

Об оценке сложности изображений с помощью двумерных вариаций

О. П. Милюкова, П. А. Чочиа

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 15.11.2012

Аннотация—Рассматриваются общие принципы решения задачи восстановления искаженных изображений, основанные как на детерминированном, так и на вероятностном подходах. Отмечается важность выбора математических характеристик двумерных функций, на основании которых можно было бы оценивать их сложность. Для оценки сложности изображений предлагается использовать двумерные вариации Кронрода. Показываются результаты применения данных вариаций для исследования реальных и синтезированных изображений. Даются рекомендации использования двумерных вариаций Кронрода для решения задач фильтрации и восстановления изображений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: двумерная вариация, вариация Кронрода, сложность изображения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В процессе развития теории обработки изображений возникла необходимость оценивания сложности изображения. По аналогии с тем, как по скорости убывания коэффициентов рядов аналитических функций можно оценить сложность самой функции, нужно было найти такие характеристики многомерных функций, по которым можно было бы отличить менее сложные функции от функций более сложных. В ряде работ для оценки сложности метрических пространств и многомерных аналитических функций было предложено использовать энтропии и многомерные вариации [1]. В частности, было показано, что функции n переменных с конечными вариациями, так же как и функции одной переменной раскладываются в разность двух монотонных функций, почти всюду у них есть полный дифференциал, почти всюду к ним сходятся их ряды Фурье.

Рассматривая изображение как двумерную функцию [5], в данной работе исследуется возможность и эффективность использования двумерных вариаций, в частности двумерных вариаций Кронрода, при решении задач цифровой обработки изображений [2].

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В качестве достаточно полной математической модели изображающих систем обычно используется линейное интегральное уравнение первого рода.

$$Ag + \xi = u(x, y) + \xi(x, y) = \tilde{u}(x, y), \quad (x, y) \in W, \quad (1)$$

где $u \in U$, $g \in G$, (U, G) — пара метрических пространств, A — линейный интегральный оператор, $\xi(x, y)$ — изображение шума, $\tilde{u}(x, y)$ — наблюдаемое искаженное изображение.

Задача восстановления искаженного изображения формулируется следующим образом: найти (или оценить) идеальное неискаженное изображение $g(x, y)$, связанное с наблюдаемым искаженным изображением $\tilde{u}(x, y)$ соотношением (1). К методам, наиболее часто применяемым

для решения задачи восстановления изображений, относятся методы решения некорректно поставленных задач [3] и методы статистического оценивания [4]. В первом случае задача восстановления сводится к минимизации тихоновского функционала

$$g^* = \inf_{g \in G} \{ \rho_U(Ag, \tilde{u}) + \alpha \Omega(g) \}. \quad (2)$$

В случае, когда применяется байесовский подход или критерий максимума апостериорной вероятности, решение сводится к поиску оптимальной оценки вида

$$g^* = \inf_{g \in G} \{ -\ln q(Ag - \tilde{u}) - \ln p(g) \}, \quad (3)$$

где $p(g)$ и $q(Ag - \tilde{u}) = q(\xi)$ — априорные плотности вероятностей изображения и аддитивного шума. Используя в (3) наиболее распространенные вероятностные модели шума и изображения, а именно: $q(\xi)$ — гауссову, а $p(g)$ — распределения Гиббса, получим оптимальную оценку

$$g^* = \inf_{g \in G} \{ \|Ag - \tilde{u}\|_B^2 + U(g) \},$$

где $U(g)$ — потенциал Гиббса, а B^{-1} — ковариационный оператор шума.

Отметим, что задача восстановления не может быть решена с помощью, так называемых, эмпирических методов, эффективно применяющихся при цифровой обработке изображений. Задача восстановления — типичная обратная задача математической физики и, как всякая обратная задача, может быть решена только на основе строгих математических методов.

2.1. Линейные методы

Как правило, при восстановлении искаженных изображений ограничиваются линейными восстанавливающими алгоритмами, что связано с их небольшой вычислительной сложностью. Линейный восстанавливающий алгоритм, в общем случае, может быть представлен как алгоритм минимизации квадратичного функционала:

$$g^* = \inf_{g \in G} \{ \|Ag - \tilde{u}\|_B^2 + \alpha \Omega(g, Cg) \}, \quad (4)$$

где B и C — положительно определенные операторы. Заметим, что методы статистического оценивания и винеровская фильтрация также приводят к минимизации функционала (4), в предположении гауссовой природы вероятностных свойств изображения и шума (при $\alpha = 1$). В этом случае операторы B и C — обратные ковариационные операторы шума и изображения: $B = [Cov(\xi)]^{-1}$ и $C = [Cov(g)]^{-1}$.

Из формулы (4) также следует, что все линейные алгоритмы восстановления отличаются друг от друга выбором операторов B и C . Однако многочисленные эксперименты показывают, что результаты восстановления, мало зависят от вида оператора C , т.е. от корреляционных свойств изображения. Это связано с тем, что реальные изображения, как правило, существенно не однородны и не могут описываться средним и ковариациями.

