

===== МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ =====

## Метод итеративного определения координат местоположения космического аппарата

С.В. Мицын, Г.А. Ососков

Лаборатория Информационных Технологий, Объединённый Институт Ядерных Исследований, Дубна,  
Россия

Поступила в редколлегию 22.08.2012

**Аннотация**— Предложен итеративный метод решения обратной задачи по определению неизвестных координат космического аппарата по данным измерений TDOA – разницы по времени прохождения сигналов от нескольких наземных передающих станций, при их ретрансляции известным и неизвестным спутниками и регистрации приемной наземной станцией. Задача решена методом наименьших квадратов (МНК). Минимизация нелинейного функционала МНК выполнялась методом Ньютона, благодаря тому, что удалось получить аналитические выражения для матрицы его вторых производных. Плохая обусловленность этой матрицы потребовала использования вычислений с увеличенной точностью. Результаты вычислительных экспериментов позволили дать оценки точности метода в зависимости от качества измерений временных смещений TDOA и показали его высокую эффективность.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Действующие системы космической связи и вещания базируются на использовании нескольких искусственных спутников, выводимых на геостационарную орбиту, и сети земных приемо-передающих станций космической связи. При организации надежного функционирования этих систем, среди прочих, возникает важная проблема шумоподавления от станций-соседей, требующая решения задачи геолокации, т.е. определения координат той из наземных станций, паразитные сигналы которой мешают нормальному приему при их ретрансляции космическими аппаратами. С целью уточнения результатов геолокации можно прибегнуть к косвенному использованию ретрансляторов неконтролируемых космических аппаратов (КА), для чего необходимо знать их координаты.

Однако искомые координаты спутника неизвестны или известен лишь широкий угловой сектор, где такой спутник может находиться, но слабые сигналы, ретранслируемые им от нескольких известных передающих станций, могут быть зарегистрированы приемной наземной станцией с известными координатами. В таком случае для каждой из этих передающих станций может быть вычислена разница по времени прихода сигнала, поступающего от какого-то «своего» спутника КА1 с хорошо известными координатами, и сигнала от искомого «чужого» спутника КА2, - так называемое временное смещение  $\Delta t$  (в английской терминологии TDOA - Time Difference Of Arrivals). Подходы с использованием TDOA для локализации неизвестного источника сигналов хорошо известны, например, в [1] описан метод применения TDOA для пассивной геолокации наземной станции по сигналам от геостационарных спутников связи.

Заметим, что несмотря на сложности с вычислением временного смещения  $\Delta t$ , требующего проведения весьма сложного корреляционного анализа сигналов, вычислительные алгоритмы которых из-за большой трудоемкости не раскрываются компаниями-разработчиками, эти трудности остаются за рамками нашей задачи, в постановке которой величины  $\Delta t$  предполагаются заданными.

Величины временного смещения  $\Delta t$  зависят, в частности, от искомых координат  $K_2 = (x_{K_2}, y_{K_2}, z_{K_2})$  спутника КА2, так что при фиксированном  $\Delta t$ , заданном для одной станции, эти координаты описывают поверхность эллипсоида вращения (см. далее сноску на стр.

311). Вычисляя  $\Delta t_2$  для второй из передающих станций, получаем вторую поверхность, пересечение которой с первой образует линию в пространстве. Для определения искомым координат  $K_2$  следует найти точку пересечения уже трех таких поверхностей, для чего потребуется вычислить временное смещение  $\Delta t_3$  от еще одной передающей станции.

Таким образом, мы пришли к проблеме того типа, которая называется обратной задачей, когда значения искомым параметров должны быть получены из наблюдаемых данных. Такие задачи являются некорректными в том смысле, что их решение неустойчиво по отношению к данным, - даже малые ошибки данных могут приводить к значительным отклонениям в решении. Это, в частности, характерно для нашей задачи, где точка, дающая решение, получается как результат пересечения кривых на поверхности эллипсоидов. Причем в частых случаях, когда наземные станции оказываются близкими, эти кривые пересекаются под очень малыми углами, что неизбежно должно приводить к требованию повышенной точности вычислений.

Для линейных обратных задач существуют общие методы регуляризации решения, путем ограничений на его гладкость или ограничений по норме векторного пространства [2].

В случае нелинейных обратных задач, к которым относится и наша, для регуляризации решения в конкретных ситуациях применяются различные итеративные подходы с использованием разного рода численных обобщений сглаживающих и стабилизирующих функционалов, учитывающих априорную информацию о решении. В частности, как одну из простых форм нелинейной регуляризации можно рассматривать метод наименьших квадратов.

Для уменьшения статистическим путем ошибки решения нашей задачи об определении координат спутника КА2 по данным наземных измерительных станций, число последних следует взять больше трех, переопределив тем самым задачу, чтобы воспользоваться методом наименьших квадратов для оценки неизвестных координат.

При этом следует учитывать дороговизну и трудоемкость вычисления временных смещений для каждой из передающих станций, что накладывает дополнительное требование минимизации их числа.

## 2. ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### Цель

Нашей целью является создания алгоритма определения координат спутника с известным его примерным положением (КА2), а также величин временного смещения прохождения сигнала от трёх и более передающих станций до одной приёмной через КА2 и спутник, координаты которого известны с достаточно большой точностью (КА1).

### Задачи

- выбор метода и алгоритма решения, написание программы, отладка ее на модельных данных;
- получение точностных характеристик алгоритма на модельных данных;
- проверка алгоритма и реализующей его программы на реальных данных.

