Информационные процессы, Том 12, № 1, 2012, стр. 53–67.

Об одном методе расчёта стационарного распределения очереди в системе массового обслуживания с потоками обычных и отрицательных заявок и бункером для выбитых заявок[1]

А.В. Печинкин, Р.В. Разумчик

Институт проблем информатики РАН, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 01.01.2012

Аннотация—Рассматривается система массового обслуживания с одним обслуживающим прибором и пуассоновскими потоками положительных и отрицательных заявок. Для положительных заявок имеется накопитель неограниченной ёмкости. Отрицательная заявка, поступающая в систему, выбивает положительную заявку из очереди в накопителе и перемещает её в другой накопитель неограниченной ёмкости, откуда заявки обслуживаются с относительным приоритетом. Если накопитель пуст, отрицательная заявка покидает систему, не оказывая на неё никакого воздействия. Длительности обслуживания заявок из накопителя и из бункера имеют экспоненциальные распределения с различными параметрами. Предложен новый метод, позволяющий эффективно вычислять стационарные распределения очередей в накопителе и бункере.

1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

В последнее время большое внимание уделяется исследованию систем и сетей массового обслуживания с отрицательными заявками, что связано с возможностью их практического приложения при моделировании систем распределённых вычислений и инфотелекоммуникационных систем. Достаточно полный перечень работ, опубликованных до 2011 года по данной тематике, можно найти в [1].

В настоящей статье рассматривается отличный от классического вид отрицательных заявок, которые не разрушают заявки, ожидающие в очереди, а перемещают их в дополнительную очередь, откуда те обслуживаются с относительным приоритетом. Такая постановка задачи была впервые рассмотрена в работах [2] и [3], где для случая бесконечных ёмкостей накопителя и бункера в предположении о пуассоновости входящего потока обычных и отрицательных заявок и экспоненциальности времени обслуживания заявок из накопителя и бункера были получены соотношения для расчёта основных стационарных характеристик системы, включая распределение времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки при различных дисциплинах обслуживания и выбивания. В работах [4] и [5] были получены результаты для стационарных вероятностных и временных характеристик аналогичной модели, функционирующей в дискретном времени.

Система, о которой пойдёт речь в настоящей статье, уже рассматривалась в работе [6]. В ней, используя метод производящих функций (ПФ) и некоторые результаты для системы $M|H_2|1|\infty$, были получены соотношения для совместного стационарного распределения числа заявок в накопителе и бункере. Недостатком предложенного в [6] метода является то,

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-07-00112)

что по полученным формулам очень сложно производить практические расчёты, поскольку быстро накапливается ошибка вычислений. В данной работе предлагается новый, отличный от представленного в [6] подход, который позволяет получить более эффективные расчётные формулы.

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ. Заявки этого потока, как и в [2], будем называть положительными заявками. Для положительных заявок имеется накопитель неограниченной ёмкости.

Помимо положительных заявок, в систему поступает пуассоновский поток отрицательных заявок интенсивности λ^-. Отрицательная заявка, поступающая в систему, вытесняет одну (положительную) заявку из очереди в накопителе (если он не пуст) и перемещает её в накопитель для вытесненных заявок, или бункер, который также имеет неограниченную ёмкость. Если же в момент поступления отрицательной заявки в накопителе нет заявок, то отрицательная заявка покидает систему, не оказывая на неё никакого воздействия. Выбор заявок на обслуживание производится следующим образом. После окончания обслуживания очередной заявки на прибор становится заявка из накопителя. Если же накопитель пуст, на прибор поступает заявка из бункера. Обслуживание заявок не прерывается новыми как положительными, так и отрицательными заявками. Длительности обслуживания заявок из накопителя имеют экспоненциальное распределение с параметром μ, а из бункера — экспоненциальное распределение с параметром μ^-.

Очевидно, что функционирование рассматриваемой системы можно описать неприводимым марковским процессом (МП) со счётным множеством состояний. Далее будем считать выполненным необходимое и достаточное условие существования предельного (стационарного) режима, которое приведено в [6].

2. ВЛОЖЕННАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА

Для рассматриваемой системы вложенную цепь Маркова удобно определить следующим образом. Рассмотрим:

– моменты начала обслуживания заявок из бункера;
– моменты полного опустошения системы.

Последовательность таких моментов обозначим через $\{\tau_n,\ n \geq 0\}$.

Пусть $\xi_n = \xi(\tau_n + 0)$ — число заявок в системе непосредственно после момента τ_n. Последовательность $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ образует однородную цепь Маркова. Множество её состояний имеет вид $\mathcal{X} = \{i,\ i \geq 0\}$.

Для того чтобы выписать матрицу переходных вероятностей P для вложенной цепи Маркова, определим сначала следующие вероятности:

– $q_k(i)$, $k \geq 0$, $i \geq 0$, — вероятность того, что после окончания обслуживания заявок из накопителя к очереди заявок в бункере добавится ещё k заявок, при условии, что в начальный момент на приборе начала обслуживаться заявка из накопителя и в накопителе оставалось ещё i заявок;
– $q_k^-(i)$, $k \geq 0$, $i \geq 0$, — вероятность того, что после окончания обслуживания заявок из накопителя к очереди заявок в бункере добавится ещё k заявок, при условии, что в начальный момент на приборе начала обслуживаться заявка из бункера, а в накопителе оставалось ещё i заявок.