2.2. Нелинейные методы

Принципиально более содержательный результат можно получить, используя нелинейные методы восстановления, когда априорная информация об изображении не задается в виде квадратичного функционала. В работе [5] было предложено интерпретировать изображение

как двумерную функцию с ограниченными вариациями. В этом случае задача восстановления может быть сведена к задаче минимизации функционала

$$g^* = \inf_{g \in G} \{ \|Ag - \tilde{u}\|_B^2 + \alpha \text{Var}(g) \}.$$

Как известно, для функции двух переменных существуют различные определения двумерных вариаций (вариации Витали, Арцела, Тонелли и др.). Все они сводятся к тому, что определяется один функционал, ограниченность которого гарантирует наличие у функции ряда свойств. Однако список этих свойств во всех случаях оказывается слишком бедным, по сравнению с одномерным аналогом. Неоднозначность определения многомерных вариаций связана, в первую очередь, с возможностью использовать различные процедуры упорядочения точек в многомерном пространстве, в частности, на плоскости. С аналогичной ситуацией сталкиваются при создании вероятностных моделей двумерных изображений в (3), когда вводятся одномарковские, полуторамарковские, двумарковские и т.п. вероятностные модели.

Для оценки метрических характеристик двумерных изображений было предложено [5] использовать двумерные вариации Кронрода, введение которых снимает указанную проблему упорядоченности. (Добавляя, правда, новые, вычислительные). А.С. Кронродом было показано [6], что функция двух переменных характеризуется не одним, а двумя функционалами (вариациями), которые в некотором смысле независимы. Эти функционалы были определены следующим образом:

$$w_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(e_t) dt, \quad w_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(e_t) dt, \quad (5)$$

где множество e_t есть t – уровень функции $f(x, y)$, т.е. множество тех точек (x, y) , в которых значение функции равно t ; $v_0(e_t)$ – число компонент множества e_t , а $v_1(e_t)$ – длина множества e_t . Эти функционалы названы *линейной* и *плоской* вариациями двумерной функции $f(x, y)$.

Для функции $f(x, y)$, у которой обе вариации конечны, выполняются утверждения, аналогичные тем, что имеют место для функции одной переменной [6]. Для непрерывной дифференцируемой функции

$$w_2(f) = \int_a^b \int_c^d |\text{grad } g(x, y)| dx dy. \quad (6)$$

Алгоритм восстановления, основанный на использовании вариаций Кронрода, может быть записан как задача на условный экстремум в следующей форме:

$$\begin{cases} g^* = \inf_{g \in G} \|Ag - \tilde{u}\|_B^2 \\ w_1 \leq C_1 \\ w_2 \leq C_2, \end{cases}$$

или, для непрерывно дифференцируемой функции как

$$\begin{cases} g^* = \inf_{g \in G} \{ \|Ag - \tilde{u}\|_B^2 + \alpha_1 w_2 \} \\ w_1 \leq C_1. \end{cases}$$

Из сказанного, в частности, следует, что многочисленные попытки создать математическую модель изображения, основанную на определении одного функционала, не могут привести к полноценному описанию свойств изображения. Гладкость, изменчивость, сложность изображения следует описывать двумя независимыми (в некотором смысле) функционалами. Важно отметить, что нулевая вариация v_0 множества e_t , входящая в определение линейной вариации

w_1 в (5), является не метрической, а в определенном смысле топологической характеристикой изображения, основанной на понятии связности и не изменяющейся при гомеоморфизме.

В общем случае, переход от линейных методов восстановления к нелинейным позволяет существенно расширить возможности цифрового восстановления изображений. Как известно [3], решение задачи (1) неустойчиво по отношению к погрешностям. Кроме этого, операторы, описывающие изображающую систему, как правило, необратимы, и следовательно уравнение (1) неоднозначно разрешимо даже при точно заданных входных данных. Оба этих фактора в общем случае существенным образом ограничивают возможность получить восстановленное изображение близкое к оригиналу. Поэтому кроме общего подхода к решению задачи восстановления (2) или (3) многими авторами предлагаются различные методы, использующие специфику конкретной задачи — существование известного фона на изображении, возможность получить большое количество изображений одного и того же объекта, другую доступную априорную информацию об оригинале.

В ряде случаев для эффективного решения задачи восстановления с успехом используются методы заимствованные из других областей математической физики. Например, методы спекл-интерферометрии [7] или нелинейный метод решения задач улучшения изображений, основанный на использовании уравнений анизотропной диффузии, который предложили П. Перона и Ж. Малик [8]. Отметим, что данный метод реализует алгоритм минимизации функционала, задаваемого градиентом, который полностью совпадает со второй вариацией Кронрода для непрерывных дифференцируемых функций (6).