### Модель

1. В качестве модели поверхности Земли в общем случае принимается модель согласно Государственной системе координат «Параметры Земли 1990 года» (ПЗ-90) [4]:

общий земной эллипсоид со следующими геометрическими параметрами:

- большая полуось 6378 136 м;
- сжатие 1:298,257839;
- центр этого эллипсоида совмещен с началом геоцентрической декартовой (прямоугольной) системы координат;
- ось  $Z$  направлена из центра масс к северному полюсу; ось  $X$  перпендикулярна оси  $Z$  и пересекает нулевой меридиан, ось  $Y$  – перпендикулярна плоскости  $Oxy$  и эквивалентна повороту оси  $X$  на 90 градусов вокруг оси  $Z$
- плоскость начального (нулевого) меридиана совпадает с плоскостью  $ZX$  этой системы.

В плоскости экватора Земли располагается так называемая геостационарная орбита (ГСО), расположенная на высоте 35 786 км над уровнем моря.

2. Для станций спутниковой связи задается множество точек  $Z = \{Z_0\} \cup \{Z_i\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Точка  $Z_0$  соответствует станции, принимающей сигнал, все остальные точки соответствуют передающим станциям. Координаты всех точек множества  $Z$  известны.

3. Для двух космических аппаратов определяются две точки  $K_1$  и  $K_2$ . Известно, что каждая из них может находиться внутри некоего «куба» со сторонами размером до 3 угловых градусов с центром в одной из точек геостационарной орбиты (ГСО). Начальный угловой разнос центров таких «кубов» может находиться в пределах от 1,5 до 15 градусов. Положение  $K_1$  известно, для точки  $K_2$  известны только координаты центра соответствующего «куба».

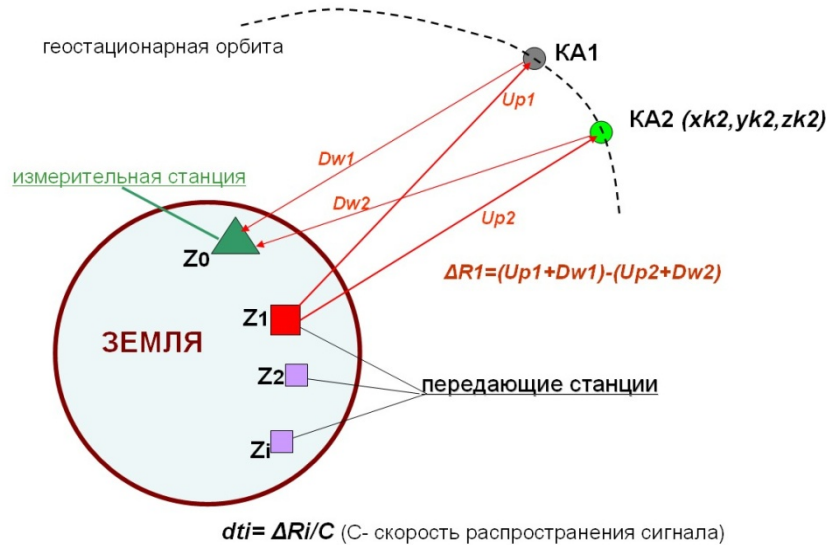


Рис. 1. Измерение временного смещения (TDOA).

Для каждой точки  $Z_i$  вводится понятие расстояния до приемной точки  $Z_0$  через  $K_1$ , обозначаемое  $R_{1,i}$ . Это расстояние есть сумма расстояний от передающей станции  $Z_i$  до  $K_1$  ( $Up_{1,i}$ ) и от  $K_1$  до приемной станции  $Z_0$  ( $Dw_{1,i}$ ):  $R_{1,i} = Up_{1,i} + Dw_{1,i}$ . Аналогичным образом определяется расстояние от точки  $Z_i$  до точки  $Z_0$  через  $K_2$  ( $R_{2,i}$ ).

Для каждой станции известна разность  $\Delta t_i$  времени прохождения сигнала через  $K_1$  и через  $K_2$ , из которой можно получить разность расстояний  $\Delta R_i = R_{1,i} - R_{2,i}$  по формуле  $\Delta R_i = c \Delta t_i$ , где  $c$  – скорость распространения сигнала и равна скорости света в вакууме (см. схему на Рис. 1).

### 3. ВЫБОР МЕТОДА И АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ

Для поиска  $K_2$  был выбран метод наименьших квадратов (МНК). В качестве системы координат, необходимой для реализации метода, была взята декартова система координат, описанная в предыдущем параграфе (в английской терминологии эта система называется ECEF, Earth-Centered, Earth-Fixed). Поскольку координаты задаются также и в иной, геодезической системе координат (как, например, в Приложении 2), существует известное преобразование между этими системами, приведенное в Приложении 1.

Обозначим знаком волны над переменными их вариации, связанные с текущим приближением  $K_2$ , то есть  $\tilde{K}_2$  – предполагаемое положение КА2,  $\Delta \tilde{t}_i$  – разность между временем, которое тратит сигнал на проход через  $K_1$  и  $\tilde{K}_2$ ,  $\Delta \tilde{t}_i = \Delta \tilde{R}_i / c$ , где разность расстояний  $\Delta \tilde{R}_i$ , определяющая временное смещение  $\Delta \tilde{t}_i$  определяется по формуле

$$\Delta \tilde{R}_i = \|Z_0 - K_1\| + \|K_1 - Z_i\| - (\|Z_0 - \tilde{K}_2\| + \|\tilde{K}_2 - Z_i\|). \quad (1)$$

Здесь знаком нормы  $\|\cdot\|$  обозначено обычное евклидово расстояние.

Теперь можно выписать функционал МНК:

$$F(\tilde{K}_2) = \sum_{i=1}^n (\Delta R_i - \Delta \tilde{R}_i(\tilde{K}_2))^2, \quad (2)$$

достигающий минимума в  $\tilde{K}_2 = K_2$ , причём  $F(K_2) = 0$ .<sup>1</sup>

Функционал  $F(\tilde{K}_2)$  – нелинейный и неунимодальный в  $\mathfrak{R}^3$ , более того, определяемая им поверхность имеет, так называемый овражный характер [6]. Поэтому было важно выбрать метод минимизации, обеспечивающий требуемую точность при разумной скорости сходимости итеративного процесса минимизации.

В настоящее время существует много руководств и программных пакетов для минимизации подобных нелинейных многомерных функционалов, среди которых один из наиболее известных – Numerical Recipes [7] рекомендует такие методы, как метод квази-ньютон, сопряженных градиентов, параллельных касательных (Пауэлла) и др. Однако следует отметить, что практически все такие пакеты в силу их общности не могли использовать конкретный вид минимизируемого функционала, а были ориентированы либо на численное вычисление матрицы вторых производных (гессиана), либо на ее численную аппроксимацию по первым производным.

По поводу применения наиболее быстрого из методов, использующих гессиан, – метода Ньютона, имеющего квадратичную скорость сходимости в окрестности минимума, всюду даются предупреждения о его чрезмерной чувствительности к выбору начального приближения, о необходимости вычисления и обращения матрицы Гессе на каждой итерации, что оказывается особенно сложным из-за ее плохой обусловленности, вызванной овражным характером функционала (см. [6] стр.94-95).

Поэтому вначале мы обратились к методам, рекомендованным в [7], и протестировали их на модельных данных, получив неплохие результаты для ряда частных случаев размещения четырех наземных станций и близких к реальным координат спутников  $K_1$  и  $K_2$ .

Тем не менее, поскольку при общих условиях размещения наземных станций иногда возникали недопустимые отклонения в оценке координат спутника  $K_2$ , мы обратились к более внимательному исследованию аналитической структуры функционала (2) и его производных. Выяснилось, что аппарат символьных алгебраических вычислений в программе Mathematica позволяет получить аналитические выражения для матрицы Гессе функционала (2) и, таким образом, открыть путь для использования метода Ньютона. Однако, вышеупомянутая плохая обусловленность гессиана потребовала применения вычислений с точностью, большей, чем обычная удвоенная. Поэтому алгоритм метода Ньютона, взятый из [6], пришлось реализовать на C++ с увеличенной точностью. Кроме того, многочисленные расчеты на модельных данных показали, что задание начального приближения для  $\tilde{K}_2$  в виде центра малого куба со сторонами размером до 3 угловых градусов, оказалось вполне достаточным, чтобы обеспечить сходимость метода Ньютона, который и был взят как наиболее подходящий для минимизации многомерного функционала (2).

Увеличенная точность чисел с плавающей запятой

<sup>1</sup> Если зафиксировать  $\Delta \tilde{t}_i$  (таким образом и  $\Delta \tilde{R}_i$ ), то поскольку первое слагаемое в (1) также уже определено, как расстояние между наземными станциями  $Z_0$  и  $Z_i$  через известный спутник КА1, мы получаем, что набор точек, определяемых  $i$ -м слагаемым в функционале (2), будет удовлетворять условию  $(\|Z_0 - \tilde{K}_2\| + \|\tilde{K}_2 - Z_i\|) = const$ . Это условие задает эллипсоид вращения, как геометрическое место точек с одинаковой суммой расстояний до двух фокусов  $Z_0$  и  $Z_i$ .

Реализация чисел с плавающей запятой большой точности на C++ была взята из проекта Boost.multiprecision, являющегося на данный момент кандидатом на включение в известный набор библиотек Boost [8].

В качестве класса, моделирующего число с плавающей точкой, был взят класс `cpp_dec_float` с параметром `Digits10`, равным 50. Таким образом, повышенная точность представляет собой точность в 50 десятичных знаков с 64-битной экспонентой; также реализация использует представление с дополнительными десятичными разрядами для удовлетворения требований к точности алгебраических операций.

Как показали дальнейшие исследования, эта реализация предоставляет достаточную точность, и при этом сохраняет достаточно большую производительность, позволяющую применять метод Монте-Карло за разумное время на современном вычислительном оборудовании.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Работа с моделью в режиме Монте-Карло была необходима, чтобы отладить программу, оценить алгоритм по критериям точности и скорости работы и обосновать выбор метода минимизации, оптимальный по этим характеристикам.

Статистический характер оценок метода Монте-Карло требовал многих тысяч повторений расчетов модельных экспериментов для обеспечения высокого уровня достоверности результатов, причем в каждом эксперименте следовало имитировать случайное расположение наземных станций и спутников так, чтобы это максимально соответствовало решаемой задаче. Поэтому координаты точек, соответствующих станциям, генерировались случайными, но так, чтобы они были в прямой видимости спутников и в широтах, свойственных станциям, расположенным на территории Российской Федерации.

В качестве критерия точности метода бралась случайная ошибка в определении координат спутника КА2, т.е. вектор  $E(\tilde{K}_2) = K_2 - \tilde{K}_2$  отклонения точки  $\tilde{K}_2$  минимума функционала  $F(\tilde{K}_2)$  от сгенерированного монте-карловского положения этого спутника.

Общая точность метода определялась по среднеквадратичному разбросу координат ошибки  $E(\tilde{K}_2)$ , вычисляемому во многих тысячах экспериментов с учетом ошибок измерительной аппаратуры и алгоритмов определения  $\Delta t_i$ , обычно основанных на автокорреляции сигнала, записанного на станции-приёмнике (см. [1]). Поскольку вероятностная природа этих ошибок нам неизвестна, передаваемые нам измеренные величины временных смещений  $\Delta t_i$  «размазывались» по нормальному закону со средним ноль и среднеквадратичным отклонением  $s$ , т.е.  $\Delta t_i$  заменялись на  $\Delta \tilde{t}_i = \Delta t_i + E_{\Delta t}^i$ , где  $E_{\Delta t}^i$  - ошибка определения  $\Delta t_i$ , распределенная по нормальному закону  $N(0; s)$ . В этом случае поверхности эллипсоида вращения, которым удовлетворяют координаты  $\tilde{K}_2$  из условия (1), меняют свою большую ось при сохранении фокусов, причём независимо друг от друга. Тогда минимум  $F(\tilde{K}_2)$  в общем случае не обязательно равен нулю.

##### 4.1. Результаты вычислений по точности метода при реальном расположении наземных станций и спутников

Покоординатная зависимость среднеквадратичного отклонения случайной оценки  $E(\tilde{K}_2)$  от параметра  $s$ , определяющего разброс измерений временного смещения, приведена в таблице и на графике рис. 2. Для каждого значения  $s$  проводилось по 5000 экспериментов, в каждом из которых выбирались пять наземных станций, расположение которых и спутника КА1 бралось из Приложения 2 (время 11:31)

**Таблица**

$s$ nsec	$\sigma_x$ km	$\sigma_y$ km	$\sigma_z$ km
<b>10</b>	<b>10,36936</b>	<b>2,185811</b>	<b>0,016956</b>
<b>30</b>	<b>31,10809</b>	<b>6,557434</b>	<b>0,05345</b>

50	51,71833	10,7978	0,099834
100	104,0043	21,44876	0,27873

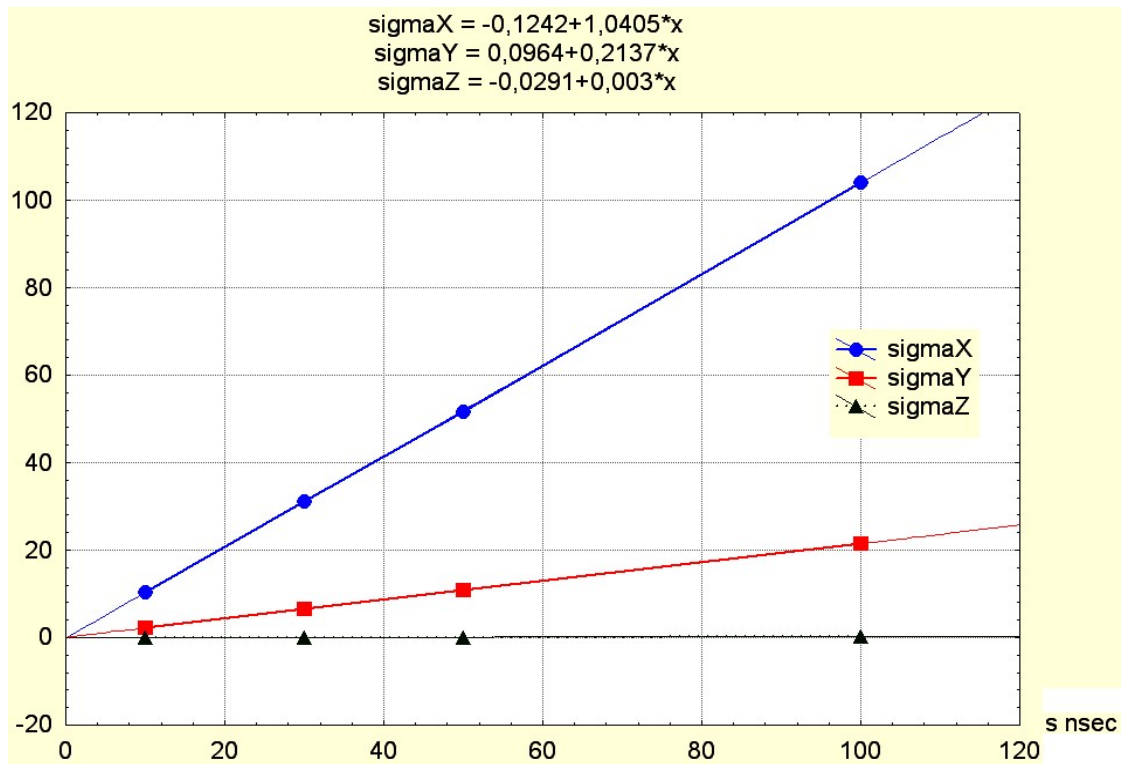


Рис. 2. Покоординатная зависимость среднеквадратичного отклонения  $E(\tilde{K}_2)$  от ошибки  $\Delta t$

Наиболее важный вывод из Таблицы 1 и Рис.2. - линейность зависимости среднеквадратичной ошибки нашей оценки координат спутника КА2 от разброса  $s$  временного смещения для малых значений  $s$ . Второе, что обращает на себя внимание, - ошибка по координате X значительно больше ошибок для других координат.

Чтобы разобраться в причинах такого превышения, мы построили двумерное распределение 5 тыс. точек, представляющих ошибки по X и Y. Это распределение, представленное на Рис. 3, наглядно показало наличие сильной корреляции между значениями ошибок по этим координатам (коэффициент корреляции  $\rho_{xy} = -0.81613$ ), вызванной тем, что при выбранном расположении наземных станций и спутников кривые на эллипсоидах, определяющих решение, пересекаются под очень малыми углами с тангенсом угла наклона к оси X, равным  $\approx -0.2$ .

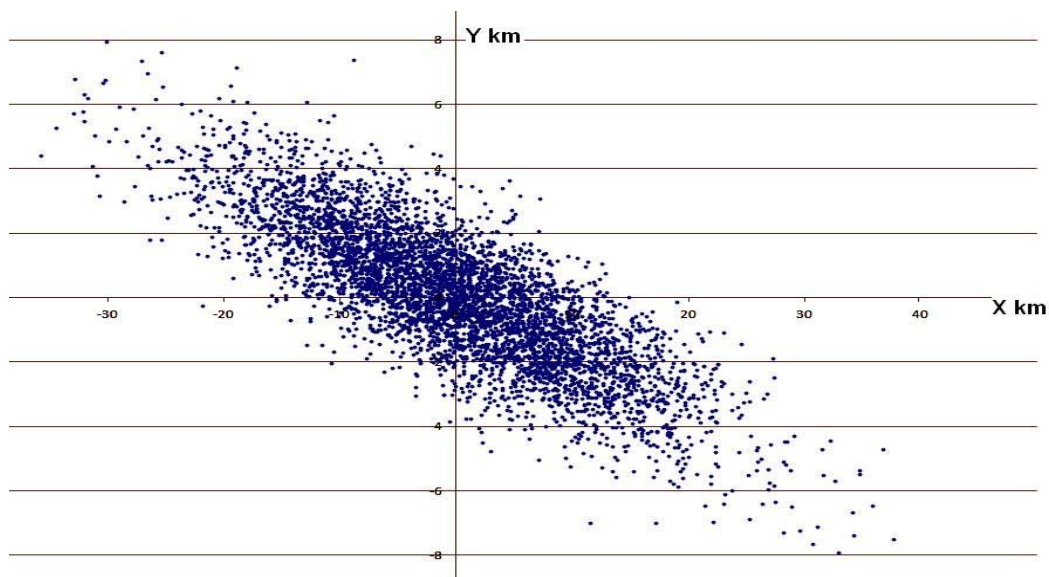


Рис. 3. Взаимное распределение ошибок по X и Y координатам.

Рисунки 2 и 3 позволяют также сделать полезный вывод о несмещенности оценки координат  $K_2$ , получаемой нашим методом. Чтобы окончательно убедиться в этом, монте-карловский расчет по вычислению средних значений расстояния от минимума  $F(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}^3$  до  $K_2$ , был повторен 50 тыс. раз и дал пренебрежимо малые средние значения смещения, по координатам:  $\Delta x = -0,017474457$ ,  $\Delta y = -0,003935826$   $\Delta z = -0,001596519$ .

#### 4.2 Распределение ошибки для фиксированных станций и случайного расположения спутника КА2

Было исследовано применение метода для реальных «хорошо» разнесённых станций: Гусь Хрустальный, Элиста, Махачкала и Якутск. Теперь изучалось распределение случайного расстояния  $\|E(\tilde{K}_2)\|$  от минимума  $F(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}^3$  до  $K_2$  в зависимости от ошибки измерения временного сдвига  $\Delta t$ . Указанное положение станций было выбрано не случайно – станции хорошо разнесены и не находятся на одной прямой (дуге большого круга). Для каждого значения  $s$  было проведено 5000 экспериментов, в которых положение спутника КА1 было задано, а координаты спутника КА2 выбирались случайными. При этом, учитывая полученную в предыдущем параграфе линейность зависимости  $E(\tilde{K}_2)$  от параметра  $s$ , мы строили это распределение для отношения  $\|E(\tilde{K}_2)\|/s$ , чтобы не рисовать много графиков для разных  $s$  или не загромождать график несколькими кривыми. Результат показан на рисунке 4.

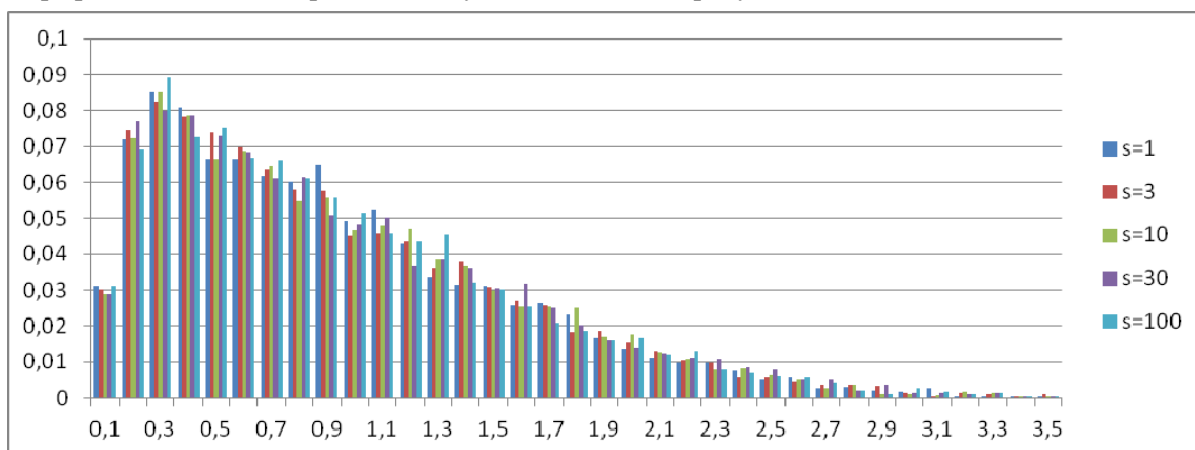


Рис. 4. Распределение относительной величины  $\|E(\tilde{K}_2)\|/s$ , км/нсек для реальных станций.

Видно, что для хорошо разнесённых станций минимум функционала  $\tilde{K}_2$  даже при значительной неточности в измерении временного смещения (до 100 наносек) находится к положению спутника  $K_2$  в среднем на расстоянии в  $0,9*s$  километров и в 98% случаев не уходит за  $2,5*s$  км).

#### 4.3. Результаты вычислений по общей точности метода

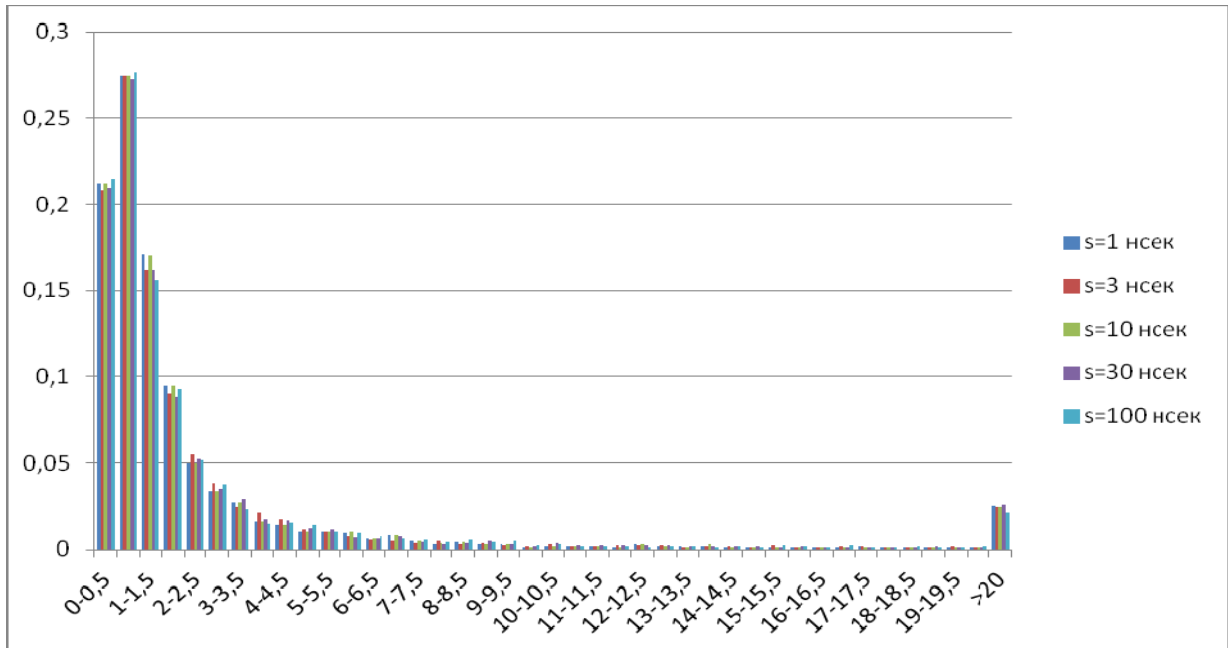
Следовало, однако, убедиться в надежности предлагаемого алгоритма решения и для более общих предположений о случайном расположении наземных станций и спутников  $Z_0$ ,  $Z_i$ ,  $K_1$  и  $K_2$ , распределение координат которых должно было удовлетворять следующим условиям, обеспечивающим максимально возможное соответствие монте-карловских и реальных данных:

1. Точки из  $Z$  были расположены случайно на поверхности Земли с равномерно разбросанными геодезическими координатами согласно модели ПЗ-90.2 [3] в интервалах: широта – (30; 60) северной широты; долгота –  $(G_{\min}; G_{\max})$ , где  $G_{\min} = \max(K_{1,long}, K_{2,long}) - 60$ ,  $G_{\max} = \min(K_{1,long}, K_{2,long}) + 60$ ,  $K_{j,long}$  – широта спутника КА $j$ . Этим обеспечивались следующие требования: (1) станции остаются в области прямой видимости обоих спутников, и сохраняется минимальный угол направления сигнала, поскольку под малым углом сигнал принимается хуже и труднее определить  $\Delta t$ ; (2) широта находится в области координат, свойственных Российской Федерации.



2. Значения  $K_{1,long}$  и  $K_{2,long}$  связаны соотношением  $K_{1,long} = K_{2,long} \pm D_{long}$ , где  $D_{long}$  разыгрывалось равномерно в интервале (1,5; 15) угловых градуса. Конкретные значения  $K_j$  генерировались, исходя из геодезических координат, взятых согласно следующему правилу: широта –  $K'_{j,lat} = K_{j,lat} + N(0; 1)$ ; долгота –  $K'_{j,long} = K_{j,long} + N(0; 1,5)$ ; высота –  $K_{j,h} = H_{ГСО} + N(0; 100)$ , где  $N(m; \sigma)$  – нормальное распределение с математическим ожиданием  $m$  и среднеквадратическим отклонением  $\sigma$ ,  $H_{ГСО}$  – высота геостационарной орбиты.

В этих предположениях нами также изучалось распределение относительного расстояния  $\|E(\tilde{K}_2)\|/s$  в зависимости от ошибки измерений временного сдвига  $\Delta t$ . Результат показан на рисунке 5.



**Рис. 5.** Распределения относительной ошибки  $\|E(\tilde{K}_2)\|/s$  определения координат спутника в зависимости от ошибки  $\Delta t$

По распределению на рис.5. можно сделать три важных вывода:

1. уже отмеченная линейность зависимости случайного расстояния  $\|E(\tilde{K}_2)\|/s$  от минимума  $F(x)$ ,  $x \in \mathfrak{R}^3$  до  $K_2$  для малых  $s$ ;
2. по сравнению с распределением для хорошо разнесённых станций на рис.4 видно, что для случайно распределённых станций минимум функционала  $\tilde{K}_2$  может значительно уходить от положения  $K_2$ ;
3. хвостовая часть распределения на рис.5 показывает, что при различных взаимных положениях станций и спутников ошибка определения  $\tilde{K}_2$  может достигать больших значений (при  $s=100$  наносекунд – порядка двух тысяч километров и более), однако основная часть минимумов находится на расстоянии от  $K_2$  до  $3*s$  (км).

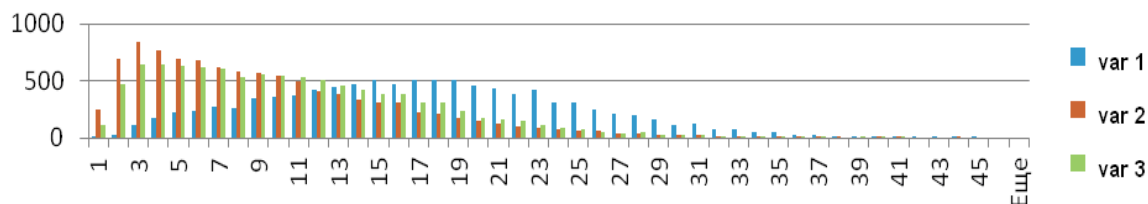
#### 4.4. Зависимость от взаимного положения космических аппаратов

Для исследования зависимости точности метода от взаимного случайного расположения спутников при фиксированном положении наземных станций было проведено 10000 экспериментов при  $s=10$ . На Рис. 6 показано полученное распределение случайного расстояния  $\|E(\tilde{K}_2)\|$  при различных  $E_{\Delta t}^i$  для трёх вариантов случайно взятых  $K_1$  и  $K_2$  как параметров.

Вывод из распределения на рис.6 следующий: точность метода, хотя и достаточно высока (при  $s=10$  средний уход от точного значения находится на уровне 7-20 км), но существенно зависит от взаимного расположения спутников, поэтому следовало бы оценивать точность для



каждого набора  $\langle K_1, K_2, Z_0, \{Z_i\} \rangle$  из пары спутников и множества участвующих станций. С другой стороны, этот же метод Монте-Карло можно использовать для оценки и выбора наилучшего набора параметров  $\langle K_1, K_2, Z_0, \{Z_i\} \rangle$  из доступных.



**Рис. 6.** Распределение  $\|E(\tilde{K}_2)\|$  км для реальных станций и трех вариантов случайного расположения спутников.

Вывод из распределения на рис.6 следующий: точность метода, хотя и достаточно высока (при  $s=10$  средний уход от точного значения находится на уровне 7-20 км), но существенно зависит от взаимного расположения спутников, поэтому следовало бы оценивать точность для каждого набора  $\langle K_1, K_2, Z_0, \{Z_i\} \rangle$  из пары спутников и множества участвующих станций. С другой стороны, этот же метод Монте-Карло можно использовать для оценки и выбора наилучшего набора параметров  $\langle K_1, K_2, Z_0, \{Z_i\} \rangle$  из доступных.

Авторы хотели бы выразить свою благодарность В.Н. Донианцу за постановку задачи и плодотворные обсуждения и В.В. Коренькову за поддержку настоящего исследования.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен итеративный метод решения обратной задачи по определению неизвестных координат космического аппарата по данным измерений TDOA - разницы по времени прохождения сигналов от нескольких наземных передающих станций, при их ретрансляции известным и неизвестным спутниками и регистрации приемной наземной станцией с известными координатами.

Задача решена методом наименьших квадратов (МНК). Получено выражение для нелинейного функционала МНК, параметрами которого являются искомые координаты неизвестного спутника, а также аналитические выражения для матрицы Гессе его вторых производных по параметрам, что позволило использовать для минимизации функционала метод Ньютона.

Плохая обусловленность гессиана потребовала выполнить программную реализацию алгоритма метода Ньютона на объектно-ориентированном языке C++ с увеличенной точностью представления чисел.

Задание начального приближения для положения искомого спутника КА2 в виде центра малого куба со сторонами размером до 3 угловых градусов оказалось достаточным, чтобы обеспечить сходимость метода Ньютона.

Наиболее интересным явилось подробное исследование точностных характеристик предложенного метода, проведенное методом Монте-Карло.

В качестве критерия точности метода бралась случайная ошибка в определении координат спутника КА2, т.е. величина отклонения (со знаком) точки минимума функционала от сгенерированного монте-карловского положения этого спутника.

Общая точность метода определялась по среднеквадратичному разбросу координат ошибки, вычисляемому во многих тысячах экспериментов с учетом ошибок измерительной аппаратуры и алгоритмов определения TDOA. При использовании данных о реальном расположении пяти наземных станций и спутников из Приложения 2 (время 11:30), и случайном варьировании TDOA с параметром рассеивания  $s$  было обнаружена линейная зависимость среднеквадратичных ошибок решения от  $s$  в диапазоне от 10 до 100 наносекунд. Исследовалось также зависимость от  $s$  для распределения модуля ошибки как при фиксированном положении станций и случайном расположении спутника КА2, так и в наиболее общем случае случайного расположения и станций и спутников, а также влияние на точность взаимного случайного расположения спутников.

Отметим, что поскольку полученные результаты показали достаточно высокую точность определения координат уже при четырех передающих станциях, дальнейшие исследования по увеличению их числа не проводились

Результаты вычислительных экспериментов позволили дать оценки точности метода в зависимости от качества измерений временных смещений TDOA и показали эффективность предложенного метода определения координат неизвестного спутника.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОТ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ К ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЗЕМНЫХ КООРДИНАТ [3-4]

С геодезической системой координат связывают понятия геодезической широты  $B$ , долготы  $L$  и высоты  $H$ . Геодезическая широта  $B$  есть угол, под которым пересекается нормаль к поверхности земного эллипсоида с плоскостью экватора. Долгота  $L$  - двугранный угол между плоскостью нулевого меридиана и плоскостью меридиана, проходящего через заданную точку. Высота  $H$  – это высота точки над поверхностью эллипсоида.

Уравнение эллипсоида вращения с центром в точке  $(x_c=0, y_c=0, z_c=0)$ :  
 $(x^2 + y^2 / a^2 + z^2 / b^2 = 1$ .

Рассмотрим точку  $P$ , лежащую вне земного эллипсоида. Опустим из этой точки перпендикуляр на поверхность эллипсоида и продолжим его до пересечения с экваториальной плоскостью (см. рис. 7).

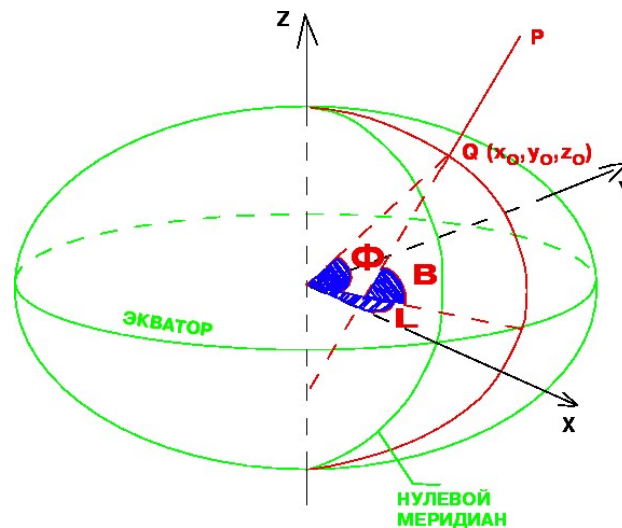


Рис. 6.

Проекцию точки  $P$  на поверхность эллипсоида обозначим через  $Q$ . Тогда отрезок  $PQ$  есть геодезическая высота  $H$  точки  $P$ . Угол, под которым упомянутый перпендикуляр пересекает плоскость экватора, есть геодезическая широта  $B$ . Она относится как к точке  $Q$ , так и к точке  $P$ . Геоцентрические широты этих двух точек, как видно из рисунка, различаются. Геоцентрическая широта точки  $Q$  – это угол  $\Phi$  между радиус-вектором этой точки и плоскостью экватора (не путать с геодезической широтой  $B$ ).

Окончательно, для точки  $P$ , лежащей на высоте  $H$  от поверхности эллипсоида получаем общие формулы перехода от геодезических координат  $B, L, H$  к декартовым  $x, y, z$  в виде:

$$\begin{aligned} x &= (\rho + H) \cos B \cos L, \\ y &= (\rho + H) \cos B \sin L, \\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2} \rho + H\right) \sin B. \end{aligned}$$

где обозначено

$$\rho = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}};$$

Этот параметр  $\rho$  имеет простой геометрический смысл: он равен отрезку нормали, проходящей через точку  $Q$ , от этой точки до точки пересечения ее с осью вращения эллипсоида.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ЗАДАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ НАЗЕМНЫХ ИЗЛУЧАЮЩИХ И ПРИЕМНОЙ СТАНЦИЙ И СПУТНИКА КА1 [9]**

N N	наземная станция - излучатель	координаты		временной сдвиг, мкс	
		с.ш.	в.д.	время 11:31	время 20:55
1 Z	Элиста	46,3 1	44,2 7	547,43	447,59
2 Z	Махачкала	42,9 95	47,4 7	542,51	442,07
3 Z	Гусь-Хрустальный	55,5 85	40,8 7	512,42	414,99
4 Z	Мирный	62,5 4	113, 98	124,42	33,19
4A Z	Якутск	61,9 1	129, 55	124,42	33,19
0 Z	приемная станция	55,5 85	40,8 7		

**Примечание:**

1. КА 1 "Экспресс МД1" орбитальная позиция 80 гр.в.д. Заданы координаты X,Y,Z.
2. КА2 "Тайком 5" орбитальная позиция 78,5 гр.в.д. Координаты X,Y,Z неизвестны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K.S.Но, Y.T.Chan, Solution and performance analysis of geolocation by TDOA, IEEE Trans.Aerospace&ElectrSys. v.29, #4, 1993, 1311-1322.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я, Методы решения некорректных зада, М. Наука, 1979, 288 с.
3. Телеганов Н.А., Тетерин Г.Н., Метод и системы координат в геодезии, – Новосибирск: СГГА. – 2008. – 143 с.
4. <http://www.credo-dialogue.com/getattachment/cf080706-6d93-4eff-98d7-b92b5cf31481/Space-methods.aspx> .
5. [http://moy-sat-apparat.ru/ustanovka/teoria\\_sputnik\\_tv/page003/index.html](http://moy-sat-apparat.ru/ustanovka/teoria_sputnik_tv/page003/index.html)
6. Гончаров В.А. Методы оптимизации: учебное пособие. – М.: Высшее образование, 2009. – 191 с.
7. Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing (C++ code), 3rd Edition, Cambridge University Press., 2007, ISBN 0-521-88068-8.
8. J.Maddock, C. Kormanyos. Boost.Multiprecision. [Электронный ресурс]. режим доступа: [http://svn.boost.org/svn/boost/sandbox/big\\_number/libs/multiprecision/doc/html/index.html](http://svn.boost.org/svn/boost/sandbox/big_number/libs/multiprecision/doc/html/index.html) (дата обращения: 12.08.2012).
9. В.Н.Донианц, А.Н.Кольцов, Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2012615391 от 15.06.2012 «Расчет взаимной корреляционной функции сигналов, полученных от двух спутников связи, расположенных на геостационарной орбите».

## **Iterative method of a space apparatus locating**

**S.Mitsyn, G.Ososkov**

The inverse problem of an unknown geostationary satellite location from measurements of the signal time difference of arrivals (TDOA) from several transmitting stations which signals are retransmitted by known and unknown geostationary satellites and received by the station with known coordinates is studied and analyzed. An iterative approach based on the least square method (LSM) was proposed to solve this problem. The application of the Newton method to minimize nonlinear LSM functional succeeded due to a possibility to calculate analytically its second derivative matrix, which ill-conditioning requested the calculation accuracy higher than the common double precision. Results of Monte-Carlo experiments allow to estimate the proposed method accuracy in dependence on the quality of TDOA measurements and shows its high efficiency.

**KEYWORDS:** geostationary satellite, inverse problem, TDOA, Newton method, ill-conditioning, Monte-Carlo simulations