Информационные процессы, Том 12, № 3, 2012, стр. 253–307.

Модулярные инварианты циклических групп

С.А. Степанов

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
sa-stepanov@iitp.ru

Поступила в редколлегию 26.06.2012

Аннотация—Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле, $V = \mathbb{F}x_1 + \cdots + \mathbb{F}x_n$ – векторное пространство над $\mathbb{F}$ размерности n, и $G \leq GL(n, \mathbb{F})$ – конечная группа, действующая на пространстве V посредством $\mathbb{F}$ -линейных преобразований базисных элементов $x_1, \ldots, x_n$. Далее, пусть $V^{\oplus m} = V \oplus \cdots \oplus V$ означает m-кратную прямую сумму пространства V, на которую группа G действует диагональным образом. В таком случае, группа G естественным образом действует на симметрической градуированной алгебре $A_{mn} = \mathbb{F}[x_{i1}, \ldots, x_{in} \mid 1 \leq i \leq m]$. Пусть A_{mn}^G обозначает подалгебру инвариантов полиномиальной алгебры A_{mn} относительно действия группы G. Классический результат Эммы Нётер [8], [9] утверждает, что в так называемом немодулярном случае, когда характеристика p поля $\mathbb{F}$ не делит порядок $|G|$ группы G (в частности, когда char $\mathbb{F} = 0$), кольцо A_{mn}^G порождается, как $\mathbb{F}$-алгебра, однородными многочленами над $\mathbb{F}$ степени не выше $|G|$, независимо от того насколько велико может быть m. С другой стороны, из работ Ричмана [10]–[12] следует, что указанный результат, однако, не выполняется в так называемом модулярном случае, когда характеристика p поля $\mathbb{F}$ делит порядок $|G|$ группы G. Пусть $p > 2$ - простое число, $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ - конечное поле, состоящее из p элементов, H – циклическая группа порядка p, действующая на линейном $\mathbb{F}_p$-пространстве V размерности n, и A_{mn}^H- подалгебра инвариантов полиномиальной алгебры $A_{mn} = \mathbb{F}_p[x_{i1}, \ldots, x_{in} \mid 1 \leq i \leq m]$ относительно группы H. В данной работе дается дальнейшее развитие метода орбитальных сумм, предложенного автором в работе [16] и определяется полная система порождающих элементов алгебры A_{mn}^H в случае, когда $n = 3$. Кроме того, указывается нижняя граница для максимально возможной степени однородных инвариантов, образующих полную систему образующих элементов алгебры A_{mn}^H. Полученные в работе результаты расширяют соответствующие результаты Ричмана [10]–[12], результаты Кэмпбелла–Хагеса [1] для $n = 2$, а также более общие результаты автора [16], касающиеся случая циклических групп.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть m, n – положительные целые числа, R – коммутативное кольцо с единичным элементом 1, и

$$A_{mn} = R[x_{11}, \ldots, x_{m1}; \ldots; x_{1n}, \ldots, x_{mn}]$$

– алгебра многочленов над R от n векторных переменных

$$(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, (x_{1n}, \ldots, x_{mn}).$$

Симметрическая группа S_n действует на элементы алгебры A_{mn} как группа R-автоморфизмов по правилу: $\sigma(x_{ij}) = x_{i,\sigma(j)}$, $\sigma \in S_n$. Обозначим через $A_{mn}^{S_n}$ подалгебру инвариантов алгебры A_{mn} относительно действия группы S_n и определим поляризованные элементарные симметрические многочлены $u_{r_1,\ldots,r_m} \in A_{mn}^{S_n}$ при помощи следующего формального тождества:

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + x_{1j}z_1 + \cdots + x_{mj}z_m) = 1 + \sum_{1 \leq r_1 + \cdots + r_m \leq n} u_{r_1,\ldots,r_m} z_1^{r_1} \cdots z_m^{r_m}.$$

Элементы алгебры $A_{mn}^{S_n}$ обычно называются *векторными инвариантами* группы S_n. Если R – нетерово кольцо, то из теоремы конечности Гильберта–Нётер [7], [8] следует, что $A_{mn}^{S_n}$ является конечно порожденной коммутативной R-алгеброй и, кроме того, алгебра A_{mn} конечно порождена как модуль над $A_{mn}^{S_n}$; более того, если каждое ненулевое целое обратимо в кольце R, то теорема Г. Вейля [17] утверждает, что инварианты $u_{r_1,\dots,r_m}$ образуют полную систему образующих алгебры $A_{mn}^{S_n}$ над R. Последний результат допускает следующее обобщение (Ричман [12]): если порядок $n!$ группы S_n обратим в кольце R, то $A_{mn}^{S_n}$ порождается, как R-алгебра, элементарными симметрическими многочленами $u_{r_1,\dots,r_m}$ степени не выше n.

Пусть $A = R[x_1, \dots, x_n]$ - конечно порожденная коммутативная R-алгебра, G – конечная группа её автоморфизмов над R и A^G – подалгебра полиномиальных инвариантов группы G. Если $z_1, \dots, z_n$ – коммутирующие переменные, положим

$$P(z_1, \dots, z_n) = \prod_{\sigma \in G} (1 + \sigma(x_1)z_1 + \dots + \sigma(x_n)z_n)$$

и обозначим через $\beta(A^G)$ наименьшее положительно целое число, для которого A^G может быть порождена как R- алгебра многочленами степени не выше β. Если каждое ненулевое целое обратимо в R, то классический результат Э. Нётер [8], [9] утверждает, что алгебра A^G порождается над R коэффициентами многочлена $P(z_1, \dots, z_n)$, а значит $\beta(A^G) \le |G|$. Последнее неравенство известно как *граница Нётер*. Упомянутый выше результат Ричмана [12] и стандартные аргументы, основанные на использовании отображения Э. Нётер [9], показывают, что граница Нётер $\beta(A^G) \le |G|$ выполняется при много более слабом предположении, что число $|G|!$ обратимо в R. Недавний результат Флейшмана [5] показывает, что последнее неравенство выполняется при значительно более слабом условии, что порядок $|G|$ группы G обратим в кольце R.

Пусть $\mathbb{F}$ – поле, $A_n = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ – конечно порожденная коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра, G – конечная группа автоморфизмов алгебры A_n над $\mathbb{F}$, и A_n^G – подалгебра инвариантов алгебры A_n относительно действия группы G. Если характеристика p поля $\mathbb{F}$ положительна и делит $|G|$, мы говорим о *модулярном случае*. Если же p не делит $|G|$, мы имеем дело с *немодулярным случаем*, который включает в себя классическую теорию полиномиальных инвариантов над алгебраически замкнутыми полями характеристики нуль. Почти весь математический аппарат, обычно используемый в немодулярном случае (см., например, [3], [13], [14]) отсутствует в модулярном случае: свойство Коэна–Маколея вообще говоря не выполняется , отсутствует оператор Рейнольдса (усреднение по $|G|$) и отсутствует формула Молина для производящих рядов Пуанкаре. Тем не менее, если $\mathbb{F}$ является полем простой характеристики p, а H является p-силовской подгруппой группы G, то модулярный случай допускает интенсивное использование *обобщенных орбитальных классов Черна* соответствующих подгруппе H, в частности, орбитальных следов (*орбитальных сумм* мономов) и высших орбитальных классов (*орбитальных норм* мономов). Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ – простое конечное поле, состоящее из p элементов и H – циклическая группа порядка p, действующая линейно на векторном пространстве $V = \mathbb{F}_p x_1 + \dots + \mathbb{F}_p x_n$. Положим $A_{mn} = \mathbb{F}_p[V^{\oplus m}]$ и обозначим через A_{mn}^H подалгебру инвариантов алгебры A_{mn} относительно диагонального действия группы H на пространстве $V^{\oplus m} = V \oplus \dots \oplus V$. Оказывается, что существует $\mathbb{F}_p$-линейное пространство $\tilde{V}$, содержащее V в качестве линейного подпространства, и циклическая группа $\tilde{H}$ (тесно связанная с группой H и действующая линейно на $\tilde{V}$), такая что каждый инвариант $u \in A_{mn}^H$ может быть записан в виде некоторой специальной $\mathbb{F}_p$-линейной комбинации орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}(f)$, орбитальных норм $N_{\tilde{H}}(g)$ (соответствующих группе $\tilde{H}$), а также их произведений $S_{\tilde{H}}(f)N_{\tilde{H}}(g)$, для всевозможных мономов $f, g \in \mathbb{F}_p[\tilde{V}^m]$. Следует заметить, что если H – циклическая группа простого порядка p и $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$ – простое поле, состоящее из p элементов, то соответствующие орбитальные суммы $S_{\tilde{H}}(f)$ и орбитальные нормы $N_{\tilde{H}}(g)$ могут быть выписаны в явном виде, что дает возможность для конкретного указания вполне определенных систем порождающих элементов алгебры A_{mn}^H.

Наиболее значимое различие между немодулярным и модулярным случаями состоит в следующем: граница Э. Нётер не остается верной в модулярном случае. Впервые это обстоятельство было открыто в полной общности Ричманом [10] при изучении H-инвариантных многочленов алгебры $A_{m2} = \mathbb{F}_p[x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq m]$, где H – циклическая группа простого порядка p. В указанной статье он доказал, что $\beta(A_{m2}^H) \geq m(p-1)$. В более общей ситуации, когда G является конечной группой, порядок которой делится на простое число p, а A_{nm} – полиномиальная алгебра над произвольным полем $\mathbb{F}$ характеристики p, Ричман [11] доказал, что

$$\beta(A_{mn}^G) \geq \frac{m(p-1)}{p^{|G|-1} - 1}.$$

В случае перестановочных групп эта граница была затем улучшена Г. Кемпером [6] и автором [15] следующим образом: если $\mathbb{F}$ – поле простой характеристики p и $G \subset S_n$ – перестановочная группа, содержащая элемент порядка p^α, то

$$\beta(A_{mn}^G) \geq \max\{n, m(p^\alpha - 1)\}.$$

Этот результат означает, в частности, что если $R = \mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, то $\beta(A_{mn}^{S_n}) \geq \max\{n, m(n-1)/2\}$. Из недавнего результата Флейшмана [4] следует, что указанная выше нижняя граница $\beta(A_{mn}^G) \geq \max\{n, m(p^\alpha - 1)\}$ является точной: если $n = p^\alpha$ и $m > 1$, то

$$\beta(A_{mn}^{S_n}) \leq \max\{n, m(n-1)\}.$$

Последний результат может рассмотрен как некоторое усиление верхней границы Кэмпбелла–Хагеса–Поллака [2]

$$\beta(A_{mn}^{S_n}) \leq \max\{n, mn(n-1)/2\},$$

которая верна в общем случае для случае произвольной полиномиальной алгебры A_{mn} над коммутативным кольцом R.

Пусть m, n – положительные целые числа, $p > 2$ – простое число, $\mathbb{F}_p$ – конечное поле, состоящее из p элементов, и $V = \mathbb{F}_p x_1 + \cdots + \mathbb{F}_p x_n$ – векторное пространство над $\mathbb{F}_p$ размерности $n \geq 2$. Пусть $H = \langle \gamma \rangle \leq GL(n, \mathbb{F}_p)$ – циклическая группа порядка p и A_{mn}^H – подалгебра инвариантов полиномиальной алгебры

$$A_{mn} = \mathbb{F}_p[x_{i1}, \ldots, x_{in} \mid 1 \leq i \leq m]$$

относительно группы H. Мы предполагаем, что порождающая матрица γ группы H имеет следующий канонический вид

$$\gamma = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

с базисными Жордановыми блоками $J_1, J_2, \ldots, J_r$ размеров $n_1, n_2, \ldots, n_r$, соответственно. Заметим, что

$$n_1 + \cdots + n_r = n, \quad n_1 \cdots n_r \geq 2,$$

и

$$1 \leq n_i \leq p \quad \text{для всех} \quad 1 \leq i \leq r.$$

С данного момента мы предполагаем, что

$$n = 3, \quad r = 1, \quad n_1 = 3.$$

При этом предположении мы имеем

$$V = \mathbb{F}_p x_1 + \mathbb{F}_p x_2 + \mathbb{F}_p x_3,$$

$$A_{m3} = \mathbb{F}_p[V^m] = \mathbb{F}_p[x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} \mid 1 \le i \le m]$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

и

$$A_{m3}^H = \{u \in A_{m3} \mid \gamma(u) = u\}.$$

Для дальнейшего изложения нам потребуются следующие понятия. Положим

$$\tilde{i}_\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_\sigma),$$

где $1 \le i_1 < \cdots < i_\sigma \le m$, $1 \le \sigma \le m$, и рассмотрим

$$M = \{\tilde{i}_\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_\sigma) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_\sigma \le m, 1 \le \sigma \le m\}$$

как вполне упорядоченное множество, заданное отношением порядка "$\preceq$". Если

$$\sigma, \tau \in \{1 + 3l \mid l \ge 0\} \quad \text{or} \quad \sigma, \tau \in \{2 + 3l \mid l \ge 0\}$$

и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$, определим многочлены $x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},1}, x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},2}, x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3}$ при помощи следующих рекуррентных соотношений

$$x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},1} = x_{\tilde{i}_\sigma,1} x_{\tilde{i}_\tau,2} - x_{\tilde{i}_\sigma,2} x_{\tilde{i}_\tau,1}, \quad x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},2} = x_{\tilde{i}_\sigma,1} z_{\tilde{i}_\tau,3} - x_{\tilde{i}_\sigma,3} x_{\tilde{i}_\tau,1},$$

$$x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3} = x_{\tilde{i}_\sigma,2} x_{\tilde{i}_\tau,3} - x_{\tilde{i}_\sigma,3} x_{\tilde{i}_\tau,2}$$

и заметим, что

$$\tilde{\gamma}(x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},1}) = x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},1} + x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},2}, \quad \tilde{\gamma}(x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},2}) = x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},2} + x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3},$$

$$\tilde{\gamma}(x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3}) = x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3}$$

для $\sigma, \tau \in \{2 + 3l \mid l \ge 0\}$, и

$$\tilde{\gamma}(x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},1}) = x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},1} + x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},2} + x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3}, \quad \tilde{\gamma}(x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},2}) = x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},2} + x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3},$$

$$\tilde{\gamma}(x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3}) = x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3}$$

для $\sigma, \tau \in \{1 + 3l \mid l \ge 0\}$. Далее, положим

$$\zeta_{\tilde{i}_\sigma,2} = x_{\tilde{i}_\sigma,1}^p - x_{\tilde{i}_\sigma,1} x_{\tilde{i}_\sigma,3}^{p-1}, \quad \zeta_{\tilde{i}_\sigma,3} = x_{\tilde{i}_\sigma,2}^p - x_{\tilde{i}_\sigma,2} x_{\tilde{i}_\sigma,3}^{p-1}$$

и заметим, что

$$\tilde{\gamma}(\zeta_{\tilde{i}_\sigma,2}) = \zeta_{\tilde{i}_\sigma,2} + \zeta_{\tilde{i}_\sigma,3}, \quad \tilde{\gamma}(\zeta_{\tilde{i}_\sigma,3}) = \zeta_{\tilde{i}_\sigma,3}.$$

Кроме того, мы заметим, что

$$\zeta_{\tilde{i}_\sigma,3} = N^{(0)}_{\tilde{H}}(z_{\tilde{i}_\sigma,2}) = \prod_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\left(x_{\tilde{i}_\sigma,2} + \binom{\alpha}{1} x_{\tilde{i}_\sigma,3}\right).$$

Используем теперь указанные выше соотношения для того, чтобы определить следующие H-инварианты:

$$x_{i3}, \quad 1 \le i \le m, \quad x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3} = \det\begin{pmatrix} x_{\tilde{i}_\sigma,2} & x_{\tilde{i}_\tau,2} \\ x_{\tilde{i}_\sigma,3} & x_{\tilde{i}_\tau,3}\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где либо $\sigma, \tau \in \{1+3l \mid l \ge 1\}$, либо $\sigma, \tau \in \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma, \tau \le m$, и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$\zeta_{\tilde{i}_\sigma,3} = x^p_{\tilde{i}_\sigma,2} - x_{\tilde{i}_\sigma,2} x^{p-1}_{\tilde{i}_\sigma,3}, \quad \omega_{\tilde{i}_\sigma,3} = \zeta^p_{\tilde{i}_\sigma,2} - \zeta_{\tilde{i}_\sigma,2}\zeta^{p-1}_{\tilde{i}_\sigma,3}, \tag{2}$$

где $\sigma \in \{1+3l \mid l \ge 0\} \cup \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma \le m$;

$$u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = \det\begin{pmatrix} x_{\tilde{i}_\sigma,2} & x_{\tilde{i}_\tau,2} \\ x_{\tilde{i}_\sigma,3} & x_{\tilde{i}_\tau,3}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где либо $\sigma \in \{1+3l \mid l \ge 0\}$, $\tau \in \{2+3l \mid l \ge 0\}$, либо $\sigma \in \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $\tau \in \{1+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma, \tau \le m$, и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$\varphi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = \det\begin{pmatrix} x_{\tilde{i}_\sigma,2} & \zeta_{\tilde{i}_\tau,2} \\ x_{\tilde{i}_\sigma,3} & \zeta_{\tilde{i}_\tau,3}\end{pmatrix}, \quad \psi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = \det\begin{pmatrix} \zeta_{\tilde{i}_\sigma,2} & \zeta_{\tilde{i}_\tau,2} \\ \zeta_{\tilde{i}_\sigma,3} & \zeta_{\tilde{i}_\tau,3}\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\sigma, \tau \in \{1+3l \mid 0 \ge 1\} \cup \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma, \tau \le m$, и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$v_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = x_{\tilde{i}_\sigma,1}x_{\tilde{i}_\tau,3} + x_{\tilde{i}_\sigma,3}x_{\tilde{i}_\tau,1} - x_{\tilde{i}_\sigma,2}x_{\tilde{i}_\tau,2} - x_{\tilde{i}_\sigma,2}x_{\tilde{i}_\tau,3}, \tag{5}$$

где $\sigma, \tau \in \{1+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma, \tau \le m$, и $\tilde{i}_\sigma \preceq \tilde{i}_\tau$;

$$w_{(\tilde{i}_\rho,\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = \det\begin{pmatrix} x_{\tilde{i}_\rho,1} & x_{\tilde{i}_\sigma,1} & x_{\tilde{i}_\tau,1} \\ x_{\tilde{i}_\rho,2} & x_{\tilde{i}_\sigma,2} & x_{\tilde{i}_\tau,2} \\ x_{\tilde{i}_\rho,3} & x_{\tilde{i}_\sigma,3} & x_{\tilde{i}_\tau,3}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\rho, \sigma, \tau \in \{1+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \rho, \sigma, \tau \le m$, и $\tilde{i}_\rho \prec \tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$\varrho_{i,3} = \prod_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\left(x_{i1} + \binom{\alpha}{1}x_{i2} + \binom{\alpha}{2}x_{i3}\right), \tag{7}$$

где $1 \le i \le m$; а также

$$\begin{aligned} S_H(f') = \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\prod_{i=1}^{m}&\left(x_{i,1} + \binom{\alpha}{1}x_{i,2} + \binom{\alpha}{2}x_{i,3}\right)^{s_{i,1}} \\ &\times\left(x_{i,2} + \binom{\alpha}{1}x_{i,3}\right)^{s_{i,2}}\left(\zeta_{i,2} + \binom{\alpha}{1}\zeta_{i,3}\right)^{\sigma_{i,2}}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $0 \le s_{i,1}, s_{i,2}, \sigma_{i,2} \le p-1$.

Теорема 1. *Пусть $H \le GL(3, \mathbb{F}_p)$ – циклическая группа порядка p, порождаемая матрицей*

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Тогда H-инвариантные однородные многочлены (1)–(8) образуют полную систему образующих элементов алгебры A^H_{m3}. Другими словами, каждый элемент $u \in A^H_{m3}$ представим в виде многочлена над полем $\mathbb{F}_p$ от

$$x_{i3}, \quad x_{\tilde{i}_\sigma,3}, \quad \zeta_{\tilde{i}_\sigma,3}, \quad \omega_{\tilde{i}_\sigma,3}, \quad u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3},$$

$$\varphi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}, \quad \psi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}, \quad \upsilon_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}, \quad w_{(\tilde{i}_\rho,\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}, \quad \varrho_{i,3}, \quad S_H(f')\ ,$$

для всевозможных $i, \tilde{i}_\sigma, \tilde{i}_\rho, \tilde{i}_\tau$.

Следствие 1. *Если $m > 1$, то всякая система порождающих элементов алгебры A^H_{m3} содержит многочлен степени не ниже $m(p-1)$.*

Теорема 1 обеспечивает явную конструкцию порождающих элементов алгебры A^H_{m3} в виде орбитальных сумм и орбитальных норм мономов. Алгебра векторных инвариантов A^H_{m2} над полем $\mathbb{F}_p$, где $H \le GL(2, \mathbb{F}_p)$ является циклической группой порядка p, порожденной элементом

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix}\ ,$$

впервые была изучена Ричманом в работе [10]. В частности, он нашел минимальную систему образующих указанной алгебры при $p = 2$ и предположил, что аналогичная система должна порождать A^H_{m2} и в случае нечетного простого p. Позже эта гипотеза была доказана Кэмпбеллом и Хагесом [1]. Другим важным результатом последней работы является тот факт, что при $m > 2$ алгебра A^H_{m2} не является алгеброй Коэна–Маколея. Независимо, аналогичная порождающая система для алгебры A^H_{mn}, где $n = 2r > 2$ и $H \le GL(n, \mathbb{F}_p)$ циклическая подгруппа порядка p, порожденная матрицей

$$\gamma = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

с базисными Жордановыми блоками $J_1, J_2, \dots, J_r$ размеров $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 2$, была указана автором в работе [16].