3. ВАРИАЦИИ КРОНРОДА И РЕАЛЬНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Представляет интерес исследование вопроса, как на самом деле выглядят функции $v_0(t)$ и $v_1(t)$ для реальных дискретизованных изображений и как они изменяются в зависимости от наличия шума. Для этого рассмотрим связь их формы с формой распределения вероятностей значений яркостей элементов изображения $h(t)$ ($t = 0, \dots, 255$), $\sum h(t) = 1$, т.е. по сути масштабированной гистограммой изображения. Эксперименты проводились как на идеальных (синтезированных), так и на реальных изображениях.

Приводимые ниже изображения сопровождаются графиками, построенными одинаковым образом. На них показаны соответствующие зависимости $v_0(t)$ (красным цветом), $v_1(t)$ (зеленым) и $h(t)$ (синим) для данного изображения. Оси абсцисс для всех трех графиков совпадают, на них отложены значения t . Деления оси ординат выбраны согласно размаху $v_0(t)$, а остальные графики масштабированы в соответствии с размахом каждого. Точные их значения в данном случае не существенны; интерес представляют лишь общие зависимости.

Для интерпретации поведения графиков $v_0(t)$ и $v_1(t)$ рассмотрим идеальное синтезированное изображение — хорошо известный фантом Шешпа — Логана, используемый в экспериментах по компьютерной томографии (Рис. 1а). Для наших экспериментов его контраст был несколько снижен: уровень минимальной яркости, соответствующий черному, равен значению 16, а уровень максимальной яркости, соответствующий белому, — 240. Каждый пик гистограммы $h(t)$ (синий график на Рис. 1б) соответствует одному или нескольким плато данной яркости (объектам) на изображении. Несмотря на то, что на графике можно различить лишь 5 пиков, на изображении присутствуют 6 различных значений яркости; количество элементов со значением 160 мало и на графике гистограммы в данном масштабе не проявляется.

Для каждого уровня t значение $v_0(t)$ можно интерпретировать как число выступов поверхности (двумерной функции $f(x, y)$), "протыкающих" данный уровень снизу вверх; при этом число впадин, "протыкающих" уровень сверху вниз не влияет на $v_0(t)$. Значение $v_1(t)$ можно рассматривать как сумму периметров оснований обоих множеств выступов и впадин, отсекаемых уровнем t . Так, при переходе от значения $t = 16$ к $t = 17$ величина $v_1(t)$ увеличивается

на сумму периметров двух внутренних темных овалов, являющимися впадинами и "протыкающими" уровень $t = 17$ сверху вниз, в то время как общее число выступов ($v_0(t) = 1$) не меняется. При $t = 73$, когда t превышает уровень серого фона внутри большого овала, $v_0(t)$ резко изменяется и достигает значения $v_0(t) = 7$, поскольку в сечении возникают сразу 6 новых выступов — светлых пятен на сером фоне. В дальнейшем значение $v_0(t)$ снижается до 0 при $t = 241$. Согласно (5), значение линейной вариации $w_1(f)$ (в нашем случае среднее значение, нормированное на число градаций) составляет 2,6; нормированное значение плоской вариации $w_2(f) = 1704,9$.

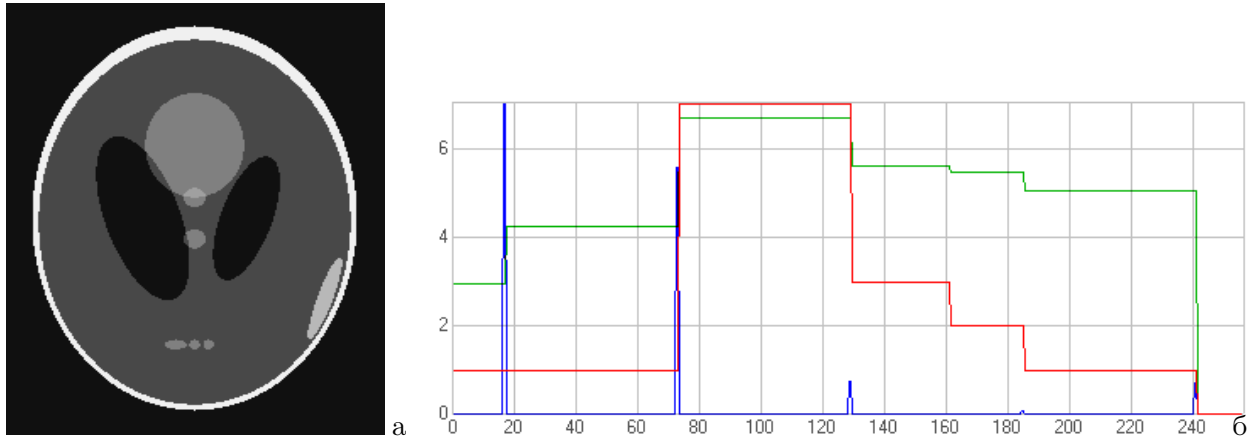


Рис. 1. а) Идеальное синтезированное изображение — фантом Шешпа–Логана. б) Соответствующие графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$.

На исходное идеальное изображение был нанесен гауссов шум с СКО $\sigma = 5$ градаций (Рис. 2а). Картина графиков для искаженного изображения совершенно изменилась и приобрела вид, показанный на Рис. 2б. Как видно, на темном поле фона, которое ранее не добавляло объектов, теперь появилось более 4000 объектов. Очевидно, это есть количество выступов шума. В областях значений t между гауссовыми кривыми, где $h(t) = 0$, значения $v_0(t)$ и $v_1(t)$ остались прежними, но из-за изменения масштаба они выглядят иначе (график для $v_1(t)$), или даже не видны совсем (график для $v_0(t)$). Нормированное значение $w_1(f) = 251,5$, т.е. возросло почти в 100 раз. Нормированное значение $w_2(f) = 4483,0$ — возросло в 2,6 раза.

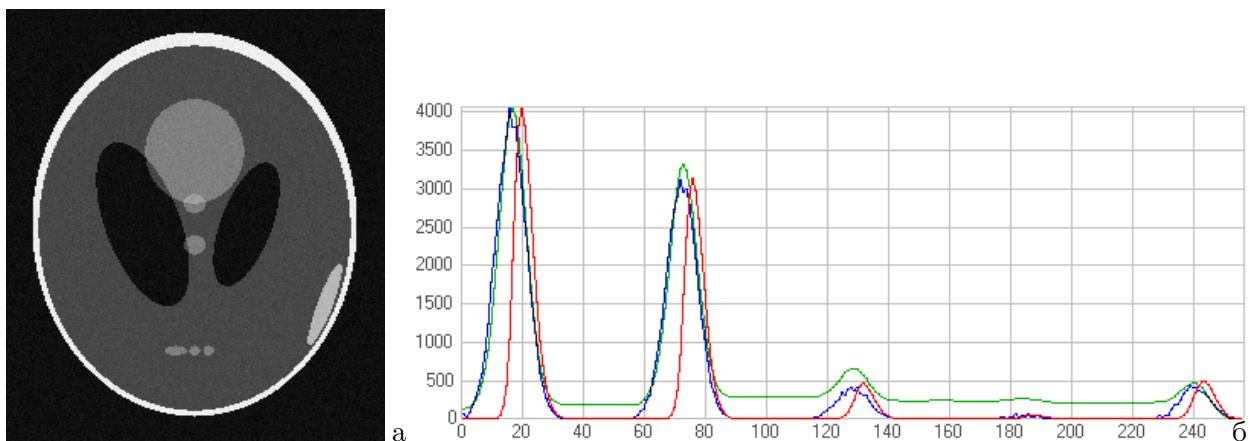


Рис. 2. а) Фантом Шешпа – Логана с нанесенным гауссовым шумом $\sigma = 5$ градаций. б) Графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$.

Отметим, что появившиеся гауссовы пики $v_1(t)$ почти совпадают с соответствующими гауссовыми кривыми гистограммы $h(t)$. Кривая $v_0(t)$ также близка $h(t)$, но интересным является тот факт, что форма $v_0(t)$ в районах гауссовых пиков $h(t)$ оказывается почти вдвое более узкой и смещенной относительно пиков $v_1(t)$ и $h(t)$. Такое же поведение $v_0(t)$ отмечается и на реальных изображениях. Этим особенностям можно дать следующее объяснение.

Величину $v_0(t)$ можно представить как $v_0(t) = z_d(t) + z_n(t)$, т.е. общее количество выступов двумерной функции $f(x, y)$, пересекаемых уровнем t , складывается из количества деталей сюжета $z_d(t)$ и количества шумовых выступов $z_n(t)$, пересекающих данный уровень яркости t . Аналогично, $v_1(t) = l_d(t) + l_n(t)$, где $l_d(t)$ — суммарный периметр деталей, а $l_n(t)$ — суммарный периметр шумовых выступов, пересекающих уровень t .

На изображениях общее число выступов шума порядка числа пикселей изображения, в то время как общее количество деталей всегда много меньше числа пикселей. То же справедливо и в отношении количества деталей $z_d(t)$ и числа шумовых выступов $z_n(t)$, отсекаемых уровнем t : $z_d(t) \ll z_n(t)$, при этом число последних пропорционально вероятности $h(t)$ в некоторой ε -окрестности значения t , т.е. $z_n(t) \approx K \sum_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} h(x)$, где константа K и значение ε определяются характеристиками имеющегося шума. Причина смещения $v_0(t)$ относительно $h(t)$ в том, что (как указывалось выше) в $v_0(t)$ не отражается число возникающих впадин функции $f(x, y)$, поэтому при возрастании t до уровня очередного плато, значение $v_0(t)$ изменяется очень мало и начинает заметно возрастать лишь когда t превышает значение яркости плато. В этом и есть причина того, что на реальных изображениях, на которых всегда присутствует какой-то минимальный шум, вид графика $v_0(t)$ достаточно близко повторяет вид гистограммы $h(t)$, но с некоторым смещением пиков.