Вероятности $q_k(i)$ и $q_k^-(i)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$q_0(0) = \frac{1}{\mu + \lambda}[\mu + \lambda q_0(1)]; \tag{1}$$

$$q_0(i) = \frac{1}{\mu + \lambda + \lambda^-}[\mu q_0(i-1) + \lambda q_0(i+1)], \quad i \geq 1; \tag{2}$$

$$q_k(0) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\, q_k(1), \quad k \geq 1; \tag{3}$$

$$q_k(i) = \frac{1}{\mu + \lambda + \lambda^-}[\mu q_k(i-1) + \lambda q_k(i+1) + \lambda^- q_{k-1}(i-1)], \quad k \geq 1, \quad i \geq 1; \tag{4}$$

$$q_0^-(0) = \frac{1}{\mu^- + \lambda}[\mu^- + \lambda q_0^-(1)]; \tag{5}$$

$$q_0^-(i) = \frac{1}{\mu^- + \lambda + \lambda^-}[\mu^- q_0(i-1) + \lambda q_0^-(i+1)], \quad i \geq 1; \tag{6}$$

$$q_k^-(0) = \frac{\lambda}{\mu^- + \lambda}\, q_k^-(1), \quad k \geq 1; \tag{7}$$

$$q_k^-(i) = \frac{1}{\mu^- + \lambda + \lambda^-}[\mu^- q_k(i-1) + \lambda q_k^-(i+1) + \lambda^- q_{k-1}^-(i-1)], \quad k \geq 1, \quad i \geq 1. \tag{8}$$

Если теперь положить $q_k = q_k(0)$, $q_k^- = q_k^-(0)$, $k \geq 0$, то матрица переходных вероятностей P вложенной цепи Маркова будет иметь вид

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ q_0^- & q_1^- & q_2^- & q_3^- & \cdots \\ 0 & q_0^- & q_1^- & q_2^- & \cdots \\ 0 & 0 & q_0^- & q_1^- & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Значения вероятностей $\{q_k,\ k \geq 0\}$ и $\{q_k^-,\ k \geq 0\}$ в терминах ПФ дает следующая теорема, доказательство которой приведено в Приложении.

Теорема 1. *Вероятности* $\{q_k,\ k \geq 0\}$ *и* $\{q_k^-,\ k \geq 0\}$ *в терминах ПФ* $A(v) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k v^k$ *и* $B(v) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k^- v^k$ *соответственно имеют вид*

$$A(v) = \frac{\mu z_1}{\lambda - \lambda^- z_1}, \qquad B(v) = \frac{\mu^- z_3}{\lambda - \lambda^- z_3}\left[1 - \frac{\lambda \mu z_3}{(\mu + \lambda^- v)(\lambda - \lambda^- z_3)(z_3 - z_2)}\right],$$

где

$$z_{1,2} = z_{1,2}(v) = \frac{(\mu + \lambda + \lambda^-) \mp \sqrt{(\mu + \lambda + \lambda^-)^2 - 4(\mu + \lambda^- v)\lambda}}{2(\mu + \lambda^- v)},$$

$$z_3 = z_3(v) = \frac{(\mu^- + \lambda + \lambda^-) - \sqrt{(\mu^- + \lambda + \lambda^-)^2 - 4\lambda\lambda^- v}}{2\lambda^- v}.$$

При практических расчётах для нахождения вероятностей q_k и q_k^- необходимо обращать ПФ $A(v)$ и $B(v)$, что связано с серьёзными вычислительными трудностями. Если пытаться находить их, диффференцируя ПФ $A(v)$ и $B(v)$ в точке $v = 0$, то ошибки вычислений накапливаются очень быстро. Одним из наиболее подходящих в данном случае методов обращения ПФ является метод, изложенный в [7] и предполагающий переход к криволинейному интегралу и его приближённое вычисление по формуле трапеции. Приведём формулировку этого результата в виде теоремы. Доказательство теоремы можно найти в [7].

Теорема 2. *Пусть* $\{g_k,\ k \geq 0\}$ *— последовательность чисел таких, что* $|g_k| \leq 1$ *для всех* k, *и пусть* $G(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ *— ПФ этой последовательности, заданная в комплексной области* $|z| < 1$. *Тогда при* $0 < r < 1$ *и* $k \geq 1$

$$\tilde{q}_k(0) = \frac{1}{2kr^k}\left[G(r) + (-1)^k G(-r) + 2\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j \mathrm{Re}\left(G\left(re^{\frac{\pi j}{k}i}\right)\right)\right],$$

причём

$$|q_k(0) - \tilde{q}_k(0)| \leq \frac{r^{2k}}{1 - r^{2k}}.$$

Здесь, как обычно $i = \sqrt{-1}$, *а* $\mathrm{Re}\,(z)$ *— действительная часть* z.

При практических расчётах, когда требуется точность вычислений 10^{-m}, согласно [7] рекомендуется полагать $r = 10^{-\frac{m}{2k}}$. Применяя результат теоремы 2 к ПФ $A(v)$ и $B(v)$, можно находить вероятности q_k и q_k^- с необходимой степенью точности.