В принципе, результат Теоремы 1 может быть распространен на общий случай алгебры A^H_{mn} многочленов $f \in A_{mn}$, которые инвариантны относительно произвольной циклической подгруппы $H \le GL(n, \mathbb{F}_p)$ порядка p, порожденной $n \times n$ матрицей

$$\gamma = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

с произвольными базисными Жордановыми блоками $J_1, J_2, \dots, J_r$ размеров $n_1, n_2, \dots, n_r$, соответственно. Более того, разработанный в данной работе метод дает возможность указать нижнюю границу для максимальной возможной степени порождающих элементов в полной порождающей системе алгебры A^G_{mn} в общем случае, когда $G \leq GL(n, \mathbb{F}_p)$ является произвольной группой, содержащей циклическую подгруппу H прядка p в качестве подгруппы. Однако, сравнение результатов данной работы с результатами работ [1] и [16] показывает, что число элементов каждой порождающей системы алгебры A^H_{mn} достаточно быстро возрастает одновременно с ростом размеров $n_1, n_2, \ldots, n_r$ базисных Жордановых блоков матрицы γ. Поэтому, при достаточно большом p и достаточно больших $n_1, n_2, \ldots, n_r$ явное указание систем порождающих элементов алгебры A^H_{mn} представляется весьма затруднительным.

В заключение мы кратко объясним основные идеи, лежащие в доказательстве Теоремы 1. Пусть

$$A_{mn} = \mathbb{F}[x_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n]$$

– полиномиальная алгебра над полем $\mathbb{F}_p$, $G \leq GL(n, \mathbb{F}_p)$ – конечная группа, и f – некоторый моном из алгебры A_{mn}. Использование орбитальных сумм

$$S_G(f) = \sum_{u \in \{\sigma(f) | \sigma \in G\}} u$$

наиболее эффективно в том случае, когда группа G действует на элементах алгебры A_{mn} путем перестановок векторных переменных

$$x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{mn}).$$

В этом случае каждый инвариант $u \in A^G_{mn}$ является линейной комбинацией над полем $\mathbb{F}_p$ указанных выше орбитальных сумм $S_G(f)$ для всевозможных мономов f. Этот важный результат является легким следствием следующего факта: если некоторый моном f входит в некоторый инвариант u с ненулевым коэффициентом a, то для каждого элемента $\sigma \in G$ соответствующий моном $\sigma(f)$ также входит в u с тем же самым коэффициентом a. К сожалению, указанное свойство не имеет места для конечных групп G более общего вида, в частности, для циклических групп H, порожденных матрицами вида

$$\gamma = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

с базисными Жордановыми блоками $J_1, J_2, \ldots, J_r$ размеров $n_1, n_2, \ldots, n_r$, соответственно, такими что $1 < n_i < p$ по крайней мере для одного $i = 1, 2, \ldots, r$. С другой стороны, если $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = p$, то в результате соответствующего неособого линейного преобразования мы можем получить некоторую новую систему векторных переменных

$$\tilde{x}_1 = (\tilde{x}_{11}, \ldots \tilde{x}_{m1}), \ldots, \tilde{x}_n = (\tilde{x}_{1n}, \ldots, \tilde{x}_{mn}),$$

на которой группа H действует в виде циклических перестановок.

Обозначим через H циклическую группу простого порядка $p > 2$, порожденную неособой квадратной матрицей γ с базисными Жордановыми блоками $J_1, J_2, \ldots, J_r$ размеров $n_1, n_2, \ldots, n_r$, соответственно, и напомним, что H действует линейным образом на векторном пространстве V^m размерности $m(n_1 + \cdots + n_r)$. Доказательство Теоремы 1 состоит из трех шагов.

(i) На первом шаге мы "раздуваем" каждый Жорданов блок J_i, $1 \leq i \leq r$, матрицы γ до Жорданова блока максимально возможного размера p. В результате, порождающая матрица γ циклической группы H трансформируется в соответствующую квадратную матрицу $\tilde{\gamma}$ размера

$\nu = rp$, а группа H – в соответствующую циклическую группу $\tilde{H}$, порожденную матрицей $\tilde{\gamma}$ и действующей на векторном пространстве $\tilde{V}^m$ размерности $m\nu$. Из изложенного выше следует, что возможно найти новые векторные переменные

$$\tilde{x}_1 = (\tilde{x}_{11}, \ldots, \tilde{x}_{m1}), \ldots, \tilde{x}_n = (\tilde{x}_{1n}, \ldots, \tilde{x}_{mn}),$$

получающиеся из начальных переменных

$$x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{mn})$$

при помощи некоторого невырожденного линейного преобразования, на которые группа $\tilde{H}$ действует в виде их циклических перестановок. Это свойство группы $\tilde{H}$ позволяет нам показать (Теорема 2), что каждый инвариант v алгебры $A_{mn}^{\tilde{H}}$ является $\mathbb{F}_p$-линейной комбинацией орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}(f)$, орбитальных норм $N_{\tilde{H}}(g)$, а также их произведений $S_{\tilde{H}}(f)N_{\tilde{H}}(g)$, для всевозможных мономов $f, g \in A_{m\nu}$.

(ii) На втором шаге мы показываем, что некоторое подходящее вложение алгебры A_{m3} в алгебру A_{mp} приводит к весьма простому тесту (Теорема 4), позволяющему из множества всех $\tilde{H}$- инвариантов $v \in A_{mp}^{\tilde{H}}$ выбирать лишь те, которые инварианты относительно действия группы H. Использование этого теста приводит к явной конструкции инвариантов $u \in A_{m3}$ в виде $\mathbb{F}_p$-линейных комбинаций орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}(f)$ и орбитальных норм and $N_{\tilde{H}}(g)$ некоторого специального вида, а также их произведений $S_{\tilde{H}}(f)N_{\tilde{H}}(g)$.

(iii) На третьем шаге мы формируем полную систему образующих алгебры A_{m3}^H, выбирая определенным образом некоторые семейства однородных многочленов $u \in A_{m3}$ ограниченной степени.

2. ОРБИТАЛЬНЫЕ СУММЫ

Пусть m, n – положительные целые числа, $p \geq 3$ – простое число, $\mathbb{F}_p$ – конечное поле, состоящее из p элементов, $GL(n, \mathbb{F}_p)$ – группа обратимых $n \times n$ матриц с элементами из $\mathbb{F}_p$, и

$$A_{mn} = \mathbb{F}_p[x_{i1}, \ldots, x_{in} \mid 1 \leq i \leq m]$$

– алгебра многочленов от коммутирующих переменных $x_{i1}, \ldots, x_{in}$, для $1 \leq i \leq m$. В последующем мы идентифицируем поле $\mathbb{F}_p$ с множеством $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Если g - некоторый многочлен из кольца A_{mn} и

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

– некоторый элемент группы $GL(n, \mathbb{F}_p)$, обозначим через $\sigma(g)$ образ многочлена g относительно эндоморфизма σ полиномиальных $\mathbb{F}_p$-алгебр, действующего на базисные элементах $x_{i1}, \ldots, x_{in}$ векторного пространства $V_i = \mathbb{F}_p x_i + \mathbb{F}_p x_{i2} + \cdots + \mathbb{F}_p x_{in}$, для $1 \leq i \leq m$, следующим образом:

$$\sigma \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(x_{i1}) \\ \sigma(x_{i2}) \\ \vdots \\ \sigma(x_{in}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}x_{i1} + \cdots + \sigma_{1n}x_{in} \\ \sigma_{21}x_{i1} + \cdots + \sigma_{2n}x_{in} \\ \vdots \\ \sigma_{n1}x_{i1} + \cdots + \sigma_{mn}x_{in} \end{pmatrix}.$$

Пусть G – подгруппа группы $GL(n, \mathbb{F}_p)$ и A_{mn}^G – множество многочленов $u \in A_{mn}$ таких, что $\sigma(u) = u$ для каждого $\sigma \in G$. Множество A_{mn}^G образует подалгебру алгебры A_{mn}, которая называется *алгеброй векторных инвариантов* группы G. Пусть p – простой делитель числа $|G|$, и $H = \langle\gamma\rangle$ – циклическая подгруппа группы G порядка p. В некотором подходящем базисе матрица γ имеет следующую каноническую Жорданову форму

$$\gamma = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

с базисными Жордановыми блоками

$$J_\rho = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r,$$

размеров $n_1, n_2, \ldots, n_r$, соответственно, где $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, $1 \le n_\rho \le p$, для $1 \le \rho \le r$, и $n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_l \ge 2$, $n_{l+1} = \cdots = n_r = 1$, для некоторого $1 \le l \le r$.

Пусть A^H_{mn} – алгебра многочленов $u \in A_{mn}$, инвариантных относительно действия циклической группы $H = \langle\gamma\rangle$. Нашей целью является точное описание элементов алгебры A^H_{mn} для группы H весьма специального вида. Пусть

$$A_{mn'} = \mathbb{F}_p[x_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n'], \quad \text{где} \quad n' = n_1 + \cdots + n_l,$$

и пусть $A^H_{mn'}$ – подалгебра инвариантов алгебры $A_{mn'}$ относительно действия группы H. Так как переменные x_{ij}, для $1 \le i \le m$, $n' + 1 \le j \le n$, инвариантны при действии группы H, то каждый инвариант $u \in A^H_{mn}$ является многочленом вида

$$u = u_1 f_1 + \cdots + u_s f_s,$$

где $u_k \in A^H_{mn'}$ и $f_k \in F_p[x_{ij} \mid 1 \le i \le m, n' + 1 \le j \le n]$, для $1 \le k \le s$. Это замечание показывает, что проблема, касающуюся структуры инвариантов $u \in A^H_{mn}$ редуцируется к соответствующей проблеме для инвариантов $u_k \in A^H_{mn'}$, так что без уменьшения общности мы можем предположить, что $n = n'$, $u \in A_{mn'}$ и

$$\gamma = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix},$$

где $J_1, \ldots, J_r$ – базисные Жордановы блоки размеров $n_1, \ldots, n_r$, соответственно, удовлетворяющих условиям

$$n = n_1 + \cdots + n_r \quad \text{и} \quad n_1 \ge \cdots \ge n_r \ge 2.$$

Положим $\nu = rp$ и расширим каждый из Жордановых блоков $J_1, \ldots, J_r$ матрицы γ до одного и того же Жорданова блока

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

размера p. В результате, матрица γ расширяется до квадратной матрицы

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \tilde{J} & & & \\ & \tilde{J} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{J} \end{pmatrix}$$

размера ν, которая действует на каждом векторном пространстве

$$\tilde{V}_i = \mathbb{F}_p z_{i1} + \cdots + \mathbb{F}_p z_{i\nu}, \quad \text{при} \quad 1 \leq i \leq m,$$

одним и тем же образом, как линейное преобразование пространства $\tilde{V}_i$.

Обозначим через $\tilde{H}$ циклическую группу порядка p, порожденную элементом $\tilde{\gamma}$, и заметим, что действие группы $\tilde{H}$ на векторном пространстве $\tilde{V}_i$, для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$, может быть рассмотрено как некоторое расширение действия группы H на соответствующем подпространстве $V_i \subseteq \tilde{V}_i$.

Если

$$A_{m\nu} = \mathbb{F}_p[z_{i1}, \ldots, z_{i\nu} \mid 1 \leq i \leq m]$$

– алгебра многочленов от $m\nu$ коммутирующих переменных z_{ij} над $\mathbb{F}_p$, то каждый элемент $\tilde{\sigma}$ группы $\tilde{H}$ задает некоторый эндоморфизм $\mathbb{F}_p$-алгебры $A_{m\nu}$. Пусть $A_{m\nu}^{\tilde{H}}$ – подалгебра инвариантов алгебры $A_{m\nu}$ относительно действия группы $\tilde{H}$. Если $f \in A_{m\nu}$ – некоторый моном, то обозначим через

$$Orb_{\tilde{H}}(f) = \{\tilde{\sigma}(f) \mid \tilde{\sigma} \in \tilde{H}\}$$

его *орбиту* относительно действия группы $\tilde{H}$. Положим $q = |Orb_{\tilde{H}}(f)|$ и заметим, что $q = 1$ или $q = p$. Далее, если $Orb_{\tilde{H}}(f)$ – орбита монома $f \in A_{m\nu}$, то выражения

$$S_{\tilde{H}}(f) = \sum_{g \in Orb_{\tilde{H}}(f)} g \quad \text{и} \quad N_{\tilde{H}}(f) = \prod_{g \in Orb_{\tilde{H}}(f)} g$$

называются *орбитальной суммой* и *орбитальной нормой* монома f относительно группы $\tilde{H}$. Ясно, что оба выражения $S_{\tilde{H}}(f)$ $N_{\tilde{H}}(f)$ являются инвариантами относительно действия группы $\tilde{H}$. Заметим также, что $S_{\tilde{H}}(f)$ и $N_{\tilde{H}}(f)$ оба являются однородными многочленами от переменных $x_{i1} \ldots, x_{i\nu}$, где $1 \leq i \leq m$.

Теперь мы дадим описание тех элементов алгебры $A_{m\nu}$, которые инвариантны относительно действия группы $\tilde{H}$. Наши дальнейшие вычисления основаны на следующем результате.

Предложение 1. *Пусть $p > 2$ – простое число, $l_1, \ldots, l_p$ – целые числа, удовлетворяющие условиям*

$$0 \leq l_k \leq p - 1, \quad \textit{для} \quad 1 \leq k \leq p,$$

и

$$l = \sum_{k=1}^{p} l_k.$$

Тогда

$$\sum_{\alpha \in F_p} \prod_{k=1}^{p} \binom{\alpha}{l_k} = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad l \leq p-2, \\ (p-1)/l_1! \cdots l_p!, & \textit{если} \quad l = p-1, \\ A_p / l_1! \cdots l_p!, & \textit{если} \quad l = p, \end{cases}$$

где

$$A_p = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} l_k(l_k-1).$$

Доказательство. Как обычно, мы предположим, что

$$\binom{\alpha}{l_k} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad l_k = 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha < l_k, \end{cases}$$

и рассмотрим произведение

$$\prod_{k=1}^{p}\binom{\alpha}{l_k}$$

как некоторый многочлен из кольца $\mathbb{F}_p[\alpha]$ степени l, скажем

$$\prod_{k=1}^{p}\binom{\alpha}{l_p} = c_0\alpha^l + c_1\alpha^{l-1} + \cdots + c_l.$$

Теперь результат следует из соотношения

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\alpha^s = \begin{cases} p-1, & \text{если} \quad (p-1) \mid s, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть

$$f = \prod_{i=1}^{m}\prod_{\tau=1}^{r}\prod_{j=(\tau-1)p+1}^{\tau p} z_{ij}^{s_{ij\tau}}$$

– многочлен из алгебры $A_{m\nu} = \mathbb{F}_p[z_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le \nu]$. Предположим, что f не инвариантен относительно действия группы $\tilde{H}$, и рассмотрим соответствующую орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\tilde{\gamma}^{\alpha}(f).$$

Так как

$$\tilde{\gamma}^{\alpha}(z_{ij} = \sum_{l=j}^{\tau p}\binom{\alpha}{l-j} z_{ij} \ ,$$

для $1 \le i \le m$, $(\tau-1)p+1 \le j \le \tau p$, $1 \le \tau \le r$, то мы имеем

$$S_{\tilde{H}}(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\prod_{i=1}^{m}\prod_{\tau=1}^{r}\prod_{j=(\tau-1)p+1}^{\tau p}\left(\sum_{l=0}^{\tau p-j}\binom{\alpha}{l} z_{i,j+l}\right)^{s_{ij\tau}}. \tag{9}$$

Пусть $\{\tilde{z}_{i1}, \ldots, \tilde{z}_{i\nu} \mid 1 \le i \le m\}$ – новые переменные, определенные соотношениями:

$$\tilde{z}_{i,(\tau-1)p+\alpha+1} = \sum_{l=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{l} z_{i,(\tau-1)p+l+1} \ , \tag{10}$$

для $1 \le i \le m$, $0 \le \alpha \le p-1$ and $1 \le \tau \le r$. При каждом фиксированном i эти соотношения определяют соответствующее невырожденное линейное преобразование переменных и, следовательно, каждое переменное z_{ij} является, в свою очередь, некоторой $\mathbb{F}_p$-линейной комбинацией переменных $\tilde{z}_{ij}$. Отсюда следует, что каждая орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}(f)$ является $\mathbb{F}_p$-линейной комбинацией орбитальных сумм

$$S_{\tilde{H}}(\tilde{f}) = \sum_{\tilde{g} \in Orb(\tilde{f})} \tilde{g},$$

где $\tilde{f}$ – моном вида

$$\tilde{f} = \prod_{i=1}^{m} \prod_{\tau=1}^{r} \prod_{j=(\tau-1)p+1}^{\tau p} \tilde{z}_{ij}^{\tilde{s}_{ij\tau}}.$$

Заметим теперь, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ соответствующая система $\{\tilde{z}_{ij} \mid 1 \leq j \leq \nu\}$ элементов $\tilde{z}_{ij}$, определенных соотношениями (10), образует базис линейного пространства

$$\tilde{V}_i = F_p z_{i1} + \cdots + F_p z_{i\nu},$$

и для каждого $\tau = 1, 2, \ldots, r$, циклическая группа $\tilde{H}$ действует на базисных элементах $\tilde{z}_{i1}, \ldots, \tilde{z}_{i\nu}$ в виде их циклических перестановок.

Далее, пусть $u \in A_{m\nu}^{\tilde{H}}$ – произвольный инвариант и $\tilde{f} \in \mathbb{F}_p[\tilde{z}_{i1}, \ldots, \tilde{z}_{i\nu} \mid 1 \leq i \leq m]$ – некоторый моном указанного выше вида, который появляется в u с некоторым ненулевым коэффициентом. Так как $\tilde{\gamma}^{\alpha}(u) = u$ для любого $\tilde{\gamma}^{\alpha} \in \tilde{H}$, то коэффициент при $\tilde{f}$ в инварианте u должен быть равен коэффициенту при $\tilde{\gamma}^{\alpha}(\tilde{f})$. Отсюда следует, что каждый инвариант $u \in A_{m\nu}^{\tilde{H}}$ является $\mathbb{F}_p$-линейной комбинацией орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}(\tilde{f})$, орбитальных норм $N_{\tilde{H}}(\tilde{g})$ (соответствующих группе $\tilde{H}$), а также их произведений $S_{\tilde{H}}(\tilde{f})N_{\tilde{H}}(\tilde{g})$, для всевозможных мономов $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathbb{F}_p[\tilde{z}_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq \nu]$. С другой стороны, каждая орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}(\tilde{f})$ является $\mathbb{F}_p$-линейной комбинацией орбитальных сумм вида $S_{\tilde{H}}(f)$, откуда следует, что каждый инвариант $u \in A_{m\nu}^{\tilde{H}}$ является $\mathbb{F}_p$-линейной комбинацией орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}(f)$, орбитальных норм $N_{\tilde{H}}(g)$ и их произведений $S_{\tilde{H}}(f)N_{\tilde{H}}(g)$. Отсюда мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Каждый инвариант и алгебры $A_{m\nu}^{\tilde{H}}$ является F_p-линейной комбинацией орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}(f)$, орбитальных норм $N_{\tilde{H}}(g)$ (относительно группы $\tilde{H}$), а также их произведений $S_{\tilde{H}}(f)N_{\tilde{H}}(g)$, для всевозможных мономов $f, g \in A_{m\nu}$ следующего вида:*

$$f = \prod_{i=1}^{m} \prod_{\tau=1}^{r} \prod_{j=(\tau-1)p+1}^{\tau p} z_{ij}^{s_{ij\tau}}, \quad g = \prod_{i=1}^{m} \prod_{\tau=1}^{r} \prod_{j=(\tau-1)p+1}^{\tau p} z_{ij}^{t_{ij\tau}}.$$

Положим

$$s_{ij\tau} = \sum_{e=0}^{\eta} s_{ij\tau}^{(e)} p^e, \quad \text{где} \quad 0 \leq s_{ij\tau}^{(e)} \leq p-1,$$

и рассмотрим моном

$$f = \prod_{e=0}^{\eta} \prod_{i=1}^{m} \prod_{\tau=1}^{r} \prod_{j=(\tau-1)p+1}^{\tau p} (z_{ij}^{p^e})^{s_{ij\tau}^{(e)}}. \tag{11}$$

Определим *вес* $w(f)$ монома f и ассоциированной с ним орбитальный суммы $S_{\tilde{H}}(f)$ следующим образом:

$$w(f) = w(S_{\tilde{H}}(f)) = \sum_{e=0}^{\eta} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\tau=1}^{r} \sum_{j=(\tau-1)+1}^{\tau p} (\tau p - j) s_{ij\tau}^{(e)}.$$

Если моном f инвариантен под действием группы $\tilde{H}$, то он имеет вид

$$f = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}\prod_{\tau=1}^{r}(z_{i,\tau p}^{p^e})^{s_{i,\tau p}^{(e)}}.$$

Если же f не инвариантен относительно $\tilde{H}$, то из (9), (11) и Предложения 3 следует, что условие $w(f) < p-1$ влечет равенство $S_{\tilde{H}}(f) = 0$. С другой стороны, если $w(f) > p+\lambda$ и $s_{ij\tau} \geq 1$ по меньшей мере для одной тройки (i,j,τ), где $1 \leq i \leq m$, $(\tau-1)p+1 \leq j < \tau p-\lambda-1$, $1 \leq \tau \leq r$, то инвариант $S_{\tilde{H}}(f)$ зависит по меньшей мере от одной переменной z_{ij}, где $1 \leq i \leq m$, $(\tau-1)p+1 \leq j < \tau p-\lambda-1$, $1 \leq \tau \leq r$. Это замечание доказывает следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $0 \leq \lambda < p-1$, $\mu \geq 1$ *– целые числа и*

$$f = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}\prod_{\tau=1}^{r}\prod_{j=(\tau-1)p+1}^{\tau p}(z_{ij}^{p^e})^{s_{ij\tau}^{(e)}}, \quad 0 \leq s_{ij\tau}^{(e)} \leq p-1,$$

– некоторый моном из $A_{m\nu}$, *который не инвариантен под действием группы* $\tilde{H}$. *Всякая орбитальная норма* $N_{\tilde{H}}(f) \in A_{m\nu}^{\tilde{H}}$, *не зависящая ни от одной из переменных* z_{ij}, *при* $1 \leq i \leq m$, $(\tau-1)p+1 \leq j < \tau p-\lambda-1$, $1 \leq \tau \leq r$, *имеет вид*

$$N_{\tilde{H}}^{(\lambda)}(f) = \prod_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}\prod_{\tau=1}^{r}\prod_{j=\tau p-\lambda-1}^{\tau p}\left(\sum_{l=0}^{\tau p-j}\binom{\alpha}{l}z_{i,j+l}^{p^e}\right)^{s_{ij\tau}^{(e)}},$$

а каждая орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}(f) \in A_{m\nu}^{\tilde{H}}$, *не зависящая ни от одной из переменных* z_{ij}, *при* $1 \leq i \leq m$, $(\tau-1)p+1 \leq j < \tau p-\lambda-1$, $1 \leq \tau \leq r$, *имеет либо вид*

$$S_{\tilde{H}}^{(\lambda)}(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}\prod_{\tau=1}^{r}\prod_{(\tau-1)p-\lambda-1}^{\tau p}\left(\sum_{l=0}^{\tau p-j}\binom{\alpha}{l}z_{i,j+l}^{p^e}\right)^{s_{ij\tau}^{(e)}},$$

либо вид

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu,\lambda)}(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}\prod_{\tau=1}^{r}\prod_{j=(\tau-1)p+1}^{\tau p}\left(\sum_{l=0}^{\tau p-j}\binom{\alpha}{l}z_{i,j+l}^{p^e}\right)^{s_{ij\tau}^{(t)}},$$

где $s_{ij\tau}^{(e)} \geq 1$ *по меньшей мере для одной четверки* (e,i,j,τ), *такой что* $0 \leq e \leq \eta$, $1 \leq i \leq m$, $(\tau-1)p+1 \leq j < \tau p-\lambda-1$, $1 \leq \tau \leq r$, *и* $w(f) = p-1+\mu \geq p+\lambda+1$.