Форма распределения $z_d(t)$ на реальных изображениях также напоминает форму $h(t)$, но в несколько меньшей степени. Причина влияния та же самая, но в силу того, что $l_d(t)$ и $l_n(t)$ являются величинами близких масштабов, степень зависимости $v_1(t)$ от формы гистограммы $h(t)$ по сравнению с $v_0(t)$ существенно слабее.

Защумленное изображение (Рис. 2а) подвергалось итеративной сглаживающей фильтрации на основе декомпозиции [2, 9]. Визуально фильтрованное изображение неотлично от оригинала и здесь не приводится. На Рис. 3а показана разность фильтрованного защумленного и исходного (Рис. 1а) изображений, усиленная в 10 раз; реальная разница яркостей пятен, видимых на изображении, составляет 1 градацию. Величина отклонения результата от оригинала (СКО) составила $\sigma = 0,51$ градации. Нормированные значения $w_1(f) = 2,74$ и $w_2(f) = 1721,4$ т.е. значения вариаций практически вернулись к своим первоначальным величинам.

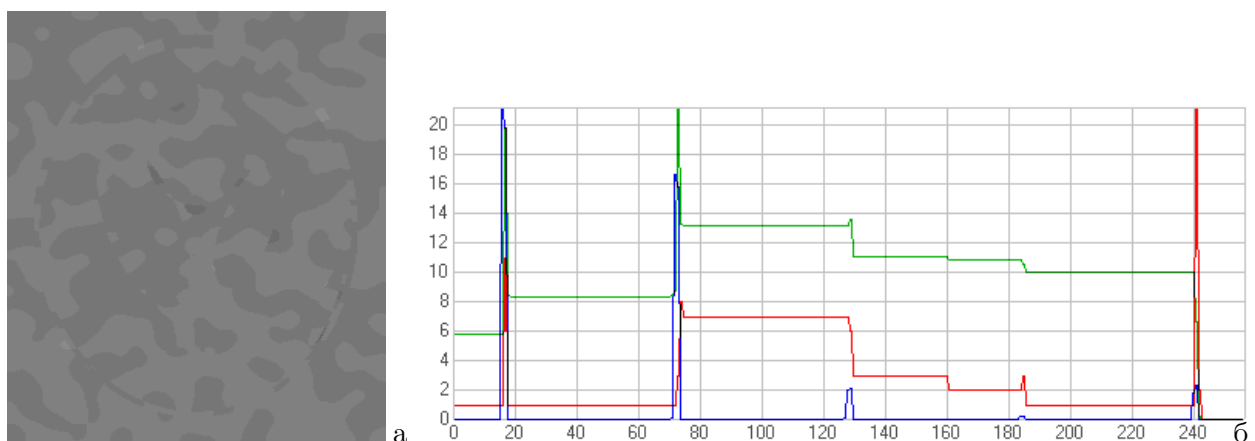


Рис. 3. а) Разность исходного (Рис. 1а) и фильтрованного защумленного (Рис. 3а) изображений, усиленная в 10 раз ($\sigma = 0,51$ градации). б) Графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$ фильтрованного изображения.

Как видно на Рис. 3б, пики в районах значений t , соответствующих имеющимся на рисунке плато, значительно уменьшились; стало возможным сравнение форм $v_0(t)$ и $v_1(t)$ на фильтрованном (Рис. 3б) и исходном (Рис. 1б) изображениях. Можно сделать вывод, что с точностью до оставшихся незначительных пиков, в целом формы графиков $v_0(t)$ и $v_1(t)$ на Рис. 3б совпадают с соответствующими графиками на Рис. 1б.

Перейдем к реальным изображениям. В качестве первого примера был выбран текстовый фрагмент. Поскольку нам хотелось бы, чтобы символы текста являлись счетными единицами функционала $w_1(f)$ (параметра $v_0(t)$), то изображение преобразовывалось в негатив (Рис. 4а). Результаты представлены на Рис. 4б; как видно, график $v_0(t)$ в целом похож на график $h(t)$. Анализ показывает, что $w_1(f) = 457,04$ а $w_2(f) = 18511,1$.

Сглаживающая фильтрация изображения на Рис. 5а алгоритмом [9] с тремя итерациями представлена на Рис. 5а. На Рис. 5б — графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$ полученного результата. Нормированное значение $w_1(f) = 84,95$, что сравнительно близко общему количеству фрагментов символов на изображении (115). Нормированное значение $w_2(f) = 12883,7$ уменьшилось всего на 43% от первоначального значения.

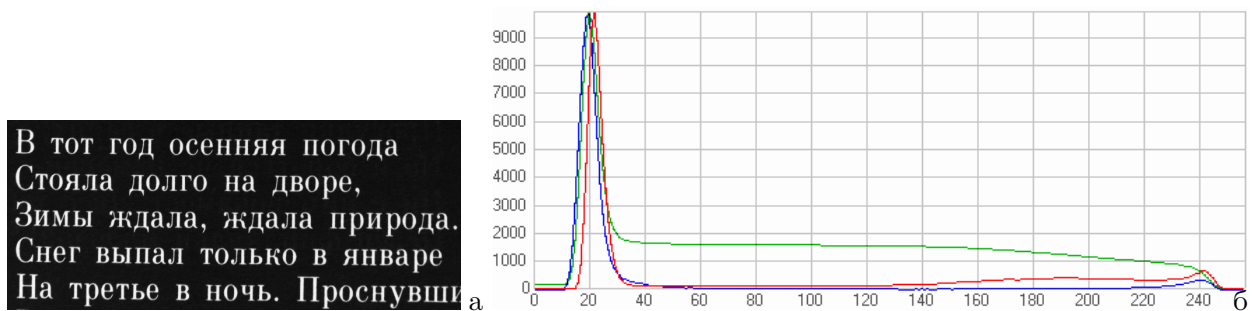


Рис. 4. а) Исходный текстовый фрагмент. б) Соответствующие графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$.

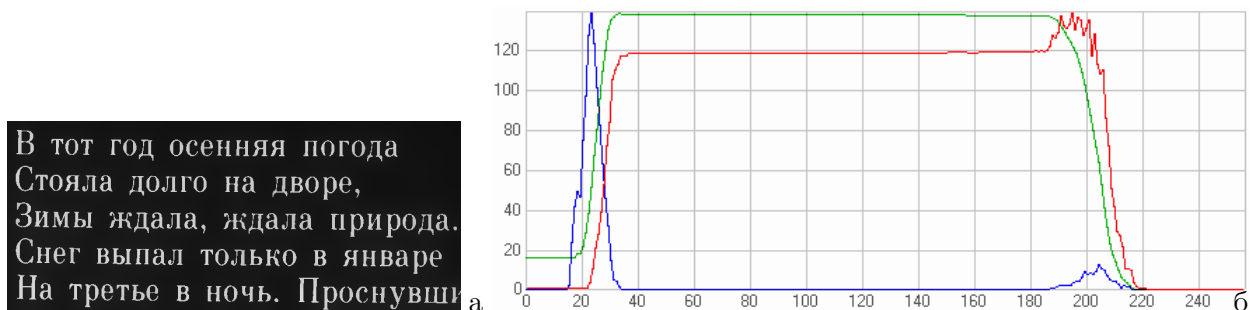


Рис. 5. а) Результат сглаживающей фильтрации изображения на Рис. 5а. б) Графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$.

Как видно, графики $v_0(t)$ и $v_1(t)$ совершенно изменились, притом что график $h(t)$ остался близок прежнему. Данные изменения графиков $v_0(t)$ и $v_1(t)$ трактовать сравнительно легко. Черный фон данного сглаженного изображения имеет непостоянное значение, меняющееся от 20 до 35. При увеличении уровня отсечения t , в этом диапазоне постоянно возрастает количество букв, которые становятся видны (т.е. выступов, отсекаемых уровнем t). При $t = 35$ это количество достигает максимума и не меняется до $t = 180$, когда изображения символов сначала начинают разрываться, несколько увеличивая значение $v_0(t)$, но не $v_1(t)$, а затем исчезают. При $t = 220$ не остается уже ни одного символа.

Следующим примером (Рис. 6а) является сагиттальный скан головы — изображение, полученное в результате компьютерной томографии. Соответствующие графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$ показаны на Рис. 6б. Нормированные значения $w_1(f) = 138,71$ и $w_2(f) = 3140,9$.

После сглаживающей фильтрации исходного изображения алгоритмом [9] с тремя итерациями было получено изображение, представленное на Рис. 7а. На Рис. 6б — графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$ результата. Как видно, пик гистограммы $h(t)$ заметно сузился, а пики $v_0(t)$, $v_1(t)$ значительно уменьшились, что является следствием сглаживания. В остальной части, с точностью до масштабирования по вертикали, график $v_1(t)$ в целом сохранил свой вид, тогда как $v_0(t)$ стал выглядеть совершенно иначе, отражая морфологию изображения. Нормированное значение $w_1(f) = 14,53$, т.е. уменьшилось приблизительно в 10 раз. Нормированное значение $w_2(f) = 1660,5$ — уменьшилось почти в 2 раза.

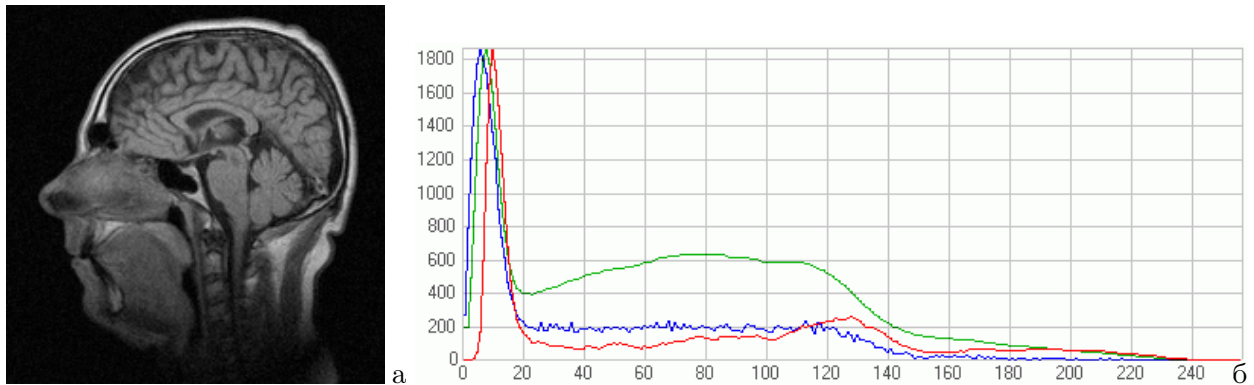


Рис. 6. а) Исходная компьютерная томограмма. б) Графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$.

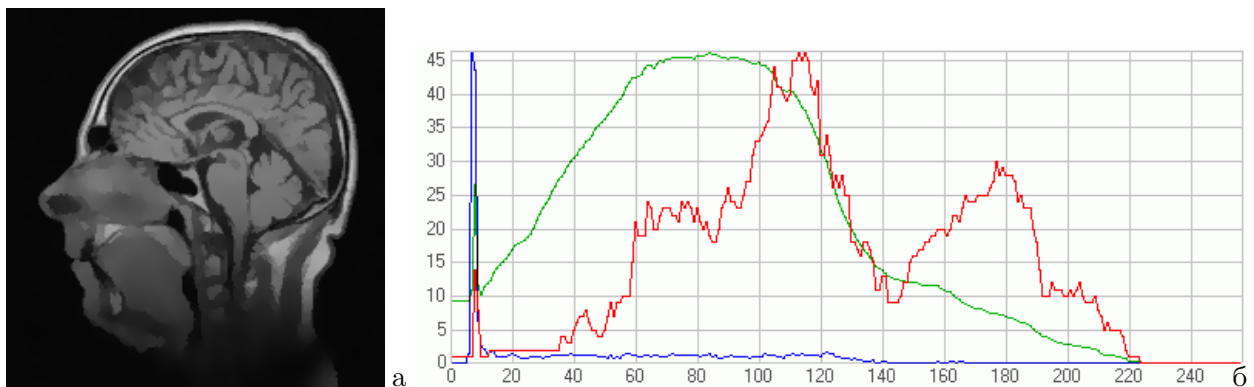


Рис. 7. а) Результат сглаживающей фильтрации томограммы на Рис. 6а. б) Графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$.

В качестве последнего примера был выбран портретный снимок (Рис. 8а). Соответствующие графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$ представлены на Рис. 6б. Легко видеть, насколько хорошо экстремумы гистограммы $h(t)$ повторяются в графиках $v_0(t)$ и $v_1(t)$. Нормированные значения $w_1(f) = 462,41$ и $w_2(f) = 10836,4$.

Результат итерационного сглаживания изображения на Рис. 8а алгоритмом [9] и соответствующие графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$ показаны на Рис. 9. Как видно, гистограмма $h(t)$ изменилась сравнительно мало, тогда как зависимости $v_0(t)$ и $v_1(t)$ приобрели совершенно иной вид. Нормированное значение $w_1(f) = 9,16$ уменьшилось в 50 раз, а $w_2(f) = 4637,1$ уменьшилось в 2,3 раза.

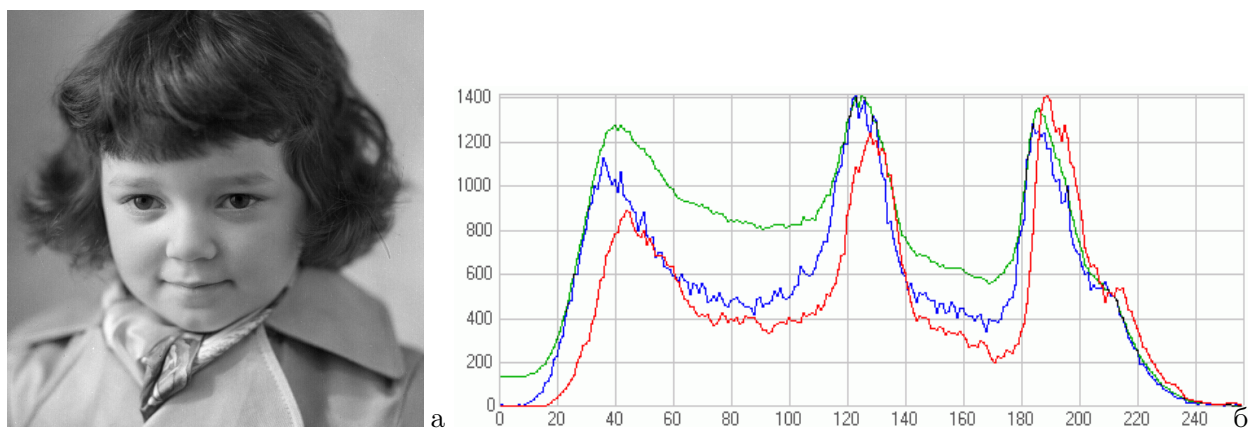


Рис. 8. а) Исходное изображение (портрет). б) Графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$.

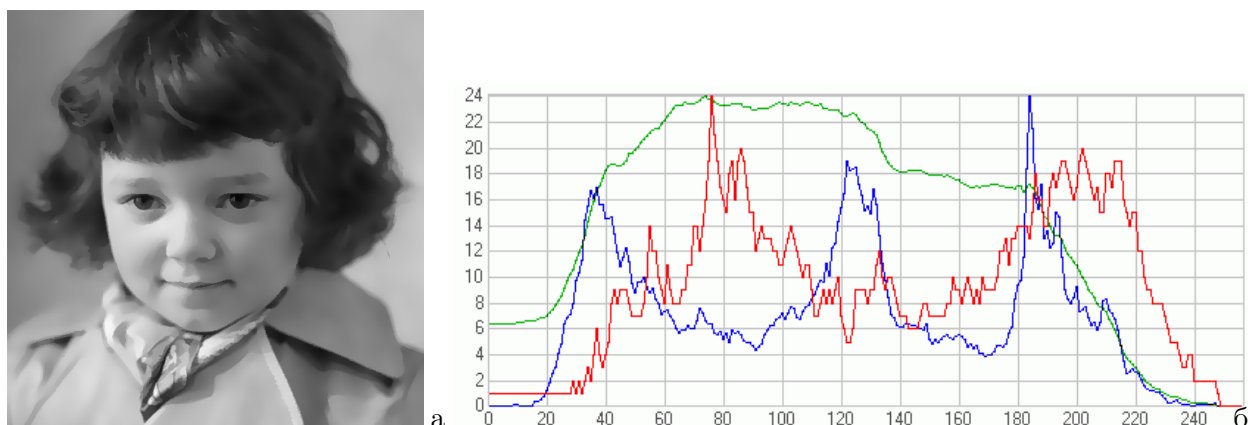


Рис. 9. а) Результат сглаживающей фильтрации изображения на Рис. 8а. б) Графики $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $h(t)$.

Эксперименты по итеративному сглаживанию изображения (подавлению шумов) показали, что при постепенном увеличении степени сглаживания значение линейной вариации $w_1(f)$ сначала падает достаточно резко, затем выходит на некоторое плато, после чего уже уменьшается сравнительно медленно. Итерацию, при которой происходит выход на плато, можно рекомендовать как точку достижения оптимального результата сглаживания. Получаемое значение $w_1(f)$ достаточно устойчиво к последующему сглаживанию и его по-видимому можно считать величиной, характеризующей морфологию (сложность) изображения как функции двух переменных. Значение линейной вариации $w_1(f)$ может также служить критерием степени зашумленности изображения при обработке изображений, в частности в задачах фильтрации и восстановления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витушкин А. Г. *О многомерных вариациях*. М.: Гостехиздат, 1955.
2. Chochia P. A., Miliukova O. P. Two-Dimensional Variation and Image Decomposition. *6th International Workshop "Image Processing and Computer Optics (DIP-97)" Proc. SPIE*. 1998, vol. 3346, pp. 329–339.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1974.
4. Hunt B. R. Bayesian method in nonlinear Digital Image restoration. *IEEE Trans. on Computers*. 1977, vol. C-26, no. 3, pp. 219–229.

5. Milyukova O. P. On Justification of Image Model. *Optical Information Science and Technology (OIST97) Proc. SPIE*, vol. 3348, 1997, pp. 283–289.
6. Кронрод А. С. О функциях двух переменных. *УМН*, 1955, т. 5, вып. 1(35), с. 24–134
7. Dainty J. S. Stellar Speckle Interferometry. В кн.: *Laser Speckle and Related Phenomena (Topics in Applied Physics)*, Springer–Verlag, 1975, vol. 9, pp. 255–280.
8. Perona P., Malik J. Scale–Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion. *IEEE Trans. on PAMI*. 1990, vol. 12, no. 7, pp. 629–639.
9. Чочиа П. А. Сглаживание изображения при сохранении контуров. В кн.: *Кодирование и обработка изображений*. М.: Наука, 1988, с. 87–98.

Статью представил к публикации член редколлегии В. И. Венеч

Image complexity estimation by two–dimensional variations

Chochia P. A., Milyukova O. P.

The general principles of distorted images reconstruction, basing on both deterministic and stochastic approaches are considered. The importance of selecting appropriate characteristics, being used for estimating the complexity of two-dimensional function, is discussed. For estimating the complexity of an image it is proposed to use Kronrod two-dimensional variations. The results of employment of these variations for investigating synthetic and real images are demonstrated. It is recommended to use Kronrod two-dimensional variations in image filtering and reconstruction tasks.

KEYWORDS: two–dimensional variation, Kronrod variation, image complexity.