widetilde{M}\Bigg(R_n(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{R}_i - \sum_{k=h_2+1}^{m-1} r_{kn}(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-k}\widetilde{R}_i\Bigg) \qquad (1 \le n \le h_2); \\
\Phi_n^{(m)} &= MP_0(h_1,h_2) + \widetilde{M}\Bigg(\frac{R_{h_2+1}}{R_{h_2-h_1+1}}\sum_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{R}_i - \\
&\quad - \sum_{k=h_2+1}^{m-1}\widetilde{r}_k(h_1,h_2)\sum_{i=1}^{m-k}\widetilde{R}_i - \sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i\Bigg) \qquad (h_2+1 \le n \le m).
\end{aligned} \tag{28}$$

В предположении, что $\widetilde{\rho} < 1$, вычисление границ при $m \to \infty$ в правых частях равенств (28) осуществляется аналогично вычислению предела $\lim\limits_{m\to\infty} S(m)$ в доказательстве теоремы 1. В результате получим значения $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}$ в виде правых частей равенств (26). Доказательство соотношений (27) аналогично доказательству леммы 3. Используя определения $\Phi_n^{(m)}$, Φ_n, ограниченность пределов $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}$ и предельные соотношения (16), получим

$$\lim_{m\to\infty}\Phi_n^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_n^{(m)}(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\Phi_n^{(m)}(k) = \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_n(k) = \Phi_n.$$

Лемма доказана. □

Теорема 2. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то средняя продолжительность периода занятости системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1$ *ограничена и выполняется предельное соотношение*

$$\mathbf{E}\,\tau = \lim_{m\to\infty}\mathbf{E}\,\tau(m),$$

то есть $\mathbf{E}\,\tau$ *определяется в виде* (11).

Доказательство. В статье [11] доказано равенство

$$\mathbf{E}\,\tau(m) = \sum_{n=1}^{m} a_n\Phi_n^{(m)} + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}^{(m)}, \tag{29}$$

где $\Phi_{m+1}^{(m)} = \Phi_m^{(m)} + \widetilde{M}$. Для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2),\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)/1$ с помощью аналогичных рассуждений можно доказать, что

$$\mathbf{E}\,\tau = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\Phi_n.$$

Если $\widetilde{\rho} < 1$, то согласно теореме 1 предел $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{E}\,\tau(m)$ ограничен, поэтому учитывая предельные соотношения (25), из (29) получим

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\,\tau(m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n = \mathbf{E}\,\tau.$$

Теорема доказана. □

Теорема 3. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то для системы* $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2), \widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2)/1$ *стационарное распределение числа заявок определяется по формулам*

$$\begin{aligned}
&\rho_0 = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{E}\,\tau}\,;\\
&\rho_k = \lambda\rho_0\Big(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\Big) \qquad (\,k=\overline{1,\,h_1}\,);\\
&\rho_k = \lambda\rho_0\Big(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - R(h_1,h_2)\Big(\sum_{i=1}^{k-h_1} R_i q_{k-h_1-i}\\
&\qquad - \sum_{i=1}^{k-h_1} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-h_1-i}\Big) - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\Big) \qquad (\,k=\overline{h_1+1,\,h_2}\,);\\
&\rho_k = \lambda\rho_0\Big(\sum_{i=1}^{h_2} R_i q_{k-i} - R(h_1,h_2)\Big(\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i q_{k-h_1-i}\\
&\qquad - \sum_{i=1}^{k-h_1} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-h_1-i}\Big) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i q_{k-n-i} - \sum_{n=h_2+1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-n-i}\\
&\qquad - \sum_{n=h_2+1}^{k-1} r_n(h_1,h_2) \sum_{i=1}^{k-n} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-n-i}\Big) \qquad (\,k \geq h_2+1\,).
\end{aligned} \tag{30}$$

Доказательство. Согласно [11]

$$\begin{aligned}
&\rho_0(m) = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{E}\,\tau(m)}\,;\\
&\rho_k(m) = \lambda\rho_0(m)\Big(\sum_{n=1}^{m} a_n \Phi_n^{(m)}(k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}^{(m)}(k)\Big) \qquad (1 \leq k \leq m+1),
\end{aligned} \tag{31}$$

где $\rho_k(m) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi_m(t)=k\,\}$, $\Phi_{m+1}^{(m)}(k) = \Phi_m^{(m)}(k) + I\{k=m+1\}\widetilde{M}$. С помощью аналогичных рассуждений для системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2), \widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2)/1$ можно доказать равенства

$$\rho_0 = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{E}\,\tau}\,; \qquad \rho_k = \lambda\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(k) \qquad (k \geq 1).$$

Если $\widetilde{\rho} < 1$, то пределы $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_k(m)$ ограничены. Это вытекает из равенств (31) и ограниченности пределов $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{E}\,\tau(m)$ (теорема 1). Итак, учитывая предельные соотношения (16) и утверждение теоремы 2, из (31) получим

$$\lim_{m\to\infty} \rho_0(m) = \frac{1}{1+\lambda \mathbf{E}\,\tau} = \rho_0;$$

$$\lim_{m\to\infty} \rho_k(m) = \lambda\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k) = \lambda\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(k) = \rho_k \qquad (k \geq 1).$$

В результате предельного перехода при $m \to \infty$ в формулах для стационарных вероятностей $\rho_k(m)$ системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2), \widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2)/1/\mathrm{m}$ [11] получим равенства (30). Теорема доказана. □

5. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Зная стационарное распределение ρ_k ($k \geq 0$), стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{E}\,Q$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}\,w$ — найдём по формулам

$$\mathbf{E}\,Q = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho_{k+1}; \qquad \mathbf{E}\,w = \frac{\mathbf{E}\,Q}{\lambda b_1}.$$

Для приближённого вычисления $\mathbf{E}\,Q$ можно использовать равенство

$$\mathbf{E}\,Q \approx \mathbf{E}\,Q_{(N)} = \sum_{k=1}^{N-1} k\rho_{k+1} + N\overline{\rho}_{N+1}, \tag{32}$$

где

$$\overline{\rho}_{N+1} = 1 - \sum_{k=0}^{N} \rho_k.$$

Очевидно, что $\mathbf{E}\,Q_{(N)} < \mathbf{E}\,Q$.

Будем использовать рекуррентные соотношения [11]:

$$R_1 = \frac{1}{p_{-1}}, \qquad R_{k+1} = \frac{R_k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}}{p_{-1}} \qquad (\,k \geq 1\,);$$

$$q_0 = \frac{1 - f(\lambda)}{\lambda}, \qquad q_k = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda} \qquad (\,k \geq 1\,).$$

Аналогично определяются последовательности $\widetilde{q}_k$ ($k \geq 0$), $\widetilde{R}_k$ ($k \geq 1$).

Предположим, что заявки могут прибывать только по одной или по две ($a_1 + a_2 = 1$), время обслуживания основного режима распределено равномерно на отрезке $[a, b]$, а время обслуживания послепорогового режима распределено по закону Эрланга второго порядка с параметром $\widetilde{\mu}$. Средние значения времени обслуживания равны $M = (a+b)/2$ и $\widetilde{M} = 2/\widetilde{\mu}$ соответственно. Для этих распределений времени обслуживания формулы для вычисления последовательностей p_k и $\widetilde{p}_k$ ($k \geq -1$) приведены в [11].

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок ($h_1 = 3$, $h_2 = 5$)

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
ρ_k	0,2248	0,2050	0,1890	0,1521	0,1055	0,0654	0,0316	$\cdots$
ρ_k (GPSS World)	0,2250	0,2043	0,1890	0,1526	0,1057	0,0655	0,0314	$\cdots$

Рассмотрим пример со следующими числовыми данными: $a_1 = 0,75$; $a_2 = 0,25$; $\lambda = 1$; $a = 1/3$; $b = 1$; $\widetilde{\mu} = 6$. Тогда $M = 2/3$; $\widetilde{M} = 1/3$; $b_1 = 1,25$; $\widetilde{\rho} = 5/12$;

$$p_{-1} = 0,522978; \quad p_0 = 0,247068; \quad p_1 = 0,146046; \quad p_2 = 0,054226;$$
$$p_3 = 0,020568; \quad p_4 = 0,006433; \quad p_5 = 0,001959; \quad p_6 = 0,000536;$$

Таблица 2. Стационарные характеристики для различных значений h_1 и h_2

h_1	h_2	$\mathbf{E}\,\tau$	ρ_0	ρ_0 (GPSS)	$\mathbf{E}\,Q_{(6)}$	$\mathbf{E}\,Q$ (GPSS)
0	1	1,2835	0,4379	0,4390	0,5095	0,5090
0	2	1,8713	0,3483	0,3480	0,7192	0,7260
0	3	2,2401	0,3086	0,3090	0,8786	0,8820
0	4	2,5909	0,2785	0,2790	1,0593	1,0660
0	5	2,9115	0,2557	0,2560	1,2376	1,2520
1	1	1,8069	0,3563	0,3560	0,5915	0,5980
1	2	2,2086	0,3117	0,3120	0,7602	0,7660
1	3	2,5153	0,2845	0,2850	0,9135	0,9180
1	4	2,8174	0,2620	0,2620	1,0857	1,0990
1	5	3,0977	0,2440	0,2440	1,2601	1,2810
2	2	2,5605	0,2809	0,2810	0,8768	0,8820
2	3	2,7854	0,2624	0,2650	0,9981	1,0040
2	4	3,0356	0,2478	0,2480	1,1518	1,1650
2	5	3,2766	0,2338	0,2330	1,3133	1,3360
3	3	3,0672	0,2459	0,2470	1,1311	1,1370
3	4	3,2496	0,2353	0,2360	1,2485	1,2600
3	5	3,4489	0,2248	0,2250	1,3892	1,4110
4	4	3,4729	0,2236	0,2240	1,3792	1,3940
4	5	3,6180	0,2165	0,2170	1,4852	1,5080
5	5	3,7944	0,2086	0,2090	1,6054	1,6380

$$
\begin{aligned}
&R_1 = 1,912126; \quad R_2 = 2,752890; \quad R_3 = 3,429362; \quad R_4 = 3,970226;\\
&R_5 = 4,397623; \quad R_6 = 4,735180; \quad R_7 = 5,001618; \quad R_8 = 5,211925;\\
&\widetilde{p}_{-1} = 0,734694; \quad \widetilde{p}_0 = 0,157434; \quad \widetilde{p}_1 = 0,077780; \quad \widetilde{p}_2 = 0,020483;\\
&\widetilde{p}_3 = 0,006910; \quad \widetilde{p}_4 = 0,001913; \quad \widetilde{p}_5 = 0,000568; \quad \widetilde{p}_6 = 0,000158;\\
&\widetilde{R}_1 = 1,361111; \quad \widetilde{R}_2 = 1,560957; \quad \widetilde{R}_3 = 1,646048; \quad \widetilde{R}_4 = 1,684528;\\
&\widetilde{R}_5 = 1,701278; \quad \widetilde{R}_6 = 1,708617; \quad \widetilde{R}_7 = 1,711815; \quad \widetilde{R}_8 = 1,713209.
\end{aligned}
$$

В строке "ρ_k" табл. 1 записаны стационарные вероятности ρ_k, вычисленные по формулам (30) для значений порогов $h_1 = 3$, $h_2 = 5$. В нижней строке этой таблицы для сравнения приведены значения соответствующих вероятностей, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [14, 15] для значения времени $t = 10^6$. В табл. 2 приведены значения стационарных характеристик для различных значений порогов h_1, h_2. Представленные здесь значения $\mathbf{E}\,\tau$ вычислены по формуле (11), стационарная вероятность простоя системы ρ_0 найдена согласно (30), а приближённое значение $\mathbf{E}\,Q$ — по формуле (32) при $N = 6$. В табл. 2 также приведены значения ρ_0 и $\mathbf{E}\,Q$, найденные с помощью GPSS World для значения времени моделирования $t = 10^6$. Сравнение значений $\mathbf{E}\,Q$, полученных с помощью аналитической и имитационной моделей, показывает, что при $N = 6$ относительная погрешность при использовании формулы (32) для приближённого вычисления $\mathbf{E}\,Q$ не превышает 2%.

Анализируя даные табл. 2, видим, что при фиксированном значении порога h_1 с возрастанием значения h_2 монотонно возрастают среднее значение периода занятости $\mathbf{E}\,\tau$ и средняя длина очереди $\mathbf{E}\,Q$ и монотонно убывает вероятность простоя системы ρ_0. Для фиксированного значения суммы $h_1 + h_2$ при различных сочетаниях значений h_1 и h_2 соответствующие значения $\mathbf{E}\,\tau$ и ρ_0 незначительно отличаются друг от друга, а разброс значений $\mathbf{E}\,Q$ более существенен. Если $h_1 + h_2 = const$, то $\mathbf{E}\,Q$ убывает с уменьшением h_2 для всех сочетаний значений h_1 и h_2, а ρ_0 возрастает (соответственно $\mathbf{E}\,\tau$ убывает) при условии, что рассматриваются только те значения h_1 и h_2, для которых $h_1 \neq h_2$. Если же рассматривать и случай $h_1 = h_2$, то цепочка соответствующих неравенств выглядит, например, так: $\rho_0(1;5) < \rho_0(3;3) < \rho_0(2;4)$ (в скобках представлены соответствующие значения h_1 и h_2).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные, приведённые в табл. 2, показывают, что применение двухпороговой гистерезисной стратегии открывавет больше возможностей для повышения эффективности функционирования рассматриваемой системы обслуживания по сравнению со стратегией с одним порогом переключения интенсивности обслуживания.

7. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММЫ ДЛЯ GPSS WORLD

```
Lam EQU 1        ; значение λ
Myu EQU 6        ; значение μ̃
AH1 EQU 3        ; порог h1
AH2 EQU 5        ; порог h2
TIME EQU 1000000        ; время моделирования
QQQ TABLE Q$QQ,0,1,70        ; гистограмма распределения длины очереди
GENERATE 1
TABULATE QQQ
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))        ; входной поток
TRANSFER 750,,LB1        ; значение a1
SPLIT 2,LB1        ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
LB1 QUEUE QQ
GATE NU SYS,LB_SE        ;система свободна? (для h1 = 0)
LOGIC S KLU        ;включить ключ (для h1 = 0)
LB_SE SEIZE SYS
DEPART QQ
ADVANCE 0.0000001   ; задержка для перекл. на режим 2 в случае поступл. двух заявок (h2 = 1)
TEST L Q$QQ,AH2,LB_R        ; длина очереди меньше h2?
TEST E Q$QQ,(AH1-1),LBL        ; длина очереди равна h1 − 1?
LOGIC S KLU        ; включить ключ
TRANSFER ,LB_ADV
METL GATE LS KLU,LBMU        ; включён ли ключ?
TRANSFER ,LB_ADV
LB_R LOGIC R KLU        ; выключить ключ
LBMU ADVANCE((Exponential(5,0,(1/Myu)))+(Exponential(5,0,(1/Myu))))  ; обслуж. (режим 2)
TRANSFER ,LB2
LB_ADV ADVANCE (Uniform(105,1/3,1))   ; обслуживание (основной режим)
LB2 RELEASE SYS
OUT TERMINATE
GENERATE ,,,1
LOGIC S KLU        ; включить ключ
TERMINATE
GENERATE TIME
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Choi B. D., Choi D. I. Queueing system with queue length dependent service time and its application to cell discarding scheme in ATM networks. *IEEE Proc.–Commun.*, 1996, vol. 143, № 1, pp. 5–11.
2. Choi D., Knessl C., Tier C. A queueing system with queue length dependent service times with applications to cell discarding in ATM networks. *J. of Appl. Math. and Stoch. Anal.*, 1999, vol. 12, № 1, pp. 35–62.
3. Choi B. D., Kim Y. Ch., Shin Y., Pearce Ch. E. M. The $M^X/G/1$ queue with length dependent service times. *J. of Appl. Math. and Stoch. Anal.*, 2001, vol. 14, № 4, pp. 399–419.
4. Li S. Q. Overload control in a finite message storage buffer. *IEEE Trans. Commun.*, 1989, vol. 37, № 12, pp. 1330–1338.
5. Sriram K., Lucantoni D. M. Traffic smoothing effects of bit dropping in a packet voice multiplexer. *IEEE Trans. Commun.*, 1989, vol. 37, № 7, pp. 703–712.
6. Sriram K., McKinney R. S., Sherif M. H. Voice packetization and compression in broadband ATM networks. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 1991, vol. 9, № 3, pp. 294–304.
7. Sriram K. Methodologies for bandwidth allocation, transmission scheduling and congestion avoidance in broadband ATM networks. *Computer Networks and ISDN Systems*, 1993, vol. 26, № 1, pp. 43–69.
8. Nishimura S., Jiang Y. An M/G/1 vacation model with two service modes. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1995, vol. 9, № 3, pp. 355–374.
9. Dudin A. Optimal control for an $M^x/G/1$ queue with two operation modes. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1997, vol. 11, № 2, pp. 255–265.
10. Nobel R. D., Tijms H. C. Optimal control for an $M^X/G/1$ queue with two service modes. *European Journal of Operational Research*, 1999, vol. 113, № 3, pp. 610–619.
11. Жерновый К. Ю., Жерновый Ю. В. Система $M^\theta/G/1/m$ с двухпороговой гистерезисной стратегией переключения интенсивности обслуживания. *Информационные процессы*, 2012, т. 12, № 2, стр. 127–140.
12. Королюк В. С. *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.* Киев: Наукова думка, 1975.
13. Братійчук А. М. *Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою.* Кандидатська дисертація, Київ: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2008.
14. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.
15. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.

The system $M^\theta/G/1$ with a hysteretic switching intensity of service

Zhernovyi K. Yu., Zhernovyi Yu. V.

We consider the $M^\theta/G/1$ queue with two service modes (basic and postthreshold) with the distribution functions of service time $F(x)$ and $\widetilde{F}(x)$ respectively. The postthreshold mode is used if at the beginning of service of the next customer the number of customers in the system $\xi(t)$ satisfies the condition $\xi(t) > h_2$. Return to the basic mode carried out at the beginning of service of the next customer, if $\xi(t) \le h_1$, where $h_1 \le h_2$. The mean duration of the busy time is found, and formulas for the stationary distribution of number of customers in the system and stationary characteristics of queue are obtained. The results are verified using simulation models constructed with the assistance of tools GPSS World.

KEYWORDS: queueing system, batch arrival of customers, switching the intensity of service, hysteretic strategy, the stationary distribution of the number of customers.