С данного момента мы будем считать, что

$$r = 1 \quad \text{и} \quad n_1 = 3.$$

При выполнении этого условия, следующий результат является легким следствием теоремы 5 при $\lambda = 0$.

Следствие 2. *Пусть* $\mu > 2$ *– положительное целое число и*

$$f = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{p}(z_{ij}^{p^e})^{s_{ij}^{(e)}}, \quad 0 \leq s_{ij}^{(e)} \leq p-1,$$

– *некоторый моном в* A_{mp}, *который не инвариантен под действием группы* $\tilde{H}$. *Тогда каждая орбитальная норма* $N_{\tilde{H}}(f) \in A_{mp}^{\tilde{H}}$, *не зависящая ни от одной из переменных* z_{ij}, $1 \le i \le m$ *and* $1 \le j < p-2$ *имеет вид:*

$$N_{\tilde{H}}^{(0)}(f) = \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_p} \prod_{e=0}^{\eta} \prod_{i=1}^{m} \left(z_{i,p-2}^{p^e} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p-1}^{p^e} + \binom{\alpha}{2} z_{i,p}^{p^e} \right)^{s_{i,p-2}^{(e)}} \times \left(z_{i,p-1}^{p^e} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p}^{p^e} \right)^{s_{i,p-1}^{(e)}} (z_{i,p}^{p^e})^{s_{i,p}^{(e)}}.$$

Далее, каждая орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}(f) \in A_{mp}^{\tilde{H}}$, *не зависящая от* z_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j < p-2$, *имеет либо вид*

$$S_{\tilde{H}}^{(0)}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_p} \prod_{e=0}^{\eta} \prod_{i=1}^{m} \left(z_{i,p-2}^{p^e} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p-1}^{p^e} + \binom{\alpha}{2} z_{i,p}^{p^e} \right)^{s_{i,p-2}^{(e)}} \times \left(z_{i,p-1}^{p^e} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p}^{p^e} \right)^{s_{i,p-1}^{(e)}} (z_{i,p}^{p^e})^{s_{i,p}^{(e)}},$$

либо вид

$$S_{\tilde{H}}^{(1)}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_p} \prod_{e=0}^{\eta} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p} \left(\sum_{l=0}^{p-j} \binom{\alpha}{l} z_{i,j+l}^{p^e} \right)^{s_{ij}^{(e)}},$$

где $w(f) = p$ *and* $s_{ij}^{(e)} \ge 1$ *по меньшей мере для одной тройки* (e,i,j), *такой что* $0 \le e \le \eta$, $1 \le i \le m$, $1 \le j < p-1$, *либо вид*

$$S_{\tilde{H}}^{(2)}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_p} \prod_{e=0}^{\eta} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p-j} \left(\sum_{l=0}^{p-j} \binom{\alpha}{l} z_{i,j+l}^{p^e} \right)^{s_{ij}^{(e)}},$$

где $w(f) = p+1$ *и* $s_{ij}^{(e)} \ge 1$ *по меньшей мере для одной тройки* (e,i,j), *такой что* $0 \le e \le \eta$, $1 \le i \le m$ *и* $1 \le j < p-2$.

С другой стороны, если $S_{\tilde{H}}(f)$ *включает в себя по меньшей мере одну из переменных* z_{ij}, *где* $1 \le i \le m$, $1 \le j < p-2$, *то орбитальная сумма* $S_{\tilde{H}}(f)$ *имеет следующий вид:*

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_p} \prod_{e=0}^{\eta} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p} \left(\sum_{l=0}^{p-j} \binom{\alpha}{l} z_{i,j+l}^{p^e} \right)^{s_{ij}^{(e)}},$$

где $w(f) = p-1+\mu > p+1$ *и* $s_{ij}^{(e)} \ge 1$ *по меньшей мере для одной тройки* (e,i,j), *такой что* $0 \le e \le \eta$, $1 \le i \le m$ *и* $1 \le j < p-2$.

Для каждого целого $i = 1, 2, \dots, m$ рассмотрим вложение

$$\vartheta : V_i \hookrightarrow \tilde{V}_i \tag{12}$$

пространства V_i в пространство $\tilde{V}_i$, определенной соотношениями

$$\vartheta(x_{ij}) = \begin{cases} z_{i,p-2}, & \text{при} \quad j=1, \\ z_{i,p-1}, & \text{при} \quad j=2, \\ z_{i,p}, & \text{при} \quad j=3, \end{cases}$$

определим действие циклической группы H на пространстве $\tilde{V}_i$ следующим образом. Если γ – порождающий элемент группы H, то его действие на элементы (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) пространства V_i определяется следующим образом:

$$\gamma(x_{ij}) = \begin{cases} x_{i1} + x_{i2}, & \text{при} \quad j = 1, \\ x_{i2} + x_{i3}, & \text{при} \quad j = 2, \\ x_{i3}, & \text{при} \quad j = 3. \end{cases}$$

В таком случае, отображение $\vartheta : V_i \hookrightarrow \tilde{V}_i$ индуцирует соответствующее действие элемента γ на пространстве $\tilde{V}_i$, определяемое по формуле

$$\gamma(z_{ij}) = \begin{cases} z_{ij} + z_{i,j+1}, & \text{при} \quad j = p-2, p-1, \\ z_{ij}, & \text{при} \quad j \neq p-2, p-1. \end{cases} \tag{13}$$

Этим задается единственное расширение действия группы H с подпространства V_i пространства $\tilde{V}_i$ до её действия на всем пространстве $\tilde{V}_i$ и определяет соответствующее единственное расширение действия группы H на элементы алгебры A_{m3} до её действия на элементы алгебры A_{mp}. С другой стороны, если $\tilde{\gamma}$ - порождающий элемент группы $\tilde{H}$, то его действие на элементы $(z_{i,1}, \ldots, z_{i,p-1})$ пространства $\tilde{V}_i$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\gamma}(z_{i,j}) = \begin{cases} z_{i,j} + z_{i,j+1}, & \text{при} \quad 1 \leq j \leq p-1, \\ z_{ij}, & \text{при} \quad j = p. \end{cases}$$

Теперь мы изучим структуру инвариантов $u \in A_{mp}^{\tilde{H}}$, которые инвариантны одновременно и при действии группы H.

Теорема 4. *Пусть $u \in A_{mp}^{\tilde{H}}$ – многочлен положительной степени. Тогда u инвариантен относительно действия группы H тогда и только тогда, когда u не содержит ни одной переменной z_{ij}, для $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j < p-2$.*

Доказательство. Каждый инвариант $u \in A_{mp}^{\tilde{H}}$ степени $s \geq 1$ является суммой его однородных компонент $u_k \in A_{mp}^{\tilde{H}}$ степени k, для $1 \leq k \leq s$. Это замечание сводит ситуацию к случаю однородных многочлена $u \in A_{mp}^{\tilde{H}}$, инвариантного относительно действия группы H.

Предположим, что $u \in A_{mp}^{\tilde{H}}$ включает по меньшей мере одну из переменных z_{ij}, для $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j < p-2$, и запишем u в виде:

$$u = \sum_{(s_{ij})} u_{(s_{ij})} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{p-3} z_{ij}^{s_{ij}},$$

где $u_{(s_{ij})}$ – однородные многочлены из кольца

$$F_p[z_{i,p-2}, z_{i,p-1}, z_{i,p} \mid 1 \leq i \leq m],$$

а сумма берется по всем наборам

$$(s_{ij}) = (s_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p-3)$$

неотрицательных целых s_{ij}, таким что

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p-3} s_{ij} \leq s.$$

Пусть $j_0 \le p-3$ – такое наибольшее положительное целое число, для которого многочлен v не содержит ни одного монома

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{p} z_{ij}^{s_{ij}}$$

с условием $s_{ij} \ge 1$, при $1 \le i \le m$, $j > j_0$, и содержит по меньшей мере один нетривиальный член

$$u_{(s_{ij})}\prod_{i=1}^{m}\prod_{1\le j\le j_0} z_{ij}^{s_{ij}},$$

содержащий z_{ij_0} при некотором $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда многочлен u может быть записан в виде:

$$u = u_{(0)} + \sum_{(s_{ij})\neq(0)} u_{(s_{i,j})}\prod_{i=1}^{m}\prod_{1\le j\le j_0} z_{ij}^{s_{ij}}.$$

Предположим теперь, что многочлен u инвариантен под действием группы H, так что $\gamma(u) = u$. Так как переменные z_{ij}, для $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le p-3$, неподвижны при действии элемента $\gamma \in H$, мы имеем

$$\gamma(u) = \gamma(u_{(0)}) + \sum_{((s_{ij})\neq(0)} \gamma(u_{(s_{i,j})})\prod_{i=1}^{m}\prod_{1\le j\le j_0} z_{ij}^{s_{ij}}.$$

Это показывает, что коэффициенты $u_{(s_{ij})}$ многочлена u инвариантен под действием H, так что

$$\gamma(u) = u_{(0)} + \sum_{(s_{ij})\neq(0)} u_{(s_{ij})}\prod_{i=1}^{m}\prod_{1\le j\le j_0} z_{ij}^{s_{ij}}.$$

С другой стороны, мы имеем $\tilde{\gamma}(z_{ij}) = \gamma(z_{ij})$ для всех $1 \le i \le m$, $j = p-2, p-1, p$, $\tilde{\gamma}(z_{ij}) = z_{ij} + z_{i,j+1}$ для всех $1 \le i \le m$, $1 \le j \le p-3$ и, следовательно,

$$\tilde{\gamma}(u) = u_{(0)} + \sum_{(s_{ij})\neq(0)} u_{(s_{ij})}\prod_{i=1}^{m}\prod_{1\le j\le j_0} (z_{ij} + z_{i,j+1})^{s_{ij}},$$

так что многочлен $\tilde{\gamma}(u)$ содержит по меньшей мере один ненулевой член следующего вида:

$$u_{(s_{ij})}\prod_{i=1}^{m}\prod_{1\le j\le j_0} z_{i,j+1}^{s_{ij}},$$

который включает в себя z_{i,j_0+1} и который не появляется в $\gamma(u) = u$. Это показывает, что u не может быть инвариантом под действием H.

Обратно, если $u \in A_{mp}^{\tilde{H}}$ не содержит ни одной из переменных z_{ij} с условием $1 \le i \le m$, $1 \le j < p-2$, то многочлен u инвариантен под действием группы H, и тем самым, теорема доказана.

Пусть $u \in A_{mp}^{\tilde{H}}$ – многочлен, инвариантный относительно действия циклической группы $\tilde{H}$. Из теоремы 4 следует u является F_p-линейной комбинацией орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}(f)$, орбитальных норм $N_{\tilde{H}}(g)$, а также их произведений $S_{\tilde{H}}(f)N_{\tilde{H}}(g)$ для всевозможных мономов $f, g \in A_{mp}$. Ясно, что все многочлены $S_{\tilde{H}}^{(0)}(f)$, $S_{\tilde{H}}^{(1)}(f)$, $S_{\tilde{H}}^{(2)}(f)$ и $N_{\tilde{H}}^{(0)}(g)$ инвариантны относительно действия группы H.

Рассмотрим теперь орбитальные суммы $S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f)$ для $\mu \geq 3$. Положим $z^{(e)}_{ij} = z^{p^e}_{ij}$ и рассмотрим

$$f = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{p}(z^{p^e}_{ij})^{s^{(e)}_{ij}}, \quad 0 \leq s^{(e)}_{ij} \leq p-1,$$

как моном относительно символов $z^{(e)}_{ij}$. Аналогично, рассмотрим ассоциированную орбитальную сумму $S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f)$ как многочлен над F_p относительно $z^{(e)}_{ij}$. Моном $f \in A_{mp}$ и соответствующую ему орбитальную сумму $S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f)$ назовем *гладкой*, если $s^{(e)}_{ij} = 0$, либо $s^{(e)}_{ij} = 1$, для $0 \leq e \leq \eta$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$. Заметим также, что произвольный моном $f \in A_{mp}$ может быть получен из гладкого монома $f' \in A_{m'p}$, где $m' \geq m$, с помощью соответствующей идентификации переменных z_{ij}. Принимая во внимание этот факт мы можем ограничить себя рассмотрением орбитальных сумм $S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f)$, соответствующих гладким мономам вида

$$f = \prod_{r=1}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_\delta \leq m', \quad j_1,\ldots,j_\delta \in \{1,2,\ldots,p\}.$$

Заметим также, что вес каждого монома, появляюшегося в сумме $S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f)$ с ненулевым коэффициентом, не превосходит μ. Нашей целью теперь является изучение тех F_p-линейных комбинаций гладких сумм мономов, не содержащих переменных z_{ij}, для $1 \leq i \leq m'$ и $1 \leq j \leq p-3$. Сначала мы докажем следующий результат.

Предложение 2. *Пусть*

$$f = \prod_{r=1}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_\delta \leq m', \quad j_1,\ldots,j_\delta \in \{1,2,\ldots,p\},$$

– гладкий моном из алгебры $A_{m,p}$ степени δ относительно $z^{(e_r)}_{i_r,j_r} = z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r}$, $1 \leq r \leq \delta$.

(i) Если $w(f) = p$ и $\delta = 2$, то орбитальная сумма $S^{(1)}_{\tilde{H}}(f)$ является F_p-линейной комбинацией H-инвариантов

$$z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p}z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} \quad \text{и} \quad z^{p^{e_1}}_{i_1,p}z^{p^{e_2}}_{i_2,p}.$$

(ii) Если $w(f) = p$ и $\delta \geq 3$, то орбитальная сумма $S^{(1)}_{\tilde{H}}(f)$ является F_p-линейной комбинацией H-инвариантов

$$(z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1}z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p}z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1})\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,p}, \quad 1 \leq \rho < \sigma \leq \delta,$$

и

$$z^{p^{e_1}}_{i_1,p},\ldots,z^{p^{e_l}}_{i_l,p}.$$

(iii) Если $w(f) = p+1$ и $\delta = 2$, то орбитальная сумма $S^{(2)}_{\tilde{H}}(f)$ является F_p-линейной комбинацией H-инвариантов

$$z^{p^{e_1}}_{i_1,p-2}z^{p^{e_2}}_{i_2,p} + z^{p^{e_1}}_{i_1,p}z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} + z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p}\ ,$$

$$z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p}z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1}, \quad z^{p^{e_1}}_{i_1,p}z^{p^{e_2}}_{i_2,p}.$$

(*iv*) *Если* $w(f) = p+1$ *и* $\delta \geq 3$, *то*

$$S_{\tilde{H}}^{(2)}(f) = \sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_\delta\leq 2\\ k_1+\dots+k_\delta=2}} a_{k_1,\dots,k_\delta} \prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r,p-k_r}^{p^{e_r}} + \sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_\delta\leq 1\\ k_1+\dots+k_\delta=1}} b_{k_1,\dots,k_\delta} \prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r,p-k_r}^{p^{e_r}},$$

где

$$\sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_\delta\leq 2\\ k_1+\dots+k_\delta=2\\ 1\leq k_\rho\leq 2}} a_{k_1,\dots,k_\delta} = 0, \quad \text{при} \quad 1\leq \rho\leq \delta,$$

и

$$\sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_\delta\leq 1\\ k_1+\dots+k_\delta=2}} a_{k_1,\dots,k_\delta} + \sum_{\substack{0\leq k_1,\dots,k_\delta\leq 1\\ k_1+\dots+k_\delta=1}} b_{k_1,\dots,k_\delta} = 0.$$

Proof. Доказательства утверждений (*i*)–(*iv*) совершенно аналогичны, и по этой причине мы ограничимся лишь доказательством утверждения (*iii*). Положим

$$f = z_{i_1,p-n_1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-n_2}^{p^{e_2}},$$

где $1 \leq n_1, n_2 \leq p-1$, $n_1+n_2 = p+1$, и рассмотрим соответствующую орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(2)}(f) = \sum_{\alpha\in F_p} \left(z_{i_1,p-n_1}^{p^{e_1}} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,p-n_1+1}^{p^{e_1}} + \dots + \binom{\alpha}{n_1} z_{i_1,p}^{p^{e_1}} \right)$$

$$\times \left(x_{i_2,p-n_2}^{p^{e_2}} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p-n_2+1}^{p^{e_2}} + \dots + \binom{\alpha}{n_2} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} \right).$$

Раскрывая скобки в правой части последнего равенства и используя результат Предложения 3, мы получаем

$$S_{\tilde{H}}^{(2)}(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \binom{\alpha}{n_1-2}\binom{\alpha}{n_2} z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + \sum_{\alpha\in F_p} \binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-2} z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}$$

$$+ \sum_{\alpha\in F_p} \binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2-1} z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + \sum_{\alpha\in F_p} \binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-1} z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}$$

$$+ \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2} z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + \sum_{\alpha\in F_p} \binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2} z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$

$$= a(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}})$$

$$+b(z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1})^{p^{e_2}} + c z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}.$$

Тем самым, предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть снова*

$$f = \prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}}, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_\delta \le m', \quad j_1, \ldots, j_\delta \in \{1, 2, \ldots, p\},$$

– гладкий моном из A_{mp} степени δ относительно $z_{i_r,j_r}^{(e_r)} = z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}}$, $1 \le r \le \nu$.

(i) Если $w(f) = p + 2$, $\delta = 2$ и

$$f = z_{i_1,p-n_1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-n_2}^{p^{e_2}}, \quad f' = z_{i_1,p-n_2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-n_1}^{p^{e_2}},$$

где n_1, n_2 – положительные целые такие, что $1 \le n_1, n_2 \le p - 1$, $n_1 + n_2 = p + 2$, то

$$S_{\tilde H}^{(3)}(f) + S_{\tilde H}^{(3)}(f') = z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$

$$+2(z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}) - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}.$$

(ii) Если $w(f) = p + 2$, $\delta = 3$ и

$$f = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}, \quad f' = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}},$$

то

$$S_{\tilde H}^{(3)}(f) - S_{\tilde H}^{(3)}(f') = z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} (z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_3}})$$

$$-z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}) + z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}})$$

$$+z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} (z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}) - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} (z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}}).$$

(iii) Если $w(f) = p + 2$, $\delta = 4$ и

$$f = z_{i_1,2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}}, \quad f' = z_{i_1,2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}},$$

то

$$S_{\tilde H}^{(3)}(f) - S_{\tilde H}^{(3)}(f') = -2(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}})$$

$$\times (z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}})$$

$$-[(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}})(z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}})$$

$$-(z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}})(z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}})]$$

$$+2z_{i_1,p}^{p^{e_1}} [z_{i_2,p}^{p^{e_2}} (z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}}) - z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} (z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}})].$$

Доказательство.