Вернёмся к рассмотрению цепи Маркова. Очевидно, она является неприводимой и непериодической. Обозначим через π_i, $i \geq 0$, стационарную по вложенной цепи Маркова вероятность состояния i. Стационарные вероятности π_i эффективно находятся по итерационной формуле Рамасвами [8]:

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{Q_1}{q_0^-}; \qquad \pi_i = \frac{1}{q_0^-}\left(\pi_0 Q_i + \sum_{j=1}^{i-1} \pi_j Q_{i+1-j}^-\right), \quad i \geq 2,$$

где:

$$Q_i = \sum_{j=i}^{\infty} q_j = 1 - \sum_{k=0}^{i-1} q_k, \quad i \geq 1; \qquad Q_i^- = \sum_{j=i}^{\infty} q_j^- = 1 - \sum_{k=0}^{i-1} q_k^-, \quad i \geq 1,$$

а вероятность π_0 согласно [9] определяется по формуле

$$\pi_0 = 1 + \left(1 - \left.\frac{dB(v)}{dv}\right|_{v=1}\right)^{-1}\left(\left.\frac{dA(v)}{dv}\right|_{v=1}\right).$$

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

В этом разделе найдм совместное стационарное распределение числа заявок в накопителе и бункере.

Обозначим через $m(i)$ $(m^-(i))$, $i \geq 0$, среднее время до освобождения накопителя при условии, что в начальный момент на приборе начала обслуживаться заявка из накопителя (бункера) и в накопителе было ещё i заявок. Тогда $m(i)$ и $m^-(i)$ удовлетворяют следующей системе рекуррентных соотношений:

$$m(0) = \frac{1}{\lambda + \mu}[1 + \lambda m(1)]; \tag{9}$$

$$m(i) = \frac{1}{\lambda + \lambda^- + \mu}[1 + \lambda m(i+1) + (\lambda^- + \mu)m(i-1)], \quad i \geq 1; \tag{10}$$

$$m^-(0) = \frac{1}{\lambda + \mu^-}[1 + \lambda m^-(1)];$$

$$m^-(i) = \frac{1}{\lambda + \lambda^- + \mu^-}[1 + \lambda m^-(i+1) + \lambda^- m^-(i-1) + \mu^- m(i-1)], \quad i \geq 1. \tag{11}$$

Решение данной системы удобно найти с помощью ПФ

$$M(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m(i) z^i, \qquad M^-(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m^-(i) z^i.$$

Умножая (10) на z^i и суммируя по всем значениям $i = 1, 2, \ldots$, имеем:

$$M(z) - m(0) = \frac{z}{(\lambda + \lambda^- + \mu)(1-z)} + \\ + \frac{\lambda}{(\lambda + \lambda^- + \mu)z}[M(z) - zm(1) - m(0)] + \frac{(\lambda^- + \mu)z}{\lambda + \lambda^- + \mu} M(z),$$

откуда, учитывая (9), получаем:

$$M(z) = -\frac{(\lambda - \lambda^- z)(1-z)m(0) - z}{(1-z)^2[(\lambda^- + \mu)z - \lambda]}.$$

Знаменатель в предыдущем равенстве представляет собой многочлен третьей степени, корни которого имеют вид $z_5 = \lambda/(\lambda^- + \mu)$ и $z_6 = 1$, причём $0 < z_5 < 1$. Поскольку ПФ $M(z)$ является аналитической функцией в области $\{0 < z < 1\}$, то числитель должен обращается в нуль в точке $z = z_5$, т. е.

$$m(0) = \frac{z_5}{(1 - z_5)(\lambda - \lambda^- z_5)} = \frac{\lambda^- + \mu}{\mu(\lambda^- + \mu - \lambda)}.$$

Для нахождения ПФ $M^-(z)$ домножим (11) на z^i и просуммируем по всем $i = 1, 2, \ldots$. Приводя подобные слагаемые и опуская элементарные выкладки, имеем с учётом вида $M(z)$:

$$M^-(z) = \frac{z(1-z)[\mu(\lambda^- + \mu - \lambda) + \lambda^- \mu^- z] + \mu\mu^- z^2 - \mu(\lambda - \lambda^- z)(\lambda^- + \mu - \lambda)(1-z)^2 m^-(0)}{\lambda^- z^2 - (\lambda + \lambda^- + \mu^-)z + \lambda}. \tag{12}$$

Знаменатель в правой части (12) обращается в нуль в точках $z = z_3(1)$ и $z = z_4(1)$, причём $0 < z_3(1) < 1 < z_4(1)$. Поскольку ПФ $M^-(z)$ является аналитической функцией в области $\{0 < z < 1\}$, то в точке $z = z_3(1)$ должен обращаться в нуль и числитель (12). Отсюда приходим к формуле для определения $m^-(0)$:

$$m^-(0) = \frac{z_3(1)[1 - z_3(1)][\mu(\lambda^- + \mu - \lambda) + \lambda^- \mu^- z_3(1)] + \mu\mu^- z_3^2(1)}{\mu[\lambda - \lambda^- z_3(1)](\lambda^- + \mu - \lambda)[1 - z_3^2(1)]}.$$