(i) Мы имеем

$$S_{\tilde H}^{(3)}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_p} \left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \binom{\alpha}{\nu_1} z_{i_1,p-n_1+\nu_1}^{p^{e_1}} \right) \left(\sum_{\nu_2=0}^{n_2} \binom{\alpha}{\nu_2} z_{i_2,p-n_2+\nu_2}^{p^{e_2}} \right),$$

$$S_{\tilde{H}}^{(3)}(f') = \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\left(\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\binom{\alpha}{\nu_2}z_{i_1,p-n_2+\nu_2}^{p^{e_1}}\right)\left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\binom{\alpha}{\nu_1}z_{i_2,p-n_1+\nu_1}^{p^{e_2}}\right)$$

и, следовательно,

$$S_{\tilde{H}}^{(3)}(f) + S_{\tilde{H}}^{(3)}(f')$$

$$= \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-3}\binom{\alpha}{n_2} + \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-3}\right) z_{i_1,p-3}^{p^{e_1}}z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$

$$+ \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-3} + \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-3}\binom{\alpha}{n_2}\right) z_{i_1,p}^{p^{e_1}}z_{i_2,p-3}^{p^{e_2}}$$

$$+ \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-2}\binom{\alpha}{n_2} + \sum_{\alpha\in Ff_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-2}\right) z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}}z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$

$$+ \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-2} + \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-2}\binom{\alpha}{n_2}\right) z_{i_1,p}^{p^{e_1}}z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}$$

$$+2\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2-1}z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}}z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}$$

$$+ \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2-2} + \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-2}\binom{\alpha}{n_2-1}\right) z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}}z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}$$

$$+ \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-2}\binom{\alpha}{n_2-1} + \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2-2}\right) z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}}z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}$$

$$+ \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-1} + \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2}\right) z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}}z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$

$$+ \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2} + \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-1}\right) z_{i_1,p}^{p^{e_1}}z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}$$

$$+2\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2}z_{i_1,p}^{p^{e_1}}z_{i_2,p}^{p^{e_2}}.$$

Используя теперь предложение 1, мы находим

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-3}\binom{\alpha}{n_2}+\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-3}=0,$$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-2}\binom{\alpha}{n_2-1}+\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2-2}=0,$$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-2}\binom{\alpha}{n_2}+\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1}\binom{\alpha}{n_2-2}$$

$$=-2\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\binom{\alpha}{n_1-1}\binom{\alpha}{n_2-1},$$

и затем получаем

$$S^{(3)}_{\tilde H}(f)+S^{(3)}_{\tilde H}(f')$$

$$=a(z^{p^{e_1}}_{i_1,p-3}z^{p^{e_2}}_{i_2,p}+z^{p^{e_1}}_{i_1,p}z^{p^{e_2}}_{i_2,p-3}-z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1}+z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p})$$

$$+b(z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p}-z^{p^{e_1}}_{i_1,p}z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1})+cz^{p^{e_1}}_{i_1,p}z^{p^{e_2}}_{i_2,p}.$$

(ii) Мы имеем

$$S^{(3)}_{\tilde H}(f)=\sum_{\alpha\in F_p}\left(z^{p^{e_1}}_{i_1,1}+\binom{\alpha}{1}z^{p^{e_1}}_{i_1,2}+\dots+\binom{\alpha}{p-1}z^{p^{e_1}}_{i_1,p}\right)$$

$$\times\left(z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2}+\binom{\alpha}{1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1}+\binom{\alpha}{2}z^{p^{e_2}}_{i_2,p}\right)\left(z_{i_3,p-1}+\binom{\alpha}{1}z^{p^{e_3}}_{i_3,p}\right),$$

$$S^{(3)}_{\tilde H}(f')=\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p}\left(z^{p^{e_1}}_{i_1,1}+\binom{\alpha}{1}z^{p^{e_1}}_{i_1,2}+\dots+\binom{\alpha}{p-1}z^{p^{e_1}}_{i_1,p}\right)$$

$$\times\left(z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1}+\binom{\alpha}{1}z^{p^{e_2}}_{i_2,p}\right)\left(z^{p^{e_3}}_{i_3,p-2}+\binom{\alpha}{1}z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1}+\binom{\alpha}{2}z^{p^{e_3}}_{i_3,p}\right)$$

и, следовательно,

$$S^{(3)}_{\tilde H}(f)-S^{(3)}_{\tilde H}(f')=\sum_{\alpha\in F_p}\left(z^{p^{e_1}}_{i_1,1}+\binom{\alpha}{1}z^{p^{e_1}}_{i_1,2}+\dots+\binom{\alpha}{p-1}z^{p^{e_1}}_{i_1,p}\right)$$

$$\times\left(z^{(e_2,e_3)}_{(i_2,i_3),p-2}+\binom{\alpha}{1}z^{(e_2,e_3)}_{(i_2,i_3),p-1}+\binom{\alpha+1}{2}u^{(e_2,e_3)}_{(i_2,i_3),p}\right),$$

где

$$z^{(e_2,e_3)}_{(i_2,i_3),p-2}=z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2}z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1}-z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1}z^{p^{e_3}}_{i_3,p-2},$$

$$z^{(e_2,e_3)}_{(i_2,i_3),p-1}=z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2}z^{p^{e_3}}_{i_3,p}-z^{p^{e_2}}_{i_2,p}z^{p^{e_3}}_{i_3,p-2}$$

и

$$z^{(e_2,e_3)}_{(i_2,i_3),p} = z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} z^{p^{e_3}}_{i_3,p} - z^{p^{e_2}}_{i_2,p} z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1}.$$

Теперь результат следует из предложения 1.

(iii). По аналогии с предыдущим случаем мы имеем

$$S^{(3)}_{\tilde H}(f) - S^{(3)}_{\tilde H}(f') = \sum_{\alpha\in F_p} \left(z^{p^{e_1}}_{i_1,2} + \binom{\alpha}{1} z^{p^{e_1}}_{i_1,3} + \cdots + \binom{\alpha}{p-2} z^{p^{e_1}}_{i_1,p} \right)$$

$$\times \left(z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2} + \binom{\alpha}{1} z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{2} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} \right)$$

$$\times \left((z^{p^{e_3}}_{i_3,p-2} z^{p^{e_4}}_{i_4,p} - z^{p^{e_3}}_{i_3,p} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-2}) + \binom{\alpha}{1} (z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1} z^{p^{e_4}}_{i_4,p} - z^{p^{e_3}}_{i_3,p} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-1}) \right)$$

и результат снова следует из Предложения 1. Этим доказательство закончено.

Суммируя результаты Предложений 2 и 3, мы получаем следующую систему H-инвариантов, возникающих из гладких орбитальных сумм $S^{(\mu)}_{\tilde H}(f)$:

$$u^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p} = z^{p^{e_\rho}}_{i_r,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1},$$

$$u^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau)}_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau),p} = (z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2}) z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p}$$

$$-(z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}) z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-1},$$

$$v^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} + z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1} + z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p},$$

$$w^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau)}_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau),p} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} (z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1} z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p} - z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-1}) \tag{14}$$

$$-z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2} (z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-1}) + z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-2} (z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}),$$

$$u^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p} = (z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2}) (z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-1} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p} - z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p-1})$$

$$-(z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}) (z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-2} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p} - z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p-2}).$$

Заметим также, что

$$v_{(i_1,\dots,i_\delta),p} = \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_\delta\le 2\\ k_1+\cdots+k_\delta=2}} a_{k_1,\dots,k_\delta} \prod_{r=1}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,p-k_r} + \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_\delta\le 1\\ k_1+\cdots+k_\delta=1}} b_{k_1,\dots,k_\delta} \prod_{r=1}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,p-k_r},$$

где

$$\sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_\delta\le 2\\ k_1+\cdots+k_\delta=2\\ 1\le k_\rho\le 2}} a_{k_1,\dots,k_\delta} = 0, \quad \text{при} \quad 1\le \rho\le \delta,$$

и

$$\sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_\delta\le 1\\ k_1+\dots+k_\delta=2}} a_{k_1,\dots,k_\delta} + \sum_{\substack{0\le k_1,\dots,k_\delta\le 1\\ k_1+\dots+k_\delta=1}} b_{k_1,\dots,k_\delta} = 0$$

является $\mathbb{F}_p$-линейной комбинацией инвариантов $v_{(i_\rho,i_\sigma),p}$ для всевозможных $1\le\rho\le\sigma\le\delta$.

Предложение 4. *Пусть*

$$f_1 = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}}, \quad f_1' = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}},$$

$$f_2 = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}}, \quad f_2' = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}}$$

– гладкие мономы одной и той же степени $\delta = 4$ и веса $p-1+4$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$S_{\tilde H}^{(4)}(f_1) - S_{\tilde H}^{(4)}(f_1')$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \left(z_{i_1,1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,2} + \dots + \binom{\alpha}{p-1} z_{i_1,p} \right)^{p^{e_1}} \left(z_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p} \right)^{p^{e_2}}$$

$$\times \left(z_{(i_3,i_4),p-2}^{(e_3,e_4)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_3,i_4),p-1}^{(e_3,e_4)} + \binom{\alpha+1}{2} z_{(i_3,i_4),p}^{(e_3,e_4)} \right),$$

$$S_{\tilde H}^{(4)}(f_2) - S_{\tilde H}^{(4)}(f_2') = \sum_{\alpha\in F_p} \left(z_{i_1,1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,2} + \dots + \binom{\alpha}{p-1} z_{i_1,p} \right)^{p^{e_1}}$$

$$\left(z_{i_2,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_2,p} \right)^{p^{e_3}} \left(z_{(i_3,i_4),p-1}^{(e_3,e_4)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_3,i_4),p}^{(e_3,e_4)} \right),$$

где

$$z_{(i_3,i_4),p-2}^{(e_3,e_4)} = z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}},$$

$$z_{(i_3,i_4),p-1}^{(e_3,e_4)} = z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}},$$

$$z_{(i_3,i_4),p}^{(e_3,e_4)} = z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}},$$

и

$$S_{\tilde H}^{(4)}(f_2) - S_{\tilde H}^{(4)}(f_2') - S_{\tilde H}^{(4)}(f_1) + S_{\tilde H}^{(4)}(f_1')$$

$$= (z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}})$$

$$\times (z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} + z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}} - z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}} + z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}})$$

$$-(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}})$$

$$\times (z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} + z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} + z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}})$$

$$-(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}})$$

$$\times(z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}})$$

$$-(z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}})(z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}})$$

$$-z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}(z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}}).$$

Доказательство. Так как

$$f_1 = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}}, \quad f_2 = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}}$$

то

$$S_{\tilde{H}}^{(4)}(f_1) - S_{\tilde{H}}^{(4)}(f_2)$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \left(z_{i_1,1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,2} + \dots + \binom{\alpha}{p-1} z_{i_1,p}\right)^{p^{e_1}} \left(z_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p}\right)^{p^{e_2}}$$

$$\times \left(z_{i_3,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_3,p}\right)^{p^{e_3}} \left(z_{i_4,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_4,p}\right)^{p^{e_4}}$$

$$- \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \left(z_{i_1,1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,2} + \dots + \binom{\alpha}{p-1} z_{i_1,p}\right)^{p^{e_1}} \left(z_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p}\right)^{p_{e_2}}$$

$$\times \left(z_{i_3,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_3,p}\right)^{p^{e_3}} \left(z_{i_4,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_4,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_4,p}\right)^{p^{e_4}}$$

и, следовательно,

$$S_{\tilde{H}}^{(4)}(f_1) - S_{\tilde{H}}^{(4)}(f_1')$$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \left(z_{i_1,1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,2} + \dots + \binom{\alpha}{p-1} z_{i_1,p}\right)^{p^{e_1}} \left(z_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p}\right)^{p^{e_2}}$$

$$\times \left(z_{(i_3,i_4),p-2}^{(e_3,e_4)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_3,i_4),p-1}^{(e_3,e_4)} + \binom{\alpha+1}{2} z_{(i_3,i_4),p}^{(e_3,e_4)}\right).$$

Аналогично, так как

$$f_2 = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}}, \quad f_2' = z_{i_1,1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}},$$

то мы имеем

$$S_{\tilde{H}}^{(4)}(f_2) - S_{\tilde{H}}^{(4)}(f_2')$$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \left(z_{i_1,1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,2} + \dots + \binom{\alpha}{p-1} z_{i_1,p}\right)^{p^{e_1}}$$

$$\times \left(z_{i_2,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_2,p}\right)^{p^{e_2}} \left(z_{(i_3,i_4),p-1}^{(e_3,e_4)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_3,i_4),p}^{(e_3,e_4)}\right).$$

Полагая теперь

$$z^{(e_2,e_3,e_4)}_{(i_2,i_3,i_4),p-2} = z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2} z^{(e_3,e_4)}_{(i_3,i_4),p-1} - z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} z^{(e_3,e_4)}_{(i_3,i_4),p-2},$$

$$z^{(e_2,e_3,e_4)}_{(i_2,i_3,i_4,p-1} = z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2} z^{(e_3,i_4)}_{(i_3,i_4),p} - z^{p^{e_2}}_{i_2,p} z^{(e_3,e_4)}_{(i_3,i_4),p-2},$$

$$z^{(e_2,i_3,e_4)}_{(i_2,i_3,i_4),p} = z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} z_{(i_3,i_4),p} - z^{p^{e_2}}_{i_2,p} z^{(e_3,e_4)}_{(i_3,i_4),p-1},$$

мы получаем

$$S^{(4)}_{\tilde H}(f_2) - S^{(4)}_{\tilde H}(f_2') - S^{(4)}_{\tilde H}(f_1) + S^{(4)}_{\tilde H}(f_1')$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \left(z_{i_1,1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,2} + \cdots + \binom{\alpha}{p-1} z_{i_1,p} \right)^{p^{e_1}}$$

$$\times \left(z^{(e_2,e_3,e_4)}_{(i_2,i_3,i_4),p-2} + \binom{\alpha}{1} z^{(e_2,e_3,e_4)}_{(i_2,i_3,i_4),p-1} + \binom{\alpha+1}{2} z^{(e_2,e_3,e_4)}_{(i_2,i_3,i_4),p} \right)$$

$$- \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \binom{\alpha}{1} \left(z_{i_1,1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_1,2} + \cdots + \binom{\alpha}{p-1} z_{i_1,p} \right)^{p^{e_1}}$$

$$\times \left(z_{i_2,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_2,p} \right)^{p^{e_2}} z^{(e_3,e_4)}_{(i_3,i_4),p}$$

$$= (z^{p^{e_1}}_{i_1,p-2} z^{p^{e_3}}_{i_3,p} + z^{p^{e_3}}_{i_1,p} z^{p^{e_3}}_{i_3,p-2} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1} + z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_3}}_{i_3,p})$$

$$\times (z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2} z^{p^{e_4}}_{i_4,p} + z^{p^{e_2}}_{i_2,p} z^{p^{e_2}}_{i_4,p-2} - z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-1} + z^{p^{e_2}}_{i_2,p} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-1})$$

$$-(z^{p^{e_1}}_{i_1,p-2} z^{p^{e_4}}_{i_4,p} + z^{p^{e_1}}_{i_1,p} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-2} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-1} + z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_4}}_{i_4,p})$$

$$\times (z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} z^{p^{e_3}}_{i_3,p} + z^{p^{e_2}}_{i_2,p} z^{p^{e_3}}_{i_3,p-2} - z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1} + z^{p^{e_2}}_{i_2,p} z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1})$$

$$-(z^{p^{e_2}}_{i_1,p-2} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} + z^{p^{e_1}}_{i_1,p} z^{p^{e_2}}_{i_2,p-2} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} + z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_2}}_{i_2,p})$$

$$\times (z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1} z^{p^{e_4}}_{i_4,p} - z^{p^{e_3}}_{i_3,p} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-1})$$

$$-(z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p} z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1})(z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1} z^{p^{e_4}}_{i_4,p} - z^{p^{e_3}}_{i_3,p} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-1})$$

$$-z^{p^{e_1}}_{i_1,p}(z^{p^{e_3}}_{i_3,p-1} z^{p^{e_4}}_{i_4,p} - z^{p^{e_3}}_{i_3,p} z^{p^{e_4}}_{i_4,p-1}).$$

Этим предложение доказано.

3. ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ ОРБИТАЛЬНЫХ СУММ

Нашей следующей целью является изучение структуры тех H-инвариантов, которые являются F_p-линейными комбинациями гладких орбитальных сумм, включающих в себя по меньшей мере одну из переменных $z_{i,j}$, для $1 \le i \le m$, $1 \le j \le p-3$.

Пусть

$$f_k = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m'}\prod_{j=1}^{p}(z_{i,j}^{p^e})^{s_{i,j,k}^{(e)}}, \quad s_{i,j,k}^{(e)} \in \{0,1\}, \quad 1 \le k \le K,$$

– гладкие мономы от переменных $z_{i,j}$ одной и той же степени δ относительно $z_{i,j}^{(e)} = z_{i,j}^{p^e}$, и пусть

$$u = \sum_{k=1}^{K} a_k S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k), \quad a_k \ne 0, \tag{15}$$

– F_p-линейная комбинация орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k)$. Предположим, что каждый из гладких мономов f_k, $1 \le k \le K$, имеет вид

$$f = \prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}}, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_\delta \le m', \quad j_1,\ldots,j_\delta \in \{1,2,\ldots,p\},$$

и что каждая из орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k)$ включает в себя по меньшей мере одну переменную z_{i_r,j_r}, для $1 \le i_r \le m'$, $1 \le j_r \le p-3$. Если F_p-линейная комбинация (15) инвариантна относительно действия группы H, то теорема 7 показывает, что многочлен u не зависит ни от одной переменныхz_{i_r,j_r}, для $1 \le i_r \le m'$, $1 \le j_r \le p-3$. Заметим также, что вес каждого монома g_k, входящего в многочлен $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k) \in A_{m'p}$, не превосходит $p-1+\mu_k$, и что каждая орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k)$ содержит по меньшей мере один моном g веса $p-1+\mu_k$. Кроме того, поскольку сумма $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k)$ зависит по меньшей мере от одной переменной z_{i_r,j_r}, где $1 \le i_r \le m'$, $1 \le j_r \le p-3$, то следствие 3 показывает, что $\mu_k > 2$. Пусть

$$f = \prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}}, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_\delta \le m', \quad j_1,\ldots,j_\delta \in \{1,2,\ldots,p\},$$

– один из мономов f_k, $1 \le k \le K$, и пусть $w(f) = p-1+\mu \ge p+2$. Предположим, что линейная комбинация u инвариантна относительно действия группы H и что

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f) = \sum_{\alpha\in F_p}\prod_{r=1}^{\delta}\left(z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1}^{p_{e_r}} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}^{p^{e_r}}\right)$$

– одна из гладких орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k)$, входящих в u. Если g – моном веса μ, содержащийся $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f)$, из сказанного выше следует, что g зависит по меньшей мере от одной переменной z_{i_r,j_r} с условием, что $1 \le i_r \le m'$, $1 \le j_r \le p-3$. С другой стороны, поскольку инвариант u не зависит , ввиду теоремы 3, ни от одной из переменных z_{i_r,j_r}, где $1 \le i_r \le m'$ и $1 \le j_r \le p-3$, то все переменные z_{i_r,j_r}, где $1 \le i_r \le m'$, $1 \le j_r \le p-3$, должны сократиться в u. Отсюда следует, в частности, что моном g должен также сократится с некоторым другим мономом в линейной комбинации u. Но такое сокращение возможно лишь в том случае, когда моном g появляется также в некоторой другой гладкой орбитальной сумме $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f')$ того же самого веса $p-1+\mu$ и той же самой степени δ, которая также входит в F_p-линейную комбинацию u с ненулевым коэффициентом. Последнее возможно лишь в случае, когда моном f' получается из f с помощью преобразования вида

$$\prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} \mapsto \prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r,j'_r}^{p^{e_r}}, \tag{16}$$

где $(j'_1, \ldots, j'_\delta) \neq (j_1, \ldots, j_\delta)$ и $j'_1 + \cdots + j'_\delta = j_1 + \cdots + j_\delta$.

Пусть снова

$$u = \sum_{k=1}^{\delta} a_k S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k), \quad a_k \neq 0,$$

и пусть

$$f = \prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\delta \leq m',$$

– один из мономов f_k. Далее, пусть

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f) = \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{r=1}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p} \right)^{p^{e_r}},$$

– соответствующая гладкая сумма веса $p-1+\mu$, которая появляется в инварианте u. Мы можем предположить без уменьшения общности, что $j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_\delta$, и что that $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{\delta'} \leq p-3$, $p-2 \leq j_{\delta'+1} \leq \ldots \leq j_\delta \leq p$, для некоторого $1 \leq \delta' \leq \delta$.

Если g – моном веса μ, входящий в многочлен $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f)$, то g зависит по меньшей мере от одной из переменных $z_{i,j}$, где $1 \leq i \leq m'$, $1 \leq j \leq \delta$. С другой стороны, так как инвариант u не зависит от z_{i_r,j_r}, для $1 \leq i_r \leq m'$, $1 \leq j_r \leq p-3$, то все переменные z_{i_r,j_r}, при $1 \leq i_r \leq m'$, $1 \leq j_r \leq p-3$, должны некоторым образом исключаться из u. Отсюда следует, в частности, что моном g также должен быть исключен из u. Но такое исключение возможно лишь в том случае, когда моном g входит в некоторую другую гладкую орбитальную сумму $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f')$ того же самого веса $p-1+\mu$, которая также появляется в F_p-линейной комбинации u с ненулевым коэффициентом. Последнее возможно лишь в том случае, когда моном f' получается из f при помощи одного или нескольких преобразований (16) следующего специального вида

$$(z_{i_\rho,j}, z_{i_\sigma,k}) \mapsto (z_{i_\rho,k}, z_{i_\sigma,j}), \tag{17}$$

где $1 \leq \rho < \sigma \leq \delta$ и $1 \leq j < k \leq p$.

Теперь мы продолжим изложение следующим образом. Прежде всего, мы введем некоторую итеративную процедуру исключения лишних переменных $z_{i,j}$, где $1 \leq i \leq m'$, $1 \leq j \leq p-3$, из F_p-линейных комбинаций вида (15). После этого мы используем эту процедуру для определения класса тех F_p-линейных комбинаций (15), которые инвариантны относительно действия группы H. Если ρ, σ - положительные целые числа, такие что $1 \leq \tau < \rho < \sigma \leq \delta$, то процедура исключения указанных выше переменных $z_{i,j}$ основывается на следующих последовательных преобразованиях гладких орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f)$, для всевозможных $\mu > 2$ и $f \in A_{m',p}$.

Преобразование (i). Пусть

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f) = \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p} \right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p} \right)^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}}$$

и

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p}\left(z_{i_\sigma,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\sigma,p}\right)^{p^{e_\sigma}}$$

– две гладкие орбитальные суммы одного и того же веса $p-1+\mu > p+1$, включающие в себя по меньшей мере одну из переменных z_{ij}, для $1\le i\le m'$, $1\le j\le p-3$. Тогда мы имеем

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f) - S^{(\mu)}_{\tilde H}(f') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times\left(z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}\right)$$

и, следовательно,

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f) - S^{(\mu)}_{\tilde H}(f') = S^{(\mu-1)}_{\tilde H}(f_1),$$

где

$$f_1 = \left(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r}\right)\left(z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}\right).$$

Полагая теперь

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}$$

и замечая, что

$$\tilde\gamma\left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p}\right) = z^{(e_{i_\rho},e_{i_\sigma})}_{(i_\rho,i_\sigma),p},$$

мы можем рассматривать $S^{(\mu-1)}_{\tilde H}(f_1)$ как орбитальную сумму “монома”

$$f_1 = \left(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r}\right) z^{(e_{i_\rho},e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p}$$

веса $p-1+(\mu-1)$ относительно z_{ij} и $z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{i_{(\rho,\sigma)},p}$.

Преобразование (ii). Пусть

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f) = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times\left(z_{i_\rho,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_\rho}} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p}$$

и

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p}\left(z_{i_\sigma,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\sigma,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\sigma,p}\right)^{p^{e_\sigma}}.$$

Тогда мы имеем

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f) - S^{(\mu)}_{\tilde H}(f')$$

$$= \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} + \binom{\alpha}{1} z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p} \right) ,$$

где

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2}, \quad z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}$$

– однородные многочлены, такие что

$$\tilde\gamma\left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} \right) = z^{p^{(e_\rho,e_\sigma)}}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} + z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p}, \quad \tilde\gamma\left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma)} \right) = z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p}.$$

Это дает возможность рассматривать разность $S^{(\mu)}_{\tilde H}(f) - S^{(\mu)}_{\tilde H}(f')$ как орбитальную сумму $S^{(\mu-1)}_{\tilde H}(f_1)$ “монома”

$$f_1 = \left(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r} \right) z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{i_{(\rho,\sigma)},p-1}$$

веса $p-1+(\mu-1)$ относительно переменных z_{ij} и $z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1}$.

Преобразование (iii). Пусть теперь

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f) = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{i_\rho,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\rho,p} \right)^{p^{e_\rho}} \left(z_{i_\sigma,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\sigma,p} \right)^{p^{e_\sigma}}$$

и

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\left(z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p} \right)^{p^{e_\rho}} \left(z_{i_\sigma,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\sigma,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\sigma,p} \right)^{p^{e_\sigma}} .$$

– две гладкие орбитальные суммы одного и того же веса $p-1+\mu > p+1$. В этом случае мы имеем

$$S^{(\mu)}_{\tilde H}(f) - S^{(\mu)}_{\tilde H}(f')$$

$$= \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{i_{(\rho,\sigma)},p-2} + \binom{\alpha}{1} z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{i_{(\rho,\sigma)},p-1} + \binom{\alpha+1}{2} z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{i_{(\rho,\sigma)},p} \right),$$

где

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-2} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2},$$

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2},$$

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}$$

– однородные многочлены, такие что

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-2}\right) = z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-2} + z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} + z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p},$$

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1}\right) = z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} + z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p},$$

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p}\right) = z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p}.$$

Отсюда следует, что разность $S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f) - S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f')$ может быть рассмотрена как орбитальная сумма $S^{(\mu-1)}_{\tilde{H}}(f_1)$ “монома”

$$f_1 = \left(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r}\right) z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{i_{(\rho,\sigma)},p-2}$$

веса $p-1+(\mu-1)$ относительно z_{ij} и $z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-2}$.

Преобразование (iv). В более общей ситуации, пусть

$$S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f) = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \dots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times\left(z_{i_\rho,j} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,j+1} + \dots + \binom{\alpha}{p-j} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_\rho}}$$

$$\times\left(z_{i_\sigma,k} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\sigma,k+1} + \dots + \binom{\alpha}{p-k} z_{i_\sigma,p}\right)^{p^{e_\sigma}}$$

и

$$S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_\rho,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,j_r+1} + \dots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\left(z_{i_\rho,k} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,k+1} + \dots + \binom{\alpha}{p-k} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_\rho}}$$

$$\times\left(z_{i_\sigma,j} + \tbinom{\alpha}{1} z_{i_\sigma,j+1} + \dots + \tbinom{\alpha}{p-j} z_{i_\sigma,p}\right)^{p^{e_\sigma}},$$

где $1 \leq j < k \leq p$. Тогда мы имеем

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f) - S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f')$$

$$= \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho, \sigma}} \left(z_{i_r, j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r, j_r+1} + \dots + \binom{\alpha}{p - j_r} z_{i_r, p} \right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{(i_\rho, i_\sigma), l}^{(e_\rho, e_\sigma)} + \dots + a_{p-1}(\alpha) z_{(i_\rho, i_\sigma), p-1}^{(e_\rho, i_\sigma)} + a_p(\alpha) z_{(i_\rho, i_\sigma), p}^{(e_\rho, e_\sigma)} \right),$$

где $a_l(\alpha), a_{l+1}(\alpha), \cdots, a_{p-1}(\alpha), a_p(\alpha)$ - некоторые многочлены из кольца $F_p[\alpha]$, и

$$z_{(i_\rho, i_\sigma), l}^{(e_\rho, e_\sigma)} = z_{i_\rho, j}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, k}^{p^{e_\sigma}} - z_{i_\rho, k}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, j}^{p^{e_\sigma}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$z_{(i_\rho, i_\sigma), p-2}^{(e_\rho, e_\sigma)} = z_{i_\rho, p-2}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p-1}^{p^{e_\sigma}} - z_{i_\rho, p-1}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p-2}^{p^{e_\sigma}},$$

$$z_{(i_\rho, i_\sigma), p-1}^{(e_\rho, e_\sigma)} = z_{i_\rho, p-2}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p}^{p^{e_\sigma}} - z_{i_\rho, p}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p-2}^{p^{e_\sigma}},$$

$$z_{(i_\rho, i_\sigma), p}^{(e_\rho, e_\sigma)} = z_{i_\rho, p-1}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p}^{p^{e_\sigma}} - z_{i_\rho, p}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p-1}^{p^{e_\sigma}}.$$

Теперь процедура исключения переменных z_{ij}, for $1 \leq i \leq m'$, $1 \leq j \leq p-3$ может быть описана рекурсивно следующим образом.

Случай (1). Пусть

$$f = \prod_{r=1}^{\delta} z_{i_r, j_r}^{p^{e_r}}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\delta \leq m',$$

– гладкий многочлен из $A_{m'p}$ веса $\mu > 2$, который не инвариантен под действием группы $\tilde{H}$, и $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f)$ – соответствующая гладкая орбитальная сумма, входящая в F_p-линейную комбинацию (15) с ненулевым коэффициентом a. Предположим, что моном f имеет вид

$$f = \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho, \sigma}}^{\delta} z_{i_r, j_r}^{p^{e_r}} \right) z_{i_\rho, p-1}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p}^{p^{e_\sigma}}$$

где $1 \leq r < \rho < \sigma \leq p$. Далее, предположим, что орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f')$, где

$$f' = \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho, \sigma}}^{\delta} z_{i_r, j_r}^{p^{e_r}} \right) z_{i_\rho, p}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p-1}^{p^{e_\sigma}},$$

входит линейную комбинацию (15) с коэффициентом $-a$. Полагая

$$z_{(i_\rho, i_\sigma), p}^{(e_\rho, e_\sigma)} = z_{i_\rho, p-1}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p}^{p^{e_\sigma}} - z_{i_\rho, p}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma, p-1}^{p^{e_\sigma}}$$

и используя преобразование (i), мы находим, что разность

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f) - S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f') = S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1),$$

которая может быть рассмотрена как гладкая орбитальная сумма “монома”

$$f_1 = \Bigg(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma}}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} n \Bigg) z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)}$$

веса $p-1+(\mu-1)$, также входит в F_p-линейную комбинацию (15) с тем же самым коэффициентом a.

Предположим теперь, что моном f_1 имеет вид

$$f_1 = \Bigg(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\rho_1,\sigma_1}}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} \Bigg) z_{i_{\rho_1},p-1}^{p^{e_{\rho_1}}} z_{i_{\sigma_1},p}^{p^{e_{\sigma_1}}} z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)}.$$

Предположим, кроме того, что орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1')$, где

$$f_1' = \Bigg(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\rho_1,\sigma_1}}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} \Bigg) z_{i_{\rho_1},p}^{p^{e_{\rho_1}}} z_{i_{\sigma_1},p-1}^{p^{e_{\sigma_1}}} z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)},$$

также входит в F_p-линейную комбинацию (15) с коэффициентом $-a$. Тогда, полагая

$$z_{(i_{\rho_1},i_{\sigma_1}),p}^{(e_{\rho_1},e_{\sigma_1})} = z_{i_{\rho_1},p-1}^{p^{e_{\rho_1}}} z_{i_{\sigma_1},p}^{p^{e_{\sigma_1}}} - z_{i_{\rho_1},p}^{p^{e_{\rho_1}}} z_{i_{\sigma_1},p-1}^{p^{e_{\sigma_1}}}$$

и используя снова преобразование (i), мы находим, что эта F_p-линейная комбинация содержит разность

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1) - S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1') = S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2),$$

которая может рассмотрена как орбитальная сумма гладкого “монома”

$$f_2 = \Bigg(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\rho_1,\sigma_1}}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} \Bigg) z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)} z_{(i_{\rho_1},i_{\sigma_1}),p}^{(e_{\rho_1},e_{\sigma_1})}$$

веса $p-1+(\mu-2)$.

Случай (2). С другой стороны, если

$$f = \Bigg(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\tau}}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} \Bigg) z_{i_\rho,p-2}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}} z_{i_\tau,p}^{p^{e_\tau}}$$

и

$$f' = \Bigg(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\tau}}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} \Bigg) z_{i_\rho,p}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p-2}^{p^{e_\sigma}} z_{i_\tau,p}^{p^{e_\tau}}$$

– два многочлена одного и того же веса $p-1+\mu$, то используя преобразование (ii) мы можем построить орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1) = \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\tau}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p} \right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{(i_\rho,i_\sigma),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)} \right) z_{i_\tau,p}^{p^{e_\tau}}.$$

Аналогично, начиная с многочленов

$$g = \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\tau}} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} \right) z_{i_\rho,p-1}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}} z_{i_\tau,p-1}^{p^{e_\tau}}$$

и

$$g' = \left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\tau}}^{\delta} z_{i_r,j_r}^{p^{e_r}} \right) z_{i_\rho,p}^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p-1}^{p^{e_\sigma}} z_{i_\tau,p-1}^{p^{e_\tau}}$$

веса $p-1+\mu > p+1$, мы можем построить орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(g_1) = \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\tau}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p} \right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \quad z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)} \left(z_{i_\tau,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\tau,p} \right)^{p^{e_\tau}} .$$

Из изложенного выше следует, что если линейная комбинация (15) содержит орбитальные суммы $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f)$, $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(g')$ и $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f')$, $S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(g)$ с коэффициентами a и $-a$, соответственно, то эта линейная комбинация содержит также орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2) = S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1) - S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(g_1)$$

$$= \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\tau}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p} \right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{(i_\rho,i_\sigma),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma)} z_{i_\tau,p}^{(e_\tau)} - z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)} z_{i_\tau,p-1}^{(e_\tau)} \right)$$

веса $p-1+(\mu-2)$.

Таким же образом, предполагая что F_p-линейная комбинация (15) содержит орбитальные суммы

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f) = \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq \rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p} \right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p} \right)^{p^{e_\rho}} \quad z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}}$$

$$\times \left(z_{i_\tau,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\tau,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\tau,p} \right)^{p^{e_\tau}} \quad z_{i_\upsilon,p}^{p^{e_\upsilon}}$$

и

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}}$$

$$\times \quad z_{i_\tau,p}^{p^{e_\tau}} \left(z_{i_\upsilon,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\upsilon,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\upsilon,p}\right)^{p^{e_\upsilon}}$$

с коэффициентами a и $-a$, соответственно, мы получаем, что эта линейная комбинация содержит также орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1) = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^r},$$

$$\times \left(z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}} \left(z_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\tau,e_\upsilon)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\tau,e_\upsilon)}\right)$$

где

$$z_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\tau,e_\upsilon)} = z_{i_\tau,p-2}^{p^{e_\tau}} z_{i_\upsilon,p}^{p^{e_\upsilon}} - z_{i_\tau,p}^{p^{e_\tau}} z_{i_\upsilon,p-2}^{p^{e_\upsilon}}.$$

Предположим, кроме того, что F_p-линейная комбинация (15) содержит орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$z_{i_\rho,p}^{p^{e_\rho}} \left(z_{i_\sigma,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\sigma,p}\right)^{p^{e_\sigma}} \left(z_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\tau,e_\upsilon)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\tau,e_\upsilon)}\right)^{(e_\tau,e_\upsilon)}$$

с коэффициентом $-a$. Тогда эта линейная комбинация содержит также орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2) = S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1) - S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1')$$

$$= \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^r}$$

$$\times \quad u_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)} \left(u_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\tau,e_\upsilon)} + \binom{\alpha}{1} u_{i(\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\tau,e_\upsilon)}\right)$$

с тем же самым коэффициентом a. Наконец, если мы предположим, что F_p-линейная комбинация (15) содержит орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{(i_\rho,i_\sigma),p-1}^{(e_\rho,ie_\sigma)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)}\right) z_{(i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\tau,i_\upsilon)}$$

с коэффициентом $-a$, то она содержит также сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-3)}(f_3) = S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2) - S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2')$$

$$= \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^r}$$

$$\times \left(z^{(e_\rho,i_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p} - z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p} z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}\right)$$

веса $p-1+(\mu-3)$.

Случай (3). Теперь мы предположим, что F_p-линейная комбинация (15) содержит орбитальные суммы

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f) = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{i_\rho,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}}$$

$$\times \left(z_{i_\tau,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\tau,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\tau,p}\right) \left(z_{i_\upsilon,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\upsilon,p}\right)^{p^{e_\upsilon}}$$

и

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu)}(f') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{i_\rho,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}}$$

$$\times \left(z_{i_\tau,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\tau,p}\right)^{p^{e_\tau}} \left(z_{i_\upsilon,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\upsilon,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\upsilon,p}\right)^{p^{e_\upsilon}}$$

с коэффициентами a и $-a$, соответственно. Тогда, используя преобразование (iii) мы находим, что эта линейная комбинация содержит также сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-1)}(f_1) = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{i_\rho,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\rho,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\rho,p}\right)^{p^{e_\rho}} z_{i_\sigma,p}^{p^{e_\sigma}}$$

$$\times \left(z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2} + \binom{\alpha}{1} z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1} + \binom{\alpha+1}{2} z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p}\right),$$

где

$$z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2} = z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-2} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p-1} - z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-1} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p-2},$$

$$z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1} = z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-2} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p} - z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p-2},$$

$$u z_{(i_\tau,i_\upsilon),p} = z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p-1} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p} - z^{p^{e_\tau}}_{i_\tau,p} z^{p^{e_\upsilon}}_{i_\upsilon,p-1}.$$

Поскольку

$$\gamma(z_{i,p-2}) = z_{i,p-2} + z_{i,p-1}, \quad \gamma(z_{i.p-1}) = z_{i,p-1} + z_{i,p}, \quad \gamma(z_{i,p}) = z_{i,p},$$

мы видим, что многочлены $z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2}$, $z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon).p-1}$ и $z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p}$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma\left(z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2}\right) = z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2} + z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1} + z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p},$$

$$\gamma\left(z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}\right) = z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1} + z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p},$$

$$\gamma\left(z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p}\right) = z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p}.$$

Далее, предположим, что F_p-линейная комбинация (15) содержит также орбитальную сумму

$$S^{(\mu-1)}_{\tilde H}(f_1') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \dots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \quad z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} \left(z_{i_\sigma,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i_\sigma,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\sigma,p}\right)^{p^{e_\sigma}}$$

$$\times \left(z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2} + \binom{\alpha}{1} z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1} + \binom{\alpha+1}{2} z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p}\right)$$

с коэффициентом $-a$. Тогда она содержит также орбитальную сумму

$$S^{(\mu-2)}_{\tilde H}(f_2) = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \dots + \binom{\alpha}{p-j_r}\right)\Bigg)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z^{(e_\rho i_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} + \binom{\alpha}{1} z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p}\right)$$

$$\left(z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2} + \binom{\alpha}{1} z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1} + \binom{\alpha+1}{2} z^{(e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\tau,i_\upsilon),p}\right) \quad .$$

Наконец, предполагая, что F_p-линейная комбинация (15) содержит орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2') = \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{(i_\rho,i_\sigma),p-2}^{(e_\rho,e_\sigma)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_\rho,i_\sigma),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma)} + \binom{\alpha+1}{2} z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)}\right)$$

$$\times \left(u_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\tau,e_\upsilon)} + \binom{\alpha}{1} u_{(i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\tau,e_\upsilon)}\right)$$

с коэффициентом $-a$, мы получаем, что эта линейная комбинация содержит также орбитальную сумму

$$S_{\tilde{H}}^{(\mu-3)}(f_3) = S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2) - S_{\tilde{H}}^{(\mu-2)}(f_2')$$

$$= \sum_{\alpha\in F_p} \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma,\tau,\upsilon}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-2}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)} + \binom{\alpha}{1} z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)} + \binom{\alpha}{2} z_{i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}\right)$$

веса $p-1+(\mu-3)$, где

$$z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-2}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)} = z_{(i_\rho,i_\sigma),p-2}^{(e_\rho,e_\sigma)} u_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\tau,r_\upsilon)} - z_{(i_\rho,i_\sigma),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma)} z_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2}^{(e_\tau,e_\upsilon)}$$

$$z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma e_\tau,e_\upsilon)} = z_{(i_\rho,i_\sigma),p-2}^{(e_\rho,e_\sigma)} z_{(i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\tau,e_\upsilon)} - z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,i_\sigma)} z_{(i_\tau,i_\upsilon),p-2}^{(e_\tau,e_\upsilon)}$$

$$z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)} = z_{(i_\rho,i_\sigma),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma)} z_{(i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\tau,e_\upsilon)} - z_{(i_\rho,i_\sigma),p}^{(e_\rho,e_\sigma)} z_{(i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\tau,e_\upsilon)} .$$

Легко проверить, что многочлены $z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-2}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}$, $z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}$ и $z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma\left(z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-2}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}\right) = z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-2}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)} + z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}$$

$$\gamma\left(z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma,i_\tau,e_\upsilon)}\right) = z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p-1}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)} + z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}$$

$$\gamma\left(z_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}\right) = u_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p}^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)} .$$

Приведенная выше конструкция может быть расширена следующим образом. Пусть

$$\tilde{i}_\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_\sigma), \quad \tilde{e}_\sigma = (e_1, e_2, \ldots, e_\sigma) ,$$

где $i_1, \ldots, i_\sigma, e_1, \ldots, e_\sigma$ - положительные целые, и $1 \leq i_1 < \cdots < i_\sigma \leq m'$, для $1 \leq \sigma \leq \delta$. Рассмотрим

$$M = \{\tilde{i}_\sigma \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_\sigma \leq m', 1 \leq \sigma \leq \delta'\}$$

как упорядоченное множество относительно полного упорядочения " $\preceq$ ". Далее, определим многочлены $z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2}$, $z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1}$, $z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p}$ рекурсивно, с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}
z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2} &= z^{(\tilde{e}_{\sigma-1})}_{\tilde{i}_{\sigma-1},p-2} z^{(e_\sigma)}_{i_\sigma,p-1} - z^{(\tilde{e}_{\sigma-1})}_{\tilde{i}_{\sigma-1},p-1} z^{(e_\sigma)}_{i_\sigma,p-2} \\
z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1} &= z^{(\tilde{e}_{\sigma-1})}_{\tilde{i}_{\sigma-1},p-2} z^{(e_\sigma)}_{i_\sigma,p} - z^{(\tilde{e}_{\sigma-1})}_{\tilde{i}_{\sigma-1},p} z^{(e_\sigma)}_{i_\sigma,p-2} \\
z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p} &= z^{(\tilde{e}_{\sigma-1})}_{\tilde{i}_{\sigma-1},p-1} z^{(e_\sigma)}_{i_\sigma,p} - z^{(\tilde{e}_{\sigma-1})}_{\tilde{i}_{\sigma-1},p} z^{(e_\sigma)}_{i_\sigma,p-1}\ ,
\end{aligned} \tag{18}$$

в случае, когда $\sigma = 2 + 3l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, и

$$\begin{aligned}
z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2} &= z^{(\tilde{e}_{\sigma-2})}_{\tilde{i}_{\sigma-2},p-2} z^{(e_{\sigma-1},e_\sigma)}_{(i_{\sigma-1},i_\sigma),p-1} - z^{(\tilde{e}_{\sigma-2})}_{\tilde{i}_{\sigma-2},p-1} z^{(e_{\sigma-1},e_\sigma)}_{(i_{\sigma-1},i_\sigma),p-2} \\
z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1} &= z^{(\tilde{e}_{\sigma-2})}_{\tilde{i}_{\sigma-2},p-2} z^{(e_{\sigma-1},e_\sigma)}_{(i_{\sigma-1},i_\sigma),p} - z^{(\tilde{e}_{\sigma-2})}_{\tilde{i}_{\sigma-2},p} z^{(e_{\sigma-1},e_\sigma)}_{(i_{\sigma-1},i_\sigma),p-2} \\
z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p} &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_{\sigma-2},p-1} z^{(e_{\sigma-1},e_\sigma)}_{(i_{\sigma-1},i_\sigma),p} - z^{(\tilde{e}_{\sigma-2})}_{\tilde{i}_{\sigma-2},p} z^{(e_{\sigma-1},e_\sigma)}_{(i_{\sigma-1},i_\sigma),p-1}\ ,
\end{aligned} \tag{19}$$

в случае, когда $\sigma = 1 + 3l$, $l = 1, 2, \ldots$. Заметим также, что многочлены, определенные соотношениями (18) и (19) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2}\right) &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2} + z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1} + z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p} \\
\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1}\right) &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1} + z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p} \\
\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p}\right) &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p}\ ,
\end{aligned} \tag{20}$$

для $\sigma = 2 + 3l$, $\sigma \geq 2$, и

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2}\right) &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2} + z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1} \\
\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1}\right) &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1} + z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p} \\
\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p}\right) &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p}\ ,
\end{aligned} \tag{21}$$

для $\sigma = 1 + 3l$, $\sigma \geq 4$, соответственно.

В общем случае, если $\sigma, \tau \in \{1 + 3l \mid l \geq 0\}$ или $\sigma, \tau \in \{2 + 3l \mid l \geq 0\}$, мы определим $z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-2}$, $z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-1}$, $z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p}$ с помощью следующих рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-2} &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2} z^{(\tilde{e}_\tau)}_{\tilde{i}_\tau,p-1} - z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1} z^{(\tilde{e}_\tau)}_{\tilde{i}_\tau,p-2} \\
z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-1} &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-2} z^{(\tilde{e}_\tau)}_{\tilde{i}_\tau,p} - z^{(\tilde{i}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p} z^{(\tilde{e}_\tau)}_{\tilde{i}_\tau,p-2} \\
z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p} &= z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p-1} z^{(\tilde{e}_\tau)}_{\tilde{i}_\tau,p} - z^{(\tilde{e}_\sigma)}_{\tilde{i}_\sigma,p} z^{(\tilde{e}_\tau)}_{\tilde{i}_\tau,p-1}
\end{aligned} \tag{22}$$

и заметим, что

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-2}\right) = z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-2} + z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-1}$$

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-1}\right) = z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-1} + z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p} \tag{23}$$

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p}\right) = z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p}\ ,$$

если $\sigma, \tau \in \{2 + 3l \mid l \geq 0\}$, и

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-2}\right) = z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-2} + z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-1} + z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p}$$

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-1}\right) = z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p-1} + z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p} \tag{24}$$

$$\tilde{\gamma}\left(z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p}\right) = z^{(\tilde{e}_{\sigma+\tau})}_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p}\ ,$$

если $\sigma, \tau \in \{1 + 3l \mid l \geq 0\}$.

Случай 4. Наконец, предположим, что F_p-линейная комбинация (15) содержит орбитальные суммы $S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f)$ и $S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f')$, где

$$f = \left(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r}\right) z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,j} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,k} \quad \text{and} \quad f' = \left(\prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}} z^{p^{e_r}}_{i_r,j_r}\right) z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,k} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,j}\ ,$$

для $1 \leq j < k \leq p - 1$. В этом случае мы имеем

$$S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f) - S^{(\mu)}_{\tilde{H}}(f)$$

$$= \prod_{\substack{r=1\\ r\neq\rho,\sigma}}^{\delta} \left(z_{i_r,j_r} + \binom{\alpha}{1} z_{i_r,j_r+1} + \cdots + \binom{\alpha}{p-j_r} z_{i_r,p}\right)^{p^{e_r}}$$

$$\times \left(z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),l} + \cdots + a_{p-1}(\alpha) z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} + a_p(\alpha) z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p}\right),$$

где $a_l(\alpha), a_{l+1}(\alpha), \ldots, a_{p-1}(\alpha), a_p(\alpha)$ – многочлены из кольца $F_p[\alpha]$ и

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),l} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,j} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,k} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,k} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,j},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-2} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2},$$

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p-1} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-2} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-2},$$

$$z^{(e_\rho,e_\sigma)}_{(i_\rho,i_\sigma),p} = z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p-1} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p} - z^{p^{e_\rho}}_{i_\rho,p} z^{p^{e_\sigma}}_{i_\sigma,p-1}\ .$$

Интегрируя подходящим образом указанный выше процесс исключения дополнительных переменных и применяя этот процесс к каждой паре орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k)$, $S_{\tilde{H}}^{(\mu_l)}(f_l)$, входящих в F_p-линейную комбинацию (15), мы приходим к следующим двум возможным ситуациям: либо

(i) результирующая F_p-линейная комбинация орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k^*)}(f_k^*)$ не содержит ни одной из дополнительных переменных z_{ij} с $1 \le i \le m'$, $1 \le j \le p-3$; либо

(ii) не существует никакого способа для исключения всех дополнительных переменных z_{il} с $1 \le i \le m'$, $1 \le j \le p-3$ в выше упомянутой F_p-линейной комбинации.

В соответствии с теоремой 4, исходная F_p-линейная комбинация u орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k)$ инвариантна относительно действия группы H в первом из указанных выше двух случаев и не инвариантна во втором случае. Применяя теперь описанный выше итеративный процесс исключения дополнительных переменных z_{ij} с $1 \le i \le m'$, $1 \le j \le p-3$, основанный на использовании преобразований (16) и (17), затем суммируя результаты предложений 2–4 и учитывая соотношения (14), (18)–(24), мы получаем следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть*

$$u = \sum_{k=1}^{K} S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k), \quad a_k \ne 0 \ ,$$

– F_p-линейная комбинация гладких орбитальных сумм $S_{\tilde{H}}^{(\mu_k)}(f_k)$. Если эта линейная комбинация не зависит ни от одной из переменных z_{ij}, для $1 \le i \le m'$, $1 \le j \le p-3$, то она является многочленом над полем F_p от инвариантов

$$z_{i,p}, \qquad 1 \le i \le m' \ ;$$

$$z_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p} = \det \begin{pmatrix} z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}^{(e_\sigma)} & z_{\tilde{i}_\tau,p-1}^{(e_\tau)} \\ z_{\tilde{i}_\sigma,p}^{(e_\sigma)} & z_{\tilde{i}_\tau,p}^{(e_\tau)} \end{pmatrix} \ ,$$

где либо $\sigma,\tau \in \{1+3l \mid l \ge 0\}$, либо $\sigma,\tau \in \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma,\tau \le m'$, и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}^{(\tilde{e}_\sigma,\tilde{e}_\tau)} = \det \begin{pmatrix} z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}^{(\tilde{e}_\sigma)} & z_{\tilde{i}_\tau,p-1}^{(\tilde{e}_\tau)} \\ z_{\tilde{i}_\sigma,p}^{(\tilde{e}_\sigma)} & z_{\tilde{i}_\tau,p}^{(\tilde{e}_\tau)} \end{pmatrix} \ , \tag{25}$$

где либо $\sigma \in \{1+3l \mid l \ge 0\}, \tau \in \{2+3l \mid l \ge 0\}$, либо $\sigma \in \{2+3l \mid l \ge 0\}, \tau \in \{1+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma,\tau \le m'$, и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$w_{(\tilde{i}_\rho,\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}^{(\tilde{e}_\rho,\tilde{e}_\sigma,\tilde{e}_\tau)} = \det \begin{pmatrix} z_{\tilde{i}_\rho,p-2}^{(\tilde{e}_\rho)} & z_{\tilde{i}_\sigma,p-2}^{(\tilde{e}_\sigma)} & z_{\tilde{i}_\tau,p-2}^{(\tilde{e}_\tau)} \\ z_{\tilde{i}_\rho,p-1}^{(\tilde{e}_\rho)} & z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}^{(\tilde{e}_\sigma)} & z_{\tilde{i}^\tau,p-1}^{(\tilde{e}_\tau)} \\ z_{\tilde{i}_\rho,p}^{(\tilde{e}_\rho)} & z_{\tilde{i}_\sigma,p}^{(\tilde{e}_\sigma)} & z_{\tilde{i}_\tau,p}^{(\tilde{e}_\tau)} \end{pmatrix} \ , \tag{26}$$

где либо $\rho,\sigma,\tau \in \{1+3l \mid l \ge 0\}$, либо $\rho,\sigma,\tau \in \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma,\tau \le m'$, и $\tilde{i}_\rho \prec \tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$; а также

$$\begin{aligned} v_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}^{(\tilde{e}_\sigma,\tilde{e}_\tau)} = {} & z_{\tilde{i}_\sigma,p-2}^{(\tilde{e}_\sigma)} z_{\tilde{i}_\tau,p}^{(\tilde{e}_\tau)} + z_{\tilde{i}_\sigma,p}^{(\tilde{e}_\sigma)} z_{\tilde{i}_\tau,p-2}^{(\tilde{e}_\tau)} - z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}^{(\tilde{e}_\sigma)} z_{\tilde{i}_\tau,p-1}^{(\tilde{e}_\tau)} \\ & + z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}^{(\tilde{e}_\sigma)} z_{\tilde{i}_\tau.p}^{(\tilde{e}_\tau)} \ , \end{aligned} \tag{27}$$

где $\sigma, \tau \in \{1+3l \mid l \geq 0\}$, $1 \leq \sigma, \tau \leq m'$ *и* $\tilde{i}_\sigma \preceq \tilde{i}_\tau$.

Теперь мы изучим структуру инвариантов $u^{(e_\sigma,e_\tau)}_{(i_\sigma,i_\tau),p}$, $u^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau)}_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau),p}$, $u^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau,e_\upsilon)}_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau,i_\upsilon),p}$, $v^{(e_\sigma,e_\tau)}_{(i_\sigma,i_\tau),p}$, $w^{(e_\rho,e_\sigma,e_\tau)}_{(i_\rho,i_\sigma,i_\tau),p}$, определенных соотношениями (14). Мы можем считать без уменьшения общности, что

$$e_\rho \geq e_\sigma \geq e_\tau \geq e_\upsilon \geq 0, \quad 1 \leq \rho \leq \sigma \leq \tau \leq \upsilon \leq m\ ,$$

и что $e_\rho \geq 1$. Прежде всего мы заметим, что

$$N^{(0)}_{\tilde{H}}(z_{i,p-1}) = \prod_{\alpha \in F_p} \left(z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p} \right) = z^p_{i,p-1} - z_{i,p-1} z^{p-1}_{i,p}$$

и

$$N^{(0)}_{\tilde{H}}(z_{i,p}) = z^p_{i,p}\ .$$

Это показывает, что если

$$f = \prod_{e=0}^{\eta} \prod_{i=1}^{m'} (z^{p^e}_{i,p-1})^{s^{(e)}_{i,p-1}} (z^{p^e}_{i,p})^{s^{(e)}_{i,p}}\ ,$$

то

$$N^{(0)}_{\tilde{H}}(f) = \prod_{e=0}^{\eta} \prod_{i=1}^{m} (z^{p^{e+1}}_{i,p-1} - z^{p^e}_{i,p-1} z^{p^e(p-1)}_{i,p})^{s_{i,p-1}} (z^{p^e}_{i,p})^{s_{i,p}}\ .$$

Теперь мы положим

$$\begin{gathered} \zeta_{i,p-1} = z^p_{i,p-2} - z_{i,p-2} z^{p-1}_{i,p}, \quad \zeta_{i,p} = z^p_{i,p-1} - z_{i,p-1} z^{p-1}_{i,p} \\ \omega_{i,p} = \zeta^p_{i,p-1} - \zeta_{i,p-1} \zeta^{p-1}_{i,p} \end{gathered} \tag{28}$$

и заметим, что

$$\begin{gathered} \tilde{\gamma}(\zeta_{i,p-1}) = \zeta_{i,p-1} + \zeta_{i,p}, \quad \tilde{\gamma}(\zeta_{i,p}) = \zeta_{i,p}, \quad \tilde{\gamma}(\omega_{i,p}) = \omega_{i,p}, \\ \zeta_{i,p} = N^{(0)}_{\tilde{H}}(z_{i,p-1}), \quad \omega_{i,p} = N^{(0)}_{\tilde{H}}(\zeta_{i,p-1})\ . \end{gathered} \tag{29}$$

Из соотношений (28) мы имеем

$$\begin{aligned} & z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} \\ &= (\zeta_{i_1,p} + z_{i_1,p-1} z^{p-1}_{i_1,p})^{p^{e_1-1}} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p} z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} \\ &= \zeta^{p^{e_1-1}}_{i_1,p} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} + (z^{p^{e_1-1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} - z^{p^{e_1-1}}_{i_1,p} z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1}) z^{p^{e_1-1}(p-1)}_{i_1,p}\ . \end{aligned}$$

Итерируя теперь последнее соотношение относительно $z_{i_1,p-1}$, а затем относительно $z_{i_2,p-1}$, мы получаем

$$\begin{aligned} & z^{p^{e_1}}_{i_1,p-1} z^{p^{e_2}}_{i_2,p} - z^{p^{e_1}}_{i_1,p} z^{p^{e_2}}_{i_2,p-1} \\ &= (z_{i_1,p-1} z_{i_2,p} - z_{i_1,p} z_{i_2,p-1}) z^{p^{e_1-1}}_{i_1,p} z^{p^{e_2-1}}_{i_2,p} \\ &+ \left(\sum_{\varepsilon_1=1}^{e_1} \zeta^{p^{e_1-\varepsilon_1}}_{i_1,p} z^{p^{e_1-\varepsilon_1+1}(p^{\varepsilon_1-1}-1)}_{i_1,p} \right) z^{p^{e_2}}_{i_2,p} \\ &- \left(\sum_{\varepsilon_2=1}^{e_2} \zeta^{p^{e_2-\varepsilon_2}}_{i_2,p} z^{p^{e_2-\varepsilon_2+1}(p^{e_2-1}-1)}_{i_2,p} \right) z^{p^{e_1}}_{i_1,p}\ . \end{aligned} \tag{30}$$

Аналогичным образом, соотношения (28) дают

$$(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}) z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}) z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}$$

$$= [(\zeta_{i_1,p-1} + z_{i_1,p-2} z_{i_1,p}^{p-1})^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}] z_{i_3,p}^{p^{e_3}}$$

$$-[(\zeta_{i_1,p} + z_{i_1,p-1} z_{i_1,p}^{p-1})^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}] z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}$$

$$= (\zeta_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - \zeta_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}) z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$

$$+(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}) z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}(p-1)} z_{i_3,p}^{p^{e_3}}$$

$$-(z_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}) z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}(p-1)} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} .$$

Итерируя последнее соотношение относительно $z_{i_1,p-2}, z_{i_1,p-1}, \zeta_{i_1,p-1}$, а затем относительно $z_{i_2,p-2}, z_{i_1,p-1}, \zeta_{i_2,p-1}$ and $z_{i_3,p-1}, \zeta_{i_3,p-1}$, мы находим, что

$$(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}) z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}) z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}$$

$$= [(z_{i_1,p-2} z_{i_2,p} - z_{i_1,p} z_{i_2,p-2}) z_{i_3,p} - (z_{i_1,p-1} z_{i_2,p} - z_{i_1,p} z_{i_2,p-1}) z_{i_3,p-1}] \tag{31}$$

$$\times z_{i_1,p}^{p^{e_1}-1} z_{i_2,p}^{p^{e_2}-1} z_{i_3,p}^{p^{e_3}-1}$$

$$+(z_{i_1,p-1} z_{i_2,p} - z_{i_1,p} z_{i_2,p-1}) A_{i_1,i_2}$$

$$+(\zeta_{i_1,p-1} z_{i_3,p} - \zeta_{i_1,p} z_{i_3,p-1}) B_{i_1,i_2,i_3} + (\zeta_{i_2,p-1} z_{i_3,p} - \zeta_{i_2,p} z_{i_3,p-1}) B_{i_2,i_3}$$

$$+C_{i_1,i_2,i_3} ,$$

где A_{i_1,i_2}, B_{i_1,i_2}, B_{i_2,i_3} – многочлены над F_p относительно переменных

$$z_{i_1,p}, \quad z_{i_2,p}, \quad z_{i_3,p}, \quad \zeta_{i_1,p}, \quad \zeta_{i_2,p}, \quad \zeta_{i_3,p} ,$$

а C_{i_1,i_2,i_3} – многочлен над F_p от переменных

$$z_{i_1,p}, \quad z_{i_2,p}, \quad z_{i_3,p}, \quad \zeta_{i_1,p}, \quad \zeta_{i_2,p}, \quad \zeta_{i_3,p}, \quad \omega_{i_1,p}, \quad \omega_{i_2,p} .$$

Далее, используя (28), мы получаем, что

$$(z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}})(z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-1}^{p^{e_4}})$$

$$-(z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}})(z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} z_{i_4,p}^{p^{e_4}} - z_{i_3,p}^{p^{e_3}} z_{i_4,p-2}^{p^{e_4}}) \tag{32}$$

является суммой H-инвариантов

$$(z_{i_1,p-2}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-2})(z_{i_3,p-1}z_{i_4,p} - z_{i_3,p}z_{i_4,p-1})$$
$$\times z_{i_1,p}^{p^{e_1}-1} z_{i_2,p}^{p^{e_2}-1} z_{i_3,p}^{p^{e_3}-1} z_{i_4,p}^{p^{e_4}-1}$$
$$-(z_{i_1,p-1}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-1})(z_{i_3,p-2}z_{i_4,p} - z_{i_3,p}z_{i_4,p-2}) \tag{33}$$
$$z_{i_1,p}^{p^{e_1}-1} z_{i_2,p}^{p^{e_2}-1} z_{i_3,p}^{p^{e_3}-1} z_{i_4,p}^{p^{e_4}-1},$$

$$(z_{i_1,p-1}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-1})A_{i_1,i_2}, \quad (z_{i_3,p-1}z_{i_4,p} - z_{i_3,p}z_{i_4,p-1})A_{i_3,i_4},$$

$$(\zeta_{i_1,p-1}\zeta_{i_3,p} - \zeta_{i_1,p}\zeta_{i_3,p-1})B_{i_1,i_3}, \quad (\zeta_{i_1,p-1}\zeta_{i_4,p} - \zeta_{i_1,p}\zeta_{i_4,p-1})B_{i_1,i_4},$$
$$(\zeta_{i_2,p-1}\zeta_{i_3,p} - \zeta_{i_2,p}\zeta_{i_3,p-1})B_{i_2,i_3}, \quad (\zeta_{i_2,p-1}\zeta_{i_4,p} - \zeta_{i_2,p}\zeta_{i_4,p-1})B_{i_2,i_4}\ ;$$

H-инвариантов

$$[\zeta_{i_1,p}(z_{i_3,p-2}z_{i_4,p} - z_{i_3,p}z_{i_4,p-2}) - \zeta_{i_1,p-1}(z_{i_3,p-1}z_{i_4,p} - z_{i_3,p}z_{i_4,p-1})] \times C_{i_1,i_3,i_4},$$
$$[\zeta_{i_2,p}(z_{i_3,p-2}z_{i_4,p} - z_{i_3,p}z_{i_4,p-2}) - \zeta_{i_2,p-1}(z_{i_3,p-1}z_{i_4,p} - z_{i_3,p}z_{i_4,p-1})] \times C_{i_2,i_3,i_4}, \tag{34}$$
$$[\zeta_{i_3,p}(z_{i_1,p-2}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-2}) - \zeta_{i_3,p-1}(z_{i_1,p-1}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-1})] \times C_{i_1,i_2,i_3},$$
$$[\zeta_{i_4,p}(z_{i_1,p-2}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-2}) - \zeta_{i_4,p-1}(\zeta_{i_1,p-1}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-1})] \times C_{i_1,i_2,i_4}$$

и H-инвариантов D_{i_1,i_2,i_3,i_4}, где

$$A_{i_1,i_2}, \quad A_{i_3,i_4}, \quad B_{i_1,i_3}, \quad B_{i_1,i_4}, \quad B_{i_2,i_3}, \quad B_{i_2,i_4},$$

$$C_{i_1,i_3,i_4}, \quad C_{i_2,i_3,i_4}, \quad C_{i_1,i_2,i_3}, \quad C_{i_1,i_2,i_4}, \quad D_{i_1,i_2,i_3,i_4}$$

– многочлены над полем F_p от переменных

$$z_{i_1,p}, \quad z_{i_2,p}, \quad z_{i_3,p}, \quad z_{i_4,p}, \quad \zeta_{i_1,p}, \quad \zeta_{i_2,p}, \quad \zeta_{i_3,p}, \quad \zeta_{i_4,p},$$
$$\omega_{i_1,p}, \quad \omega_{i_2,p}, \quad \omega_{i_3,p}, \quad \omega_{i_4,p}\ .$$

Учитывая снова соотношения (28), приходим к соотношению

$$z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$
$$= (\zeta_{i_1,p-1} + z_{i_1,p-2} z_{i_1,p}^{p-1})^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}}$$
$$-(\zeta_{i_1,p} + z_{i_1,p-1} z_{i_1,p}^{p-1})^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + (\zeta_{i_1,p} + z_{i_1,p-1} z_{i_1,p}^{p-1})^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$
$$= (z_{i_1,p-2}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}) z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}(p-1)}$$
$$+(\zeta_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - \zeta_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}) + \zeta_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$
$$= z_{i_1,p-2}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2-1}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2-1}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2-1}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2-1}}$$
$$+(z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} \zeta_{i_2,p-1}^{p^{e_2-1}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} \zeta_{i_2,p}^{p^{e_2-1}}) z_{i_2,p}^{p^{e_2-1}(p-1)} + \zeta_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$
$$+(\zeta_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2-1}} - \zeta_{i_1,p}^{p^{e_2-1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2-1}}) z_{i_2,p}^{p^{e_2-1}(p-1)} + \zeta_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} \zeta_{i_2,p}^{p^{e_2-1}}\ .$$

Итерируя это соотношение относительно $z_{i_1,p-2}, z_{i_1,p-1}, \zeta_{i_1,p-1}$, а затем относительно $z_{i_2,p-2}$, $z_{i_2,p-1}, \zeta_{i_2,p-1}$, мы получаем равенство

$$z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} + z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}}$$
$$= (z_{i_1,p-2} z_{i_2,p} + z_{i_1,p} z_{i_2-2} - z_{i_1,p-1} z_{i_2,p-1} + z_{i_1,p-1} z_{i_2,p}) z_{i_1,p}^{p^{e_1}-1} z_{i_2,p}^{p^{e_2}-1} \tag{35}$$
$$+(z_{i_1,p}\zeta_{i_2,p-1} - z_{i_1,p-1}\zeta_{i_2,p}) A_{i_1,i_2} + (\zeta_{i_1,p-1} z_{i_2,p} - \zeta_{i_1,p} z_{i_2,p-1}) B_{i_1,i_2}$$
$$+(\zeta_{i_1,p-1}\zeta_{i_2,p} - \zeta_{i_1,p}\zeta_{i_2,p-1}) C_{i_1,i_2} + D_{i_1,i_2}\ ,$$

где A_{i_1,i_2}, B_{i_1,i_2}, C_{i_1,i_2} – многочлены над F_p относительно $z_{i_1,p}$, $z_{i_2,p}$, $\zeta_{i_1,p}$, $\zeta_{i_2,p}$, а D_{i_1,i_2} – многочлен относительно

$$z_{i_1,p}, \quad z_{i_2,p}, \quad \zeta_{i_1,p}, \quad \zeta_{i_2,p}, \quad \omega_{i_1,p}, \quad \omega_{i_2,p}\ .$$

Наконец, ввиду (28) мы имеем

$$z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} (z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}) - z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}})$$

$$+z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}})$$

$$= (\zeta_{i_1,p-1} + z_{i_1,p-2} z_{i_1,p}^{p-1})^{p^{e_1-1}} (z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}})$$

$$-z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} ((\zeta_{i_1,p} + z_{i_1,p-1} z_{i_1,p}^{p-1})^{p^{e_1-1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}})$$
$$+z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} ((\zeta_{i_1,p} + z_{i_1,p-1} z_{i_1,p}^{p-1})^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}})$$

$$= \zeta_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} (z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}) - \zeta_{i_2,p-1}^{p^{e_2-1}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}})$$

$$+z_{i_1,p-2}^{p^{e_1-1}} (z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}) z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}(p-1)}$$

$$-z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}) z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}(p-1)}$$

$$+z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}}) z_{i_1,p}^{p^{e_1-1}(p-1)}\ .$$

Итерируя это соотношение относительно $z_{i_1,p-2}$, $z_{i_1,p-1}$, а затем относительно $z_{i_2,p-2}$, $z_{i_2,p-1}$ и $z_{i_3,p-2}$, $z_{i_3,p-1}$, мы получаем, что

$$z_{i_1,p-2}^{p^{e_1}} (z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{i_2,p}^{p^{e_2}} z_{i_3,p-1}^{p^{e_3}}) - z_{i_2,p-2}^{p^{e_2}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_3,p}^{p^{e_3}} - z_{e_1,p}^{p^{e_1}} z_{e_3,p-1}^{p^{e_3}}) \tag{36}$$

$$+z_{i_3,p-2}^{p^{e_3}} (z_{i_1,p-1}^{p^{e_1}} z_{i_2,p}^{p^{e_2}} - z_{i_1,p}^{p^{e_1}} z_{i_2,p-1}^{p^{e_2}})$$

является суммой H-инвариантов

$$\begin{aligned} & z_{i_1,p-2}(z_{i_2,p-1}z_{i_3,p} - z_{i_2,p}z_{i_3,p-1})z_{i_1,p}^{p^{e_1}-1}z_{i_2,p}^{p^{e_2}-1}z_{i_3,p}^{p^{e_3}-1} \\ & -z_{i_2,p-2}(z_{i_1,p-1}z_{i_3,p} - z_{i_1,p}z_{i_3,p-1})z_{i_1,p}^{p^{e_1}-1}z_{i_2}^{p^{e_2}-1}z_{i_3,p}^{p^{e_3}-1} \\ & +z_{i_3,p-2}(z_{i_1,p-1}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-1})z_{i_1,p}^{p^{e_1}-1}z_{i_2,p}^{p^{e_2}-1}z_{i_3,p}^{p^{e_3}-1}\ ; \end{aligned} \tag{37}$$

H-инвариантов

$$\begin{aligned} & [(z_{i_1,p-2}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-2})\zeta_{i_3,p} - (z_{i_1,p-1}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-1})\zeta_{i_3,p-1})] \times A_{i_1,i_2}, \\ & [(z_{i_1,p-2}z_{i_3,p} - z_{i_1,p}z_{i_3,p-2})\zeta_{i_2,p} - (z_{i_1,p-1}z_{i_3,p} - z_{i_1,p}z_{i_3,p-1})\zeta_{i_2,p-1}] \times A_{i_1,i_3}, \\ & [(z_{i_2,p-2}z_{i_3,p} - z_{i_2,p}z_{i_3,p-2})\zeta_{i_1,p} - (z_{i_2,p-1}z_{i_3,p} - z_{i_2,p}z_{i_3,p-1})\zeta_{i_1,p-1}] \times A_{i_2,i_3} \end{aligned} \tag{38}$$

и H-инвариантов

$$\begin{aligned} & (z_{i_1,p-1}z_{i_2,p} - z_{i_1,p}z_{i_2,p-1})B_{i_1,i_2} + (z_{i_1,p-1}z_{i_3,p} - z_{i_1,p}z_{i_3,p-1})B_{i_2,i_3} \\ & +(z_{i_2,p-1}z_{i_3,p} - z_{i_2,p}z_{i_3,p-1})B_{i_2,i_3} \\ & +(\zeta_{i_1,p-1}\zeta_{i_2,p} - \zeta_{i_1,p}\zeta_{i_2,p-1})C_{i_1,i_2} + (\zeta_{i_1,p-1}\zeta_{i_3,p} - \zeta_{i_1,p}\zeta_{i_3,p-1})C_{i_1,i_3} \\ & +(\zeta_{i_2,p-1}\zeta_{i_3,p} - \zeta_{i_2,p}\zeta_{i_3,p-1})C_{i_2,i_3} + D_{i_1,i_2,i_3}\ , \end{aligned} \tag{39}$$

где

$$A_{i_1,i_2}, \quad A_{i_1,i_3}, \quad A_{i_2,i_3}, \quad B_{i_1,i_2}, \quad B_{i_1,i_3}, \quad B_{i_2,i_3},$$

$$C_{i_1,i_2}, \quad C_{i_1,i_3}, \quad C_{i_2,i_3}$$

– многочлены над F_p от переменных

$$z_{i_1,p}, \quad z_{i_2,p}, \quad z_{i_3,p}, \quad \zeta_{i_1,p}, \quad \zeta_{i_2,p}, \quad \zeta_{i_3,p}$$

и D_{i_1,i_2,i_3} – многочлен над F_p от переменных

$$z_{i_1,p}, \quad z_{i_2,p}, \quad z_{i_3,p}, \quad \zeta_{i_1,p}, \quad \zeta_{i_2,p}, \quad \zeta_{i_3,p}, \quad \omega_{i_1,p}, \quad \omega_{i_2,p}, \quad \omega_{i_3,p}\ .$$

В более общей ситуации, если $z_{\tilde{i}_\sigma,p-2}$ и $z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}$ - многочлены, определенные соотношениями (18), (19) и (22) с $\tilde{e}_\sigma = (1,\ldots,1)$, мы положим

$$\begin{aligned} & \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p-1} = z_{\tilde{i}_\sigma,p-2}^p - z_{\tilde{i}_\sigma,p-2}z_{\tilde{i}_\sigma,p}^{p-1}, \quad \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p} = z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}^p - z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}z_{\tilde{i}_\sigma,p}^{p-1}, \\ & \omega_{\tilde{i}_\sigma,p} = \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p-1}^p - \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p-1}\zeta_{\tilde{i}_\sigma,p}^{p-1} \end{aligned} \tag{40}$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}(\zeta_{\tilde{i}_\sigma,p-1}) = \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p-1} + \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p}, \quad \tilde{\gamma}(\zeta_{\tilde{i}_\sigma,p}) = \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p}, \quad \tilde{\gamma}(\omega_{\tilde{i}_\sigma,p}) = \omega_{\tilde{i}_\sigma,p}, \\ & \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p} = N_{\tilde{H}}^{(0)}(z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}), \quad \omega_{\tilde{i}_\sigma,p} = N_{\tilde{H}}^{(0)}(\zeta_{\tilde{i}_\sigma,p-1})\ . \end{aligned} \tag{41}$$

Если теперь вместо (14) и (28), (29) мы используем (25)–(27) и (40), (39), соответственно, а затем воспользуемся теми же аргументами, которые были использованы в ходе доказательства соотношений (30)–(42), то в результате мы получим следующую теорему:

Теорема 6. *Пусть*

$$u = \sum_{k=1}^{K} a_k S_{\tilde H}^{(\mu_k)}(f_k), \quad a_k \neq 0,$$

– некоторая F_p-линейная комбинация гладких орбитальных сумм $S_{\tilde H}^{(\mu_k)}(f_k)$. Если эта линейная комбинация инвариантна относительно действия группы H, то u является многочленом от следующих H-инвариантов:

$$z_{i,p}, \qquad 1 \leq i \leq m' \ ;$$

$$z_{\tilde i_{\sigma+\tau},p} = \det \begin{pmatrix} z_{\tilde i_\sigma,p-1} & z_{\tilde i_\tau,p-1} \\ z_{\tilde i_\sigma,p} & z_{\tilde i_\tau,p} \end{pmatrix} \ ,$$

где либо $\sigma,\tau \in \{1+3l \mid l \geq 1\}$, либо $\sigma,\tau \in \{2+3l \mid \geq 1\}$, $1 \leq \sigma, \leq \tau \leq m'$, и $\tilde i_\sigma \prec \tilde i_\tau$;

$$\zeta_{\tilde i_\sigma,p} = z^p_{\tilde i_\sigma,p-1} - z_{\tilde i_\sigma,p-1} z^{p-1}_{\tilde i_\sigma,p}, \quad \omega_{\tilde i_\sigma,p} = \zeta^p_{\tilde i,p-1} - \zeta_{\tilde i_\sigma,p-1}\zeta^{p-1}_{\tilde i_\sigma,p} \ ,$$

где $\tilde i_\sigma \in \{1+3l \mid l \geq 1\} \cup \{2+3l \mid l \geq 1\}$ и $1 \leq \sigma \leq m'$;

$$u_{(\tilde i_\sigma,\tilde i_\tau),p} = \det \begin{pmatrix} z_{\tilde i_\sigma,p-1} & z_{\tilde i_\tau,p-1} \\ z_{\tilde i_\sigma,p} & z_{\tilde i_\tau,p} \end{pmatrix} \ ,$$

где либо $\sigma \in \{1+3l \mid l \geq 1\}, \tau \in \{2+3l \mid l \geq 1\}$, либо $\sigma \in \{2+3l \mid l \geq 1\}, \tau \in \{1+3l \mid l \geq 1\}$, $1 \leq \sigma,\tau \leq m'$, и $\tilde i_\sigma \prec \tilde i_\tau$;

$$\varphi_{(\tilde i_\sigma,\tilde i_\tau),p} = \det \begin{pmatrix} z_{\tilde i_\sigma,p-1} & \zeta_{\tilde i_\tau,p-1} \\ z_{\tilde i_\sigma,p} & \zeta_{\tilde i_\tau,p} \end{pmatrix}, \quad \psi_{(\tilde i_\sigma,\tilde i_\tau),p} = \det \begin{pmatrix} \zeta_{\tilde i_\sigma,p-1} & \zeta_{\tilde i_\tau,p-1} \\ \zeta_{\tilde i_\sigma,p} & \zeta_{\tilde i_\tau,p} \end{pmatrix} \ ,$$

где $\sigma,\tau \in \{1+3l \mid l \geq 0\} \cup \{2+3l \mid l \geq 0\}$, $1 \leq \sigma,\tau \leq m'$, and $\tilde i_\sigma \prec \tilde i_\tau$;

$$v_{(\tilde i_\sigma,\tilde i_\tau),p} = z_{\tilde i_\sigma,p-2} z_{\tilde i_\tau,p} + z_{\tilde i_\sigma,p} z_{\tilde i_\tau,p-2} - z_{\tilde i_\sigma,p-1} z_{\tilde i_\tau,p-1} + z_{\tilde i_\sigma,p-1} z_{\tilde i_\tau,p} \ ,$$

где $\sigma,\tau \in \{1+3l \mid l \geq 0\}$, $1 \leq \sigma,\tau \leq m'$, $\tilde i_\sigma \preceq \tilde i_\tau$; и

$$w_{(\tilde i_\rho,\tilde i_\sigma,\tilde i_\tau),p} = \det \begin{pmatrix} z_{\tilde i_\rho,p-2} & z_{\tilde i_\sigma,p-2} & z_{\tilde i_\tau,p-2} \\ z_{\tilde i_\rho,p-1} & z_{\tilde i_\sigma,p-1} & z_{\tilde i_\tau,p-1} \\ z_{\tilde i_\rho,p} & z_{\tilde i_\sigma,p} & z_{\tilde i_\tau,p} \end{pmatrix} \ ,$$

где либо $\rho,\sigma,\tau \in \{1+3l \mid l \geq 0\}$, либо $\rho,\sigma,\tau \in \{2+3l \mid l \geq 0\}$, $1 \leq \rho,\sigma,\tau \leq m'$, и $\tilde i_\rho \prec \tilde i_\sigma \prec \tilde i_\tau$.

Последняя теорема описывает структуру тех H-инвариантов u, которые являются F_p-линейными комбинациями гладких орбитальных сумм $S^{(\mu_k)}_{\tilde{H}}(f_k)$, содержащих по меньшей мере одну дополнительную переменную z_{ij}, для $1 \le i \le m$, $1 \le j \le p-3$. Теперь мы изучим структуру инвариантов $N^{(0)}_{\tilde{H}}(f)$ и $S^{(0)}_{\tilde{H}}(f)$, для всевозможных мономов вида

$$f = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}(z^{p^e}_{i,p-2})^{s^{(e)}_{i,p-2}}(z^{p^e}_{i,p-1})^{s^{(e)}_{i,p-1}} \quad 0 \le s_{i,p-2}, s_{i,p-1} \le p-1\ .$$

Полагая $\zeta_{i,p} = N^{(0)}_{\tilde{H}}(z_{i,p-1})$ и $\varrho_{i,p} = N^{(0)}_{\tilde{H}}(z_{i,p-2})$, где

$$N^{(0)}_{\tilde{H}}(z_{i,p-1}) = z^{p}_{i,p-1} - z_{i,p-1}z^{p-1}_{i,p} \tag{42}$$

и

$$N^{(0)}_{\tilde{H}}(z_{i,p-2}) = \prod_{\alpha\in F_p}\left(z_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1}z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2}z_{i,p}\right) \tag{43}$$

$$= z^{p}_{i,p-2} + \sum_{\alpha\in F_p}\prod_{\substack{s_{i,p-2},s_{i,p-1},s_{i,p}\ge 0\\ s_{i,p-1}+s_{i,p-1}+s_{i,p}=p\\ s_{i,p-2}+2s_{i,p}\ge p-1}}\binom{\alpha}{1}^{s_{i,p-1}}\binom{\alpha}{2}^{s_{i,p}} z^{s_{i,p-2}}_{i,p-2}z^{s_{i,p-1}}_{i,p-1}z^{s_{i,p}}_{i,p}\ ,$$

мы получаем

$$N^{(0)}_{\tilde{H}}(f) = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}(\varrho^{p^e}_{i,p})^{s_{i,p-2}}(\zeta^{p^e}_{i,p})^{s_{i,p-1}}\ .$$

Далее, полагая

$$\sum_{e=0}^{\eta}s^{(e)}_{i,p-2}p^e = s^{(0)}_{i,p-2} + s^{(1)}_{i,p-2}p, \quad \sum_{e=0}^{\eta}s^{(e)}_{i,p-1}p^e = s^{(0)}_{i,p-1} + s^{(1)}_{i,p-2}p,$$

мы находим

$$S^{(0)}_{\tilde{H}}(f) = \sum_{\alpha\in F_p}\prod_{e=1}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}\left(z^{p^e}_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1}z^{p^e}_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2}z^{p^e}_{i,p}\right)^{s^{(e)}_{i,p-2}}$$

$$\times\left(z^{p^e}_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1}z^{p^e}_{i,p}\right)^{s^{(e)}_{i,p-1}}$$

$$= \sum_{\alpha\in F_p}\prod_{i=1}^{m}\left(z_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1}z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2}z_{i,p}\right)^{s^{(0)}_{i,p-2}}\left(z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1}z_{i,p}\right)^{s^{(0)}_{i,p-1}}$$

$$\times\left(z^{p}_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1}z^{p}_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2}z^{p}_{i,p}\right)^{s^{(1)}_{i,p-2}}\left(z^{p}_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1}z^{p}_{i,p}\right)^{s^{(1)}_{i,p-1}}\ ,$$

и принимая во внимание (28), получаем

$$S_{\tilde H}^{(0)}(f) = \sum_{\alpha\in F_p}\prod_{i=1}^{m}\left(z_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i,p}\right)^{s^{(0)}_{i,p-2}}$$

$$\times\left(z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p}\right)^{s^{(0)}_{i,p-1}}$$

$$\times\left(\left(\zeta_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1}\zeta_{i,p}\right) + \left(z_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i,p}\right) z_{i,p}^{p-1}\right)^{s^{(1)}_{i,p-2}}$$

$$\times\left(\zeta_{i,p} + \left(z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p}\right) z_{i,p}^{p-1}\right)^{s^{(1)}_{i,p-1}} .$$

Интегрируя теперь последнее соотношение, мы заключаем, что $S_{\tilde H}^{(0)}(f)$ является F_p-линейной комбинацией H-инвариантов

$$S_{\tilde H}^{(0)}(f')\prod_{i=1}^{m} z_{i,p}^{\rho_{i,p}}\zeta_{i,p}^{\sigma_{i,p}}\omega_{i,p}^{\tau_{i,p}} ,$$

где

$$S_{\tilde H}^{(0)}(f') = \sum_{\alpha\in F_p}\prod_{i=1}^{m}\left(z_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i,p}\right)^{s_{i,p-2}}$$

$$\times\left(z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p}\right)^{s_{i,p-1}}\left(\zeta_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1}\zeta_{i,p}\right)^{\sigma_{i,p-1}}$$

и $0 \le s_{i,p-2}, s_{i,p-1}, \sigma_{i,p-1} \le p-1$.

Теорема 7. *Пусть*

$$f = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}(z_{i,p-2}^{p^e})^{s^{(e)}_{i,p-2}}(z_{i,p-1}^{p^e})^{s^{(e)}_{i,p-1}}$$

– моном из кольца $F_p[z_{i,p-2}, z_{i,p-1}, z_{i,p} \mid 1 \le i \le m]$ *где* $0 \le s^{(e)}_{i,p-2}, s^{(e)}_{i,p-1} \le p-1$. *Тогда*

$$N_{\tilde H}^{(0)}(f) = \prod_{e=0}^{\eta}\prod_{i=1}^{m}(\varrho_{i,p}^{p^e})^{s_{i,p-2}}(\zeta_{i,p}^{p^e})^{s_{i,p-1}} ,$$

где $\zeta_{i,p}$ *и* $\varrho_{i,p}$ *являются* H*-инвариантами, определенные соотношениями* (41)-(42) *и* (43), *соответственно. Кроме того, орбитальная сумма* $S_{\tilde H}^{(0)}(f)$ *является* F_p*-линейной комбинацией* H*-инвариантов вида*

$$S_{\tilde H}^{(0)}(f')\prod_{i=1}^{m} z_{i,p}^{\rho_{i,p}}\zeta_{i,p}^{\sigma_{i,p}}\omega_{i,p}^{\tau_{i,p}} ,$$

где

$$S^{(0)}_{\tilde{H}}(f') = \sum_{\alpha\in F_p}\prod_{i=1}^{m}\left(z_{i,p-2}+\binom{\alpha}{1}z_{i,p-1}+\binom{\alpha}{2}z_{i,p}\right)^{s_{i,p-2}}$$

$$\times\left(z_{i,p-1}+\binom{\alpha}{1}z_{i,p}\right)^{s_{i,p-1}}\left(\zeta_{i,p-1}+\binom{\alpha}{1}\zeta_{i,p}\right)^{\sigma_{i,p-1}}$$

где $0\le s_{i,p-2}, s_{i,p-1}, \sigma_{i,p-1}\le p-1$, *для* $1\le i\le m$.

Как следствие теоремы 2, Следствия 2, Теоремы 4, Теоремы 6 and Теоремы 7, мы получаем следующий результат.

Теорема 8. *Пусть* $\tilde{i}_\sigma=(i_1,\dots,i_\sigma)$, $\tilde{i}_\tau=(i_1,\dots,i_\tau)$, *где* $1\le i_1\le\dots\le i_\sigma\le m$ *и* $1\le i_1\le\dots\le i_\tau\le m$. *Каждый элемент* $u\in A^{\tilde{H}}_{m,p}$, *инвариантный относительно действия группы* H, *является многочленом над* F_p *от следующих* H*-инвариантов:*

$$z_{i,p},\quad \textit{где}\quad 1\le i\le m\ ;$$

$$z_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},p}=\det\begin{pmatrix} z_{\tilde{i}_\sigma,p-1} & z_{\tilde{i}_\tau,p-1}\\ \\ z_{\tilde{i}_\sigma,p} & z_{\tilde{i}_\tau,p}\end{pmatrix},$$

где либо $\sigma,\tau\in\{1+3l\mid l\ge0\}$, *либо* $\sigma,\tau\in\{2+3l\mid l\ge0\}$, $1\le\sigma,\tau\le m$, *и* $\tilde{i}_\sigma\prec\tilde{i}_\tau$*;*

$$\zeta_{\tilde{i}_\sigma,p}=z^p_{\tilde{i}_\sigma,p-1}-z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}z^{p-1}_{\tilde{i}_\sigma,p},\quad \omega_{\tilde{i}_\sigma,p}=\zeta^p_{\tilde{i}_\sigma,p-1}-\zeta_{\tilde{i}_\sigma,p-1}\zeta^{p-1}_{\tilde{i}_\sigma,p}\ ,$$

где $\tilde{i}_\sigma\in\{1+3l\mid l\ge0\}\cup\{2+3l\mid l\ge0\}$, $1\le\sigma\le m$*;*

$$u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}=\det\begin{pmatrix} z_{\tilde{i}_\sigma,p-1} & z_{\tilde{i}_\tau,p-1}\\ \\ z_{\tilde{i}_\sigma,p} & z_{\tilde{i}_\tau,p}\end{pmatrix}\ ,$$

где либо $\sigma\in\{1+3l\mid l\ge0\}$, $\tau\in\{2+3l\ge0\}$, *либо* $\sigma\in\{2+3l\mid l\ge0\}$, $\tau\in\{1+3l\ge0\}$, $1\le\sigma,\tau\le m$, *и* $\tilde{i}_\sigma\prec\tilde{i}_\tau$*;*

$$\varphi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}=\det\begin{pmatrix} z_{\tilde{i}_\sigma,p-1} & \zeta_{\tilde{i}_\tau,p-1}\\ \\ z_{\tilde{i}_\sigma,p} & \zeta_{\tilde{i}_\tau,p}\end{pmatrix},\quad \psi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}=\det\begin{pmatrix} \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p-1} & \zeta_{\tilde{i}_\tau,p-1}\\ \\ \zeta_{\tilde{i}_\sigma,p} & \zeta_{\tilde{i}_\tau,p}\end{pmatrix}\ ,$$

где $\sigma,\tau\in\{1+3l\mid l\ge0\}\cup\{2+3l\mid l\ge0\}$, $1\le\sigma,\tau\le m$, *и*$\tilde{i}_\sigma\prec\tilde{i}_\tau$*;*

$$v_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}=z_{\tilde{i}_\sigma,p-2}z_{\tilde{i}_\tau,p}+z_{\tilde{i}_\sigma,p}z_{\tilde{i}_\tau,p-2}-z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}z_{\tilde{i}_\tau,p-1}+z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}z_{\tilde{i}_\tau,p}\ ,$$

где $\sigma,\tau\in\{1+3l\mid l\ge0\}$, $1\le\sigma,\tau\le m$, *и* $\tilde{i}_\sigma\preceq\tilde{i}_\tau$*;*

$$w_{(\tilde{i}_\rho,\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}=\det\begin{pmatrix} z_{\tilde{i}_\rho,p-2} & z_{\tilde{i}_\rho,p-2} & z_{\tilde{i}_\tau,p-2}\\ \\ z_{\tilde{i}_\rho,p-1} & z_{\tilde{i}_\sigma,p-1} & z_{\tilde{i}_\tau,p-1}\\ \\ z_{\tilde{i}_\rho,p} & z_{\tilde{i}_\sigma,p} & z_{\tilde{i}_\tau,p}\end{pmatrix}\ ,$$

где $\rho,\sigma,\tau\in\{1+3l\mid l\ge0\}\cup\{2+3l\mid l\ge0\}$, $1\le\rho,\sigma,\tau\le m$, *и* $\tilde{i}_\rho\prec\tilde{i}_\sigma\prec\tilde{i}_\tau$*;*

$$\varrho_{i,p} = \prod_{\alpha \in F_p} \left(z_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i,p} \right) ,$$

где $1 \le i \le m$; *а также*

$$S^{(0)}_{\tilde{H}}(f') = \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{i=1}^{m} \left(z_{i,p-2} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{2} z_{i,p} \right)^{s_{i,p-2}}$$

$$\times \left(z_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1} z_{i,p} \right)^{s_{i,p-1}} \left(\zeta_{i,p-1} + \binom{\alpha}{1} \zeta_{i,p} \right)^{\sigma_{i,p-1}} ,$$

где $0 \le s_{i,p-2}, s_{i,p-1}, \sigma_{i,p-1} \le p-1$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 И СЛЕДСТВИЯ 1

Если $\vartheta : V_i \hookrightarrow \tilde{V}_i$ – вложение, определенное соотношениями (12), то отображение ϑ индуцирует соответствующий F_p-мономорфизм алгебр

$$\vartheta : A_{m,3} \to A_{m,p} .$$

Пусть u – некоторый элемент алгебры $A^H_{m,3}$ и $v = \vartheta(u)$ – его образ в $A_{m,p}$. Тогда многочлен v инвариантен под действием группы H на $A_{m,p}$, заданным соотношениями (13), и этот многочлен инвариантен также под действием группы $\tilde{H}$ на алгебре $A_{m,p}$. Далее, из теоремы 8 следует, что v является многочленом от определенных выше H-инвариантов

$$z_{i,p}, \quad z_{\tilde{i}_\sigma,p}, \quad \zeta_{\tilde{i},p}, \quad \omega_{\tilde{i}_\sigma,p}, \quad u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}, \quad \varphi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}, \quad \psi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}$$

$$v_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}, \quad w_{(\tilde{i}_\rho,\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),p}, \quad \varrho_{i,p}, \quad S^{(0)}_{\tilde{H}}(f') .$$

Принимая во внимание вложение ϑ, отождествим теперь $z_{\tilde{i}_\sigma,p-2}$, $z_{\tilde{i}_\sigma,p-1}$ и $z_{\tilde{i}_\sigma,p}$ с $x_{\tilde{i}_\sigma,1}$, $x_{\tilde{i}_\sigma,2}$ and $x_{\tilde{i}_\sigma,3}$, соответственно, для всех $\sigma \in \{1+3l \mid l \ge 0\} \cup \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma \le m$. В результате, мы получаем следующие H-инварианты:

$$x_{i,3}, \quad 1 \le i \le m ;$$

$$x_{\tilde{i}_{\sigma+\tau},3} = \det \begin{pmatrix} x_{\tilde{i}_\sigma,2} & x_{\tilde{i}_\tau,2} \\ x_{\tilde{i}_\sigma,3} & x_{\tilde{i}_\tau,3} \end{pmatrix} ,$$

где либо $\sigma, \tau \in \{1+3l \mid l \ge 0\}$, либо $\sigma, \tau \in \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma, \tau \le m$, и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$\zeta_{\tilde{i}_\sigma,3} = x^p_{\tilde{i}_\sigma,2} - x_{\tilde{i}_\sigma,2} x^{p-1}_{\tilde{i}_\sigma,3},$$

$$\omega_{\tilde{i}_\sigma,3} = \zeta^p_{\tilde{i}_\sigma,2} - \zeta_{\tilde{i}_\sigma,2} \zeta^{p-1}_{\tilde{i}_\sigma,3} ,$$

где $\sigma \in \{1+3l \mid l \ge 1\} \cup \{2+3l \mid l \ge 0\}$, $1 \le \sigma \le m$;

$$u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = \det \begin{pmatrix} x_{\tilde{i}_\sigma,2} & x_{\tilde{i}_\tau,2} \\ x_{\tilde{i}_\sigma,3} & x_{\tilde{i}_\tau,3} \end{pmatrix} ,$$

где либо $\sigma \in \{1+3l \mid l \geq 0\}, \tau \in \{2+3l \mid l \geq 0\}$, либо $\sigma \in \{2+3l \mid l \geq 0\}, \tau \in \{1+3l \mid l \geq 0\}$, $1 \leq \sigma, \leq \tau \leq m$, и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$\varphi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = \det \begin{pmatrix} x_{\tilde{i}_\sigma,2} \; \zeta_{\tilde{i}_\tau,2} \\ \\ x_{\tilde{i}_\sigma,3} \; \zeta_{\tilde{i}_\tau,3} \end{pmatrix} , \; \psi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = \det \begin{pmatrix} \zeta_{\tilde{i}_\sigma,2} \; \zeta_{\tilde{i}_\tau,2} \\ \\ \zeta_{\tilde{i}_\sigma,3} \; \zeta_{\tilde{i}_\tau,3} \end{pmatrix} ,$$

где $\sigma, \tau \in \{1+3l \mid l \geq 0\} \cup \{2+3l \mid l \geq 0\}$, $1 \leq \sigma, \leq \tau \leq m$, и $\tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$v_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = x_{\tilde{i}_\sigma,1}x_{\tilde{i}_\tau,3} + x_{\tilde{i}_\sigma,3}x_{\tilde{i}_\tau,1} - x_{\tilde{i}_\sigma,2}x_{\tilde{i}_\tau,2} + x_{\tilde{i}_\sigma,2}x_{\tilde{i}_\tau,3} \; ,$$

где $\sigma, \tau \in \{1+5l \mid l \geq 0\}$, $1 \leq \sigma, \tau \leq m$, и $\tilde{i}_\sigma \preceq \tilde{i}_\tau$;

$$w_{(\tilde{i}_\rho,\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} = \det \begin{pmatrix} x_{\tilde{i}_\rho,1} \; x_{\tilde{i}_\sigma,1} \; x_{\tilde{i}_\tau,1} \\ \\ x_{\tilde{i}_\rho,2} \; x_{\tilde{i}_\sigma,2} \; x_{\tilde{i}_\tau,2} \\ \\ x_{\tilde{i}_\rho,3} \; x_{\tilde{i}_\sigma,3} \; x_{\tilde{i}_\tau,3} \end{pmatrix} ,$$

где $\rho, \sigma, \tau \in \{1+3l \mid l \geq 0\} \cup \{2+3l \mid l \geq 0\}$, $1 \leq \rho, \sigma, \tau \leq m$, и $\tilde{i}_\rho \prec \tilde{i}_\sigma \prec \tilde{i}_\tau$;

$$\varrho_{i,3} = \prod_{\alpha \in F_p} \left(x_{i1} + \binom{\alpha}{1} x_{i2} + \binom{\alpha}{2} x_{i3} \right) ,$$

где $1 \leq i \leq m$; и

$$S_H(f') = \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{i=1}^{m} \left(x_{i,1} + \binom{\alpha}{1} x_{i,2} + \binom{\alpha}{2} z_{i,3} \right)^{s_{i,1}}$$

$$\times \left(x_{i,2} + \binom{\alpha}{1} x_{i,3} \right)^{s_{i,2}} \left(\zeta_{i,2} + \binom{\alpha}{1} \zeta_{i,3} \right)^{\sigma_{i,2}} ,$$

где $0 \leq s_{i,1}, s_{i,2}, \sigma_{i,2} \leq p-1$. Это доказывает теорему 1.

Теперь мы переходим к доказательству следствия 1. Рассмотрим орбитальную сумму

$$S_H(f'_0) = \sum_{\alpha \in F_p} \prod_{i=1}^{m} \left(x_{i1} + \binom{\alpha}{1} x_{i2} + \binom{\alpha}{2} x_{i3} \right)^{p-1}$$

и обозначим через $B^H_{m,3}$ множество однородных многочленов

$$x_{i3}, \quad x_{\tilde{i}_\sigma,3}, \quad \zeta_{\tilde{i}_\sigma,3}, \quad \omega_{\tilde{i}_\sigma,3}, \quad u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}, \quad \varphi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3} \quad \psi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3},$$

$$v_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}, \quad w_{(\tilde{i}_\rho,\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}, \quad \varrho_{i,3}, \quad S_H(f'),$$

образующих полную систему порождающих элементов алгебры $A^H_{m,3}$. Решающим моментом доказательства является тот факт, что многочлен $S_H(f'_0)$ неразложим относительно системы $B^H_{m,3}$, то есть $S_H(f'_0)$ не может быть представлен в виде многочлена над F_p от элементов $u \in B^H_{m,3}$.

Предположим, наоборот, что многочлен $S_H(f'_0)$ представим в виде многочлена от элементов системы $B^H_{m,3}$, и обозначим через $\pi(S_H(f'_0)$ образ многочлена $S_H(f'_0)$ при следующей специализации переменных x_{ij}:

$$\pi(x_{ij}) = 0 \qquad (i,j) = (1,1), \quad (i,j) = (i,2) \qquad 2 \leq i \leq m,$$

$$(i,j) = (i,3) \qquad 1 \leq i \leq m \; .$$

Ясно, что

$$\pi(S_H(f_0')) = -x_{12}^{p-1}x_{21}^{p-1}\cdots x_{m1}^{p-1}\ . \tag{44}$$

С другой стороны, в виду соотношений (18), (19), (22) мы имеем

$$\pi(x_{(i_\sigma,i_\tau),1}) = \begin{cases} x_{12}x_{i1}, & \text{если} \quad (i_\sigma,i_\tau)=(i,1), 2\le i\le m,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и

$$\pi(x_{(i_\sigma,i_\tau),2})=0, \quad \pi(x_{(i_\sigma,i_\tau),3})=0 \quad \text{при} \quad 1\le i_\sigma\le i_\tau\le m\ .$$

Кроме того, соотношения (18), (19) и (22) влекут равенства

$$\pi(x_{\tilde{i}_\sigma,3})=0 \quad \text{для всех} \quad \sigma\ge 3\ .$$

Далее, учитывая (28), (40) и вышеуказанный результат, мы находим, что

$$\pi(\zeta_{i,2}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i=1\\ x_{i1}^p, & \text{если} \quad 2\le i\le m,\end{cases} \qquad \pi(\zeta_{i,3}) = \begin{cases} x_{12}^p, & \text{если} \quad i=1\\ 0, & \text{если} \quad 2\le i\le m,\end{cases}$$

$$\pi(\omega_{i,3}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i=1\\ x_{i1}^{p^2}, & \text{если} \quad 2\le i\le m.\end{cases}$$

Кроме того, мы имеем

$$\pi(\zeta_{(i_\sigma,i_\tau),2}) = \begin{cases} (x_{12}x_{i1})^p, & \text{если} \quad (i_\sigma,i_\tau)=(i,1), 2\le i\le m,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$\pi(\zeta_{(i_\sigma,i_\tau),3})=0 \quad \text{при} \quad 1\le i_\sigma,i_\tau\le m\ ,$$

$$\pi(\omega_{(i_\sigma,i_\tau),3}) = \begin{cases} (x_{12}x_{i1})^{p^2}, & \text{если} \quad (i_\sigma,i_\tau)=(i,1), 2\le i\le m,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и

$$\pi(\zeta_{\tilde{i}_\sigma,2})=0, \quad \pi(\zeta_{\tilde{i}_\sigma,3})=0, \quad \pi(\omega_{\tilde{i}_\sigma,3})=0 \quad \text{для} \quad \sigma\ge 3\ .$$

Теперь мы рассмотрим многочлены $\pi(u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3})$, $\pi(\varphi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3})$ and $\pi(\psi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3})$ для всевозможных $(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau)$. Сначала мы заметим, что $\pi(u_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3})=0$ для любых $(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau)$, таких что $\sigma,\tau\ge 1$,

$$\pi(\varphi_{(i_\sigma,i_\tau),3}) = \begin{cases} x_{12}^{p+1}, & \text{если} \quad (i_\sigma,i_\tau)=(1,1)\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и $\pi(\varphi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3})=0$ при $\sigma+\tau\ge 3$. Аналогичным образом, мы имеем

$$\pi(\psi_{(i_\sigma,i_\tau),3}) = \begin{cases} (x_{12}x_{i1})^p, & \text{если} \quad (i_\sigma,i_\tau)=(i,1), 2\le i\le m,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$\pi(\psi_{(i_\sigma,i_\tau,i_\tau),3}) = \begin{cases} (x_{12}^2x_{i1})^p & \text{если} \quad (i_\sigma,i_\tau,i_\tau)=(i,1,1), 2\le i\le m\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и $\pi(\psi_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}) = 0$ для $\sigma+\tau \geq 4$. Далее, мы имеем

$$\pi(v_{(i_\sigma,i_\tau),3}) = \begin{cases} x_{12}^2, & \text{если} \quad i_\sigma = i_\tau = 1 \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а также $\pi(v_{(\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}) = 0$, если $\sigma > 1$ или $\tau > 1$. Наконец, мы видим, что

$$\pi(w_{(\tilde{i}_\rho,\tilde{i}_\sigma,\tilde{i}_\tau),3}) = 0$$

для любых $(\tilde{i}_\rho, \tilde{i}_\sigma, \tilde{i}_\rho)$, и

$$\pi(\varrho_{i,3}) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i = 1 \\ x_{i1}^p, & \text{если} \quad i > 1. \end{cases}$$

Кроме того, если

$$f' = x_{12}^{s_{12}} x_{21}^{s_{21}} \cdots x_{m1}^{s_{m1}} \ ,$$

где $0 \leq s_{12}, s_{21}, \ldots, s_{m1} \leq p-1$, является делителем монома

$$f_0' = x_{12}^{p-1} x_{21}^{p-1} \cdots x_{m1}^{p-1} \ ,$$

мы имеем

$$\pi(S_{\tilde{H}}^{(0)}(f')) = \begin{cases} x_{12}^{p-1} x_{21}^{s_{21}} \cdots x_{m1}^{s_{m1}} & \text{если} \quad s_{12} = p-1 \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Из сказанного следует, что имеется лишь несколько элементов системы $B_{m,3}^H$, а именно,

$$\varphi_{1,3}, \quad \varphi_{(1,1),3}, \quad \omega_{(i,1),3}, \quad \psi_{(i,1),3}, \quad \psi_{(i,1,1),3}, \quad \varrho_{i,3}, \quad v_{(1,1),3} \ ,$$

для $\quad 2 \leq i \leq m$, и

$$S_{\tilde{H}}^{(0)}(f') = \sum_{\alpha \in F_p} \left(x_{11} + \binom{\alpha}{1} x_{12} \right)^{p-1} \prod_{i=2}^{m} \left(x_{i1} + \binom{\alpha}{1} x_{i2} \right)^{s_{i2}} \ ,$$

для $0 \leq s_{21}, \ldots, s_{m2} \leq p-1$, $s_{21} + \cdots + s_{m2} < (m-1)(p-1)$, чьи образы при отображении π отличны от нуля . Так как степень многочлена $S_{\tilde{H}}^{(0)}(f_0')$ относительно каждой из переменных x_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq 3$, не превосходит $p-1$, мы видим, что орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}^{(0)}(f_0')$, рассматриваемая как многочлен от элементов системы $B_{m,3}^H$, не может содержать никакого монома, включающего в себя $\zeta_{1,3}$, $\varphi_{(1,1),3}$ и

$$\zeta_{13}, \quad \varphi_{(1,1),3}, \quad \omega_{(i,1),3}, \qquad \psi_{(i,1),3}, \quad \psi_{(i,1,1),3}, \quad \varrho_{i,3}, \quad 2 \leq i \leq m \ .$$

Далее, равенство (44) показывает, что если $m > 1$, то орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}^{(0)}(f_0')$, рассматриваемая снова как многочлен от элементов системы $B_{m,3}$, не может содержать никакого монома, включающего в себя $v_{(1,1),3}$ и $S_{\tilde{H}}^{(0)}(f')$. Таким образом, предполагая, что орбитальная сумма $S_{\tilde{H}}^{(0)}(f_0')$ является многочленом от элементов системы $B_{m,3}^H$, мы не можем получить мономы $x_{12}^{p-1} x_{21}^{p-1} \ldots z_{m1}^{p-1}$, входящие в $S_{\tilde{H}}^{(0)}(f_0')$. Полученное противоречие доказывает следствие 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Campbell Y.E.A., Hughes I., *Vector invariants of $U_2(F_p)$; a proof of a conjecture of David Richman*, Adv. Math., 1997, vol. **33**, 391–397.

[2] Campbell Y.E.A., Hughes I, Pollack R.D., *Vector invariants of symmetric groups*, Canad. Math. Bull., 1990, vol. **33(4)**, 391–397.

[3] Derksen H., Kemper G., *Computational Invariant Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heildelberg New York, 2002.

[4] Fleishmann P., *A new degree bound for the vector invariants of symmetric groups*, Trans., Amer. Math. Soc., 1998, vol. **350**, 1703–1712.

[5] Fleischmann P., *The Noether bound in invariant theory of finite groups*, Adv. Nath., 2000, vol. **256**, 23–32.

[6] Kamper G., *Lower degree bounds for modular invariants and a question of I. Hughes*, Transform. Groups, 1998, vol. **3**, no. 2, 135–144.

[7] Hilbert D., *Über die vollen Invariantensystem*, Math. Ann, 1893, Bd. **42**, No. 3, 313–373.

[8] Noether E., *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen*, Math. Ann., 1916, Bd. **77**, 89–92.

[9] Noether E., *Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlich linearer Gruppen der Charakteristik p*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1926, 28–35.

[10] Richman D., *On vector invariants over finite fields*, Advances in Math., 1990, vol. **81**, 30–65.

[11] Richman D., *Invariants of finite groups over fields of characteristic p*, Adv. Math., 1996, vol. **124**, 25–48.

[12] Richman D., *Explicit generators of the invariants of finite groups*, Adv. Math., 1996, vol. **124**, 40–76.

[13] Smith L., *Polynomial Invariants of Finite Groups*, A. K. Peters Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[14] Stanley R., *Invariants of finite groups and their applications to combinatorics*, Bull. Amer. Math. Soc., 1971, vol. **1**, 475–511.

[15] Stepanov S. A., *Vector invariants of symmetric groups in prime characteristic*, Discrete Math., Appl., 2000, vol. **10**, no. 5, 455–468.

[16] Stepanov S. A., *Method of orbit sums in the theory of modular vector invariants*, Mat. Sbornik., 2006, vol. **197**, no. 11, 79-114.

[17] Weyl H., *The Classical Groups*, 2nd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, 1953.

Modular Vector Invariants of Cyclic Groups

Sergey A. Stepanov

Let F be a field, $V = Fx_1 + \cdots + Fx_n$ a vector space of dimension n over F, and $G \leq GL(n, F)$ a finite group acting on V via F-linear transformations of the basis elements $x_1, \ldots, x_n$. Let $V^{\oplus m} = V \oplus \cdots \oplus V$ be the m-fold direct sum of the space V with diagonal action of the group G. Then the group G naturally acts on the symmetric graded algebra $A_{mn} = F[x_{i1}, \ldots, x_{in} \mid 1 \leq$

$i \leq m]$. Let A_{mn}^{G} denote the subalgebra of invariants of the polynomial algebra A_{mn} with respect to G. A classical result of Emmy Noether [8], [9] implies that in the non-modular case, that is when the characteristic p of F does not divide $|G|$ (in particular, when char $F = 0$) the ring A_{mn}^{G} is generated as F-algebra by homogeneous polynomials of degree at most $|G|$, no matter how large m is. On the other hand, it was proved by D. Richman [10]–[12] that this result is no longer hold in the modular case when the characteristic p of F divides $|G|$. Let $p > 2$ be a prime number, $F = F_p$ a finite field with p elements, H a cyclic group of order p acting on a linear F_p-space V of dimension n, and A_{mn}^{H} the subalgebra of invariants of the polynomial algebra $A_{mn} = F_p[x_{i1}, \ldots, x_{in} \mid 1 \leq i \leq m]$ with respect to H. In this paper we give a further development of the orbit sum method proposed by the author in [16] and determine explicitly a complete system of generators of the algebra A_{mn}^{H} in the case when $n = 3$. In addition, we find a lower degree bound for the maximal possible degree of homogeneous invariants forming a complete system of generators of the algebra A_{mn}^{H}. These results extend the corresponding results of D. Richman [10]–[12], a result of Campbell and Hughes [1] concerning the case $n = 2$, and also a more general result of the author [16] concerning the case of cyclic groups.

KEYWORDS: vector space, cyclic groups, modular vector invariants.