Теперь, зная $m(0)$ и $m^-(0)$, можно записать формулу для среднего времени $\tilde{m}$ между соседними моментами изменения состояния вложенной цепи Маркова системы, функционирующей в стационарном режиме:

$$\tilde{m} = \pi_0 \Big(\frac{1}{\lambda} + m(0) \Big) + (1 - \pi_0) m^-(0).$$

Поясним предыдущую формулу. Если вложенная цепь Маркова находится в состоянии $i = 0$ (что происходит с вероятностью π_0), то среднее время до следующего изменения состояния будет складываться из среднего времени до прихода (положительной) заявки в систему и среднего времени до освобождения накопителя при условии, что на приборе начала обслуживаться заявка из накопителя и в накопителе отсутствовали заявки. Если же вложенная цепь Маркова находится в состоянии $i > 0$ (что происходит с вероятностью $1 - \pi_0$), то среднее время до следующего изменения состояния равно среднему времени до освобождения накопителя при условии, что на приборе начала обслуживаться заявка из бункера и в накопителе не было заявок.

Введём следующие обозначения:

- $m_{kl}(i)$, $i, k, l \geq 0$, — среднее время до освобождения накопителя, проведённое системой в состоянии, когда в накопителе было k заявок, а в бункере l заявок, при условии, что в начальный момент на приборе начала обслуживаться заявка из накопителя, в накопителе было ещё i заявок и бункер был пустой;
- $m^-_{kl}(i)$, $i, k, l \geq 0$, — среднее время до освобождения накопителя, проведённое системой в состоянии, когда в накопителе было k заявок, а в бункере l заявок, при условии, что в начальный момент на приборе начала обслуживаться заявка из бункера, в накопителе было ещё i заявок и бункер был пустой.

Средние времена $m_{kl}(i)$ и $m^-_{kl}(i)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$m_{00}(0) = \frac{1}{\lambda + \mu}[1 + \lambda m_{00}(1)]; \tag{13}$$

$$m_{00}(i) = \frac{1}{\lambda + \lambda^- + \mu}[\lambda m_{00}(i+1) + \mu m_{00}(i-1)], \quad i \geq 1; \tag{14}$$

$$m^-_{00}(0) = \frac{1}{\lambda + \mu^-}[1 + \lambda m^-_{00}(1)]; \tag{15}$$

$$m^-_{00}(i) = \frac{1}{\lambda + \lambda^- + \mu^-}[\lambda m^-_{00}(i+1) + \mu^- m_{00}(i-1)], \quad i \geq 1; \tag{16}$$

$$m_{k0}(0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} m_{k0}(1), \quad k \geq 1; \tag{17}$$

$$m_{k0}(i) = \frac{1}{\lambda + \lambda^- + \mu}[\delta_{k-i} + \lambda m_{k0}(i+1) + \mu m_{k0}(i-1)], \quad i, k \geq 1; \tag{18}$$

$$m^-_{k0}(0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu^-} m^-_{k0}(1), \quad k \geq 1; \tag{19}$$

$$m^-_{k0}(i) = \frac{1}{\lambda + \lambda^- + \mu^-}[\delta_{k-i} + \lambda m^-_{k0}(i+1) + \mu^- m_{k0}(i-1)], \quad i, k \geq 1; \tag{20}$$

$$m_{0l}(0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} m_{0l}(1), \quad l \geq 1; \tag{21}$$

$$m_{0l}(i) = \frac{1}{\lambda + \lambda^- + \mu}[\lambda m_{0l}(i+1) + \mu m_{0l}(i-1) + \lambda^- m_{0,l-1}(i-1)], \quad i, l \geq 1; \tag{22}$$

$$m^-_{0l}(0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu^-} m^-_{0l}(1), \quad l \geq 1; \tag{23}$$

$$m^-_{0l}(i) = \frac{1}{\lambda + \lambda^- + \mu^-}[\lambda m_{0l}(i+1) + \mu^- m_{0l}(i-1) + \lambda^- m^-_{0,l-1}(i-1)], \quad i, l \geq 1; \tag{24}$$

$$m_{kl}(0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} m_{kl}(1), \quad k, l \geq 1; \tag{25}$$

$$m_{kl}(i) = \frac{1}{\lambda+\lambda^-+\mu}[\lambda m_{kl}(i+1) + \mu m_{kl}(i-1) + \lambda^- m_{k,l-1}(i-1)], \quad i,k,l \geq 1; \tag{26}$$

$$m^-_{kl}(0) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} m^-_{kl}(1), \quad k,l \geq 1; \tag{27}$$

$$m^-_{kl}(i) = \frac{1}{\lambda+\lambda^-+\mu}[\lambda m^-_{kl}(i+1) + \mu m_{kl}(i-1) + \lambda^- m^-_{k,l-1}(i-1)], \quad i,k,l \geq 1. \tag{28}$$

В уравнениях (18) и (20) через δ_{k-i} обозначен символ Кронерека.

Поясним вывод уравнений (13) и (14). Остальные уравнения получаются аналогично. Среднее время $m_{00}(0)$, проведённое системой в состоянии, когда в накопителе и бункере отсутствовали заявки, при условии, что в начальный момент на приборе начала обслуживаться заявка из накопителя, в накопителе не было заявок и бункер был пустой, равно сумме двух средних времён: среднего времени до наступления очередного события, связанного с приходом или окончанием обслуживания заявки на приборе (которое в силу пуассоновости входящего потока и экспоненциальности времени обслуживания равно $1/(\lambda+\mu)$), и в случае, если наступит событие, связанное с приходом заявки (что происходит с вероятностью $\lambda/(\lambda+\mu)$), среднего времени $m_{00}(1)$. Среднее время $m_{00}(i)$ также равно сумме двух средних времён: $m_{00}(i-1)$, если наступит событие, связанное с окончанием обслуживания заявки (что происходит с вероятностью $\mu/(\lambda+\mu+\lambda^-)$) и $m_{00}(i+1)$, если наступит событие, связанное с приходом (положительной) заявки (что происходит с вероятностью $\lambda/(\lambda+\mu+\lambda^-)$). Заметим, что когда в накопителе в начальный момент находится $i > 0$ заявок, то может ещё произойти событие, связанное с приходом отрицательной заявки. Тогда число заявок в бункере увеличится на единицу. Поскольку нас интересует среднее время, проведённое системой в состоянии, когда накопитель и бункер пусты, то наступление данного события не учитывается.

Обозначим через p_{ij} стационарную вероятность того, что в стационарном режиме прибор занят, в накопителе находится i заявок, а в бункере — j заявок, вытесненных из накопителя. Через p_0 обозначим стационарную вероятность того, что система пуста. Тогда:

$$p_0 = \frac{1}{\lambda\tilde{m}}\pi_0;$$

$$p_{i0} = \frac{1}{\tilde{m}}\left(m_{i0}(0)\pi_0 + m^-_{i0}(0)\pi_1\right), \quad i \geq 0;$$

$$p_{0j} = \frac{1}{\tilde{m}}\left(\pi_0 m_{0j}(0) + \sum_{n=1}^{j+1} m^-_{0,j+1-n}(0)\pi_n\right), \quad j \geq 1;$$

$$p_{ij} = \frac{1}{\tilde{m}}\left(m_{ij}(0)\pi_0 + \sum_{n=1}^{j+1} m^-_{i,j+1-n}(0)\pi_n\right), \quad i \geq 1, \quad j \geq 1.$$

Сформулируем теорему, определяющую выражения для средних времён $m_{kl}(0)$ и $m^-_{k,l}(0)$, фигурирующих в формулах для расчёта совместного стационарного распределения.

Теорема 3. *Средние времена $m_{k0}(0)$, $m^-_{k0}(0)$, $k \geq 0$, определяются формулами:*

$$m_{00}(0) = \frac{\lambda}{\mu[\lambda-\lambda^- z_1(0)]z_2(0)}; \tag{29}$$

$$m^-_{00}(0) = \frac{1}{\lambda+\mu^-} + \frac{\lambda^2\mu^-}{\mu(\lambda+\mu^-)[\lambda-\lambda^- z_1(0)][z_2(0)(\lambda+\lambda^-+\mu^-)-\lambda]}; \tag{30}$$

$$m_{k0}(0) = \frac{z_1^{k+1}(0)}{\lambda - \lambda^- z_1(0)}, \quad k \geq 1; \tag{31}$$

$$m_{k0}^-(0) = \frac{z_7^k}{\lambda + \mu^-}\left[1 + \frac{\lambda\mu^-[z_7^{k+1} - z_1^{k+1}(0)] + \lambda^-\mu^- z_7 z_1(0)[z_1^k(0) - z_7^k]}{z_7^{k-1}\mu[\lambda - \lambda^- z_1(0)][z_7 - z_1(0)][z_2(0) - z_7]}\right], \quad k \geq 1, \tag{32}$$

где $z_7 = \lambda/(\lambda + \lambda^- + \mu^-)$, *а ПФ* $G_k(0,v) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} m_{kl}(0)v^{l-1}$ *и* $G_k^-(0,v) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} m_{kl}^-(0)v^{l-1}$, $k \geq 0$, *средних времён* $m_{k,l}(0)$ *и* $m_{k,l}^-(0)$ *соответственно имеют вид:*

$$G_0(0,v) = \frac{\lambda\lambda^- z_1^2(v)}{[\lambda - \lambda^- z_1(v)][\lambda - \lambda^- z_1(0)][z_2(0) - z_1(v)]}; \tag{33}$$

$$G_k(0,v) = \frac{\lambda^- z_1^2(v)}{\lambda - \lambda^- z_1(v)}\left[\frac{\lambda[z_1^{k+1}(v) - z_1^{k+1}(0)] + \lambda^- z_1(v) z_1(0)[z_1^k(0) - z_1^k(v)]}{\mu[\lambda - \lambda^- z_1(0)][z_1(v) - z_1(0)][z_2(0) - z_1(v)]}\right], \quad k \geq 1; \tag{34}$$

$$\begin{aligned} G_0^-(0,v) = \frac{z_3^2(v)}{\lambda - \lambda^- z_3(v)}&\left[\frac{\mu^-\mu G_0(0,v)[\lambda - \lambda^- z_3(v)][\lambda - \lambda^- z_1(0)][z_2(0) - z_3(v)] - \lambda\lambda^-\mu^- z_3^2(v)}{\mu[z_3(v) - z_1(v)](\mu + \lambda^- v)[z_3(v) - z_2(v)][\lambda - \lambda^- z_1(0)][z_2(0) - z_3(v)]} + \right. \\ &\left. + \frac{\lambda^-\mu[(\lambda^- z_3(v) - \lambda)m_{00}^-(0) + z_3(v)](\lambda - \lambda^- z_1(0))(z_2(0) - z_3(v)) + \lambda^-\lambda\mu^- z_3^2(v)}{\mu[(\lambda + \lambda^- + \mu^-)z_3(v) - \lambda](\lambda - \lambda^- z_1(0))(z_2(0) - z_3(v))}\right]; \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} G_k^-(0,v) = \frac{z_3^2(v)}{\lambda - \lambda^- z_3(v)}&\left[\frac{\lambda^- m_{k0}^-(0)(\lambda^- z_3(v) - \lambda) + \lambda^- z_3^{k+1}(v)}{(\lambda + \lambda^- + \mu^-)z_3(v) - \lambda} + \right. \\ &+ \frac{\lambda^-\mu^-(\mu + \lambda^- v)z_3^2(v) - \lambda^-\mu^-(\mu + \mu^- + 2\lambda + 2\lambda^-)z_3(v) + 2\lambda\lambda^-\mu^-}{[(\lambda + \lambda^- + \mu^-)z_3(v) - \lambda][(\mu + \lambda^- v)z_3^2(v) - (\mu + \lambda + \lambda^-)z_3(v) + \lambda]} \times \\ &\left. \times \frac{z_3^{k+3}(v) + z_3^2(v)m_{k0}(0)(\lambda^- z_3(v) - \lambda)}{\mu(z_3(v) - z_1(0))(z_2(0) - z_3(v))} + \frac{\mu^- G_k(0,v)(\lambda - \lambda^- z_3(v))}{(\mu + \lambda^- v)z_3^2(v) - (\mu + \lambda + \lambda^-)z_3(v) + \lambda}\right], \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{36}$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

При практических расчётах для получения значений средних времён $m_{k,l}(0)$ и $m_{k,l}^-(0)$ при $k \geq 0$, $l \geq 1$ необходимо обращать ПФ, задаваемые выражениями (33)–(36). Учитывая, что средние времена принимают только неотрицательные значения, можно показать, что при $v = 1$ все ПФ, фигурирующие в теореме 3, не превосходят единицы и, значит, для их обращения можно воспользоваться теоремой 2.

Отдельно отметим, что при $v = 0$ в формулах (34) и (36) возникает неопределённость вида $\frac{0}{0}$, которая устраняется по правилу Лопиталя.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложен более эффективный по сравнению с представленным в [6] метод расчёта стационарных характеристик системы с отрицательными заявками, бункером и различными интенсивностями обслуживания.

Для проверки полученных формул была построена с помощью программных средств GPSS имитационная модель, результаты работы которой показали хорошее совпадение с результатами численных расчётов, проведённых по полученным формулам.

В заключении приведём результаты сравнения стационарных характеристики рассматриваемой системы и системы из [2]. В качестве примера возьмём стационарное среднее общее число заявок в системе.

Во всех расчётах интенсивность поступления положительных заявок принимались равной $\lambda = 7$. На рисунке 1 приведены результаты расчёта значения среднего общего числа заявок

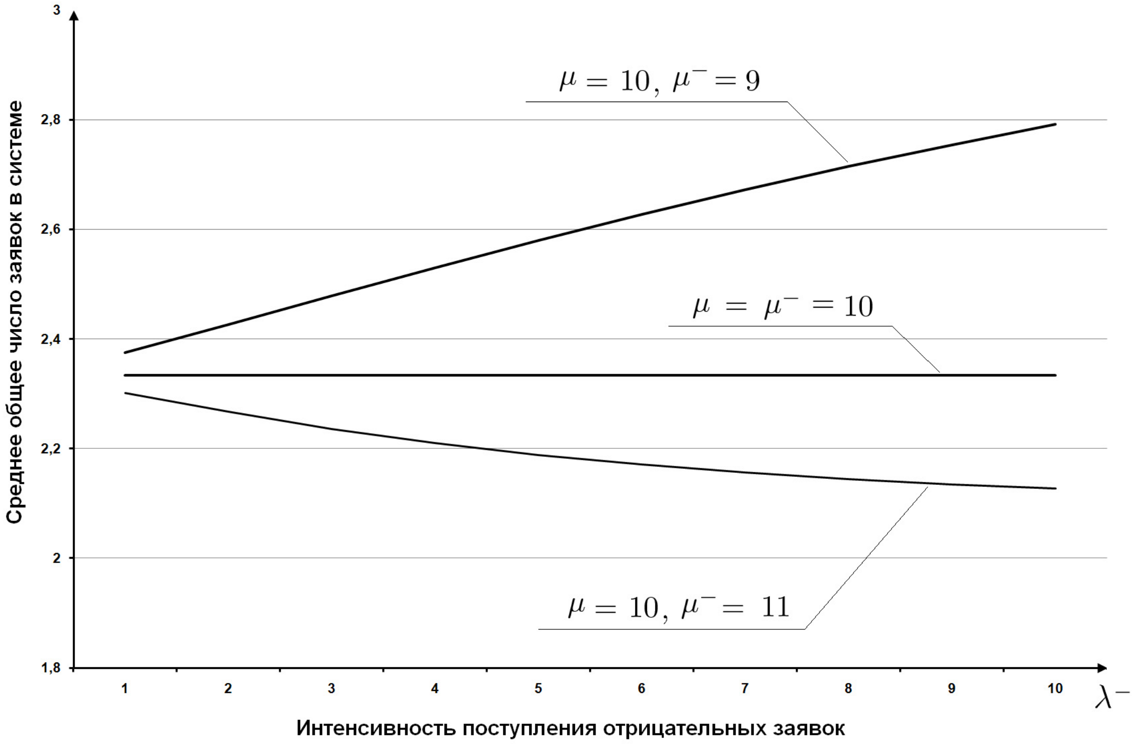

Рис. 1. Зависимость значения среднего общего числа заявок в системе от интенсивности потока отрицательных заявок

в системе при интенсивностях обслуживания заявок из накопителя и бункера равных, во-первых, $\mu = 10$, $\mu^- = 9$, во-вторых, $\mu = \mu^- = 10$, в-третьих, $\mu = 10$, $\mu^- = 11$ и интенсивности потока отрицательных заявок $\lambda^- = \overline{1, 10}$.

Как видно из рисунка 1, при уменьшении интенсивности потока отрицательных заявок значения среднего общего числа заявок в системе при различных интенсивностях обслуживания очень близки и стремятся к значению среднего числа заявок в системе $M|M|1|\infty$ без отрицательных заявок.

Поскольку в системе из [2] среднее общее число заявок в системе не зависит от интенсивности потока отрицательных заявок, то при $\mu = \mu^-$ оно является постоянным. Однако, как только мы вносим даже незначительные различия в интенсивности обслуживания заявок из накопителя и бункера, среднее общее число заявок в системе начинает зависеть от значения λ^-.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство (теоремы 1). Рассмотрим ПФ

$$Q_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} q_k(i) z^i, \quad 0 < z < 1, \quad k \geq 0.$$

Домножая уравнения (2) и (4) на z^i и суммируя по всем значениям $i = 1, 2, \ldots$, получаем:

$$Q_0(z) - q_0(0) = \frac{\mu z}{\mu + \lambda + \lambda^-} Q_0(z) + \frac{\lambda}{(\mu + \lambda + \lambda^-) z} [Q_0(z) - z q_0(1) - q_0(0)]; \qquad (A.1)$$

$$Q_k(z) - q_k(0) = \frac{\mu z}{\mu + \lambda + \lambda^-} Q_k(z) + \frac{\lambda}{(\mu + \lambda + \lambda^-)z} [Q_k(z) - zq_k(1) - q_k(0)] + \\ + \frac{\lambda^- z}{\mu + \lambda + \lambda^-} Q_{k-1}(z), \quad i \geq 1. \tag{A.2}$$

Подставляя в (A.1) и (A.2) вместо $q_0(1)$ и $q_k(1)$ их выражения через $q_0(0)$ и $q_k(0)$ из уравнений (1) и (3), имеем:

$$Q_0(z) = \frac{(\lambda - \lambda^- z)\, q_0(0) - \mu z}{\mu z^2 - (\mu + \lambda + \lambda^-)z + \lambda}, \quad k = 0; \tag{A.3}$$

$$Q_k(z) = \frac{(\lambda - \lambda^- z)\, q_k(0) - \lambda^- z^2 Q_{k-1}(z)}{\mu z^2 - (\mu + \lambda + \lambda^-)z + \lambda}, \quad k \geq 1. \tag{A.4}$$

Введём ПФ

$$P(z, v) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z) v^k, \quad 0 < v < 1.$$

Домножая (A.3) и (A.4) на v в соответствующей степени и суммируя по всем значениям k, получаем:

$$P(z, v) = \frac{(\lambda - \lambda^- z) P(0, v) - \mu z}{(\mu + \lambda^- v) z^2 - (\mu + \lambda + \lambda^-)z + \lambda}. \tag{A.5}$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$(\mu + \lambda^- v) z^2 - (\mu + \lambda + \lambda^-)z + \lambda = 0.$$

Это уравнение имеет два решения

$$z_{1,2} = z_{1,2}(v) = \frac{(\mu + \lambda + \lambda^-) \mp \sqrt{(\mu + \lambda + \lambda^-)^2 - 4(\mu + \lambda^- v)\lambda}}{2(\mu + \lambda^- v)},$$

причем $0 < z_1 < 1 < z_2$. Тогда, поскольку $P(z, v)$ является аналитической функцией в области $\{0 < z < 1,\ 0 < v < 1\}$, то числитель должен обращаться в нуль в точке $z = z_1$, т. е.

$$P(0, v) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(0) v^k = \frac{\mu z_1}{\lambda - \lambda^- z_1}. \tag{A.6}$$

Итак, ПФ $A(v)$ вероятностей $q_k = q_k(0)$ имеет вид (A.6), что доказывает первое утверждение теоремы 1.

Перейдём к нахождению ПФ вероятностей q_k^-. Введём ПФ

$$Q_k^-(z) = \sum_{i=0}^{\infty} q_k^-(i) z^i, \quad 0 < z < 1, \quad k \geq 0.$$

Домножая уравнения (6) и (8) на z^i и суммируя по всем значениям $i = 1, 2, \ldots$, получаем:

$$Q_0^-(z) - q_0^-(0) = \frac{\mu^- z}{\mu^- + \lambda + \lambda^-} Q_0(z) + \frac{\lambda}{(\mu^- + \lambda + \lambda^-)z} [Q_0^-(z) - zq_0^-(1) - q_0^-(0)]; \tag{A.7}$$

$$Q_k^-(z) - q_k^-(0) = \frac{\mu^- z}{\mu^- + \lambda + \lambda^-} Q_k(z) + \\ + \frac{\lambda}{(\mu^- + \lambda + \lambda^-)z} [Q_k^-(z) - zq_k^-(1) - q_k^-(0)] + \frac{\lambda^- z}{\mu^- + \lambda + \lambda^-} Q_{k-1}^-(z), \quad k \geq 1. \tag{A.8}$$

Подставляя в (A.7) и (A.8) вместо $q_0^-(1)$ и $q_k^-(1)$ их значения через $q_0^-(0)$ и $q_k^-(0)$ из уравнений (5) и (7), имеем:

$$Q_0^-(z) - q_0^-(0) = \frac{\mu^- z}{\mu^- + \lambda + \lambda^-} Q_0(z) + \\ + \frac{\lambda}{(\mu^- + \lambda + \lambda^-)z} \left[Q_0^-(z) + z\Big(\frac{\mu^-}{\lambda} - \frac{\mu^- + \lambda}{\lambda} q_0^-(0)\Big) - q_0^-(0)\right];$$

$$Q_k^-(z) - q_k^-(0) = \frac{\mu^- z}{\mu^- + \lambda + \lambda^-} Q_k(z) + \\ + \frac{\lambda}{(\mu^- + \lambda + \lambda^-)z}\left[Q_k^-(z) - z\frac{\mu^- + \lambda}{\lambda} q_k^-(0) - q_k^-(0)\right] + \frac{\lambda^- z}{\mu^- + \lambda + \lambda^-} Q_{k-1}^-(z), \quad k \ge 1,$$

откуда после приведения подобных слагаемых приходим к следующим выражениям:

$$Q_0^-(z) = \frac{\mu^- z + \mu^- z^2 Q_0(z) + q_0^-(0)(\lambda^- z - \lambda)}{(\mu^- + \lambda + \lambda^-)z - \lambda}, \quad k = 0; \tag{A.9}$$

$$Q_k^-(z) = \frac{q_k^-(0)(\lambda^- z - \lambda) + \mu^- z^2 Q_k(z) + \lambda^- z^2 Q_{k-1}^-(z)}{(\mu^- + \lambda + \lambda^-)z - \lambda}, \quad k \ge 1. \tag{A.10}$$

Введём ПФ

$$P^-(z, v) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^-(z) v^k, \quad 0 < v < 1.$$

Домножая уравнения (A.9) и (A.10) на v в соответствующей степени, получаем после суммирования:

$$P^-(z, v) = \frac{(\lambda - \lambda^- z)P^-(0, v) - \mu^- z^2 P(z, v) - \mu^- z}{\lambda^- v z^2 - (\mu^- + \lambda + \lambda^-)z + \lambda}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\lambda^- v z^2 - (\mu^- + \lambda + \lambda^-)z + \lambda = 0.$$

Это уравнение имеет два решения

$$z_{3,4} = z_{3,4}(v) = \frac{(\mu^- + \lambda + \lambda^-) \mp \sqrt{(\mu^- + \lambda + \lambda^-)^2 - 4\lambda\lambda^- v}}{2\lambda^- v},$$

причём $0 < z_3 < 1 < z_4$ при $0 < v \le 1$. Поскольку $P^-(z, v)$ является аналитической функцией в области $\{0 < z < 1,\ 0 < v < 1\}$, числитель должен обращаться в нуль в точке $z = z_3$, т. е.

$$P^-(0, v) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k^-(0) v^k = \frac{\mu^- z_3^2 P(z_3, v) + \mu^- z_3}{\lambda - \lambda^- z_3}. \tag{A.11}$$

Подставляя в (A.11) выражение для $P(z_3, v)$, определяемое (A.5), получаем формулу для ПФ $B(v)$, фигурирующую во втором утверждении теоремы 1. Таким образом, теорема 1 доказана.

Доказательство (теоремы 3). Докажем сначала формулу (29). Запишем уравнения (13) и (14) в терминах ПФ

$$M_{00}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{00}(i) z^i, \quad 0 < z < 1.$$

После стандартных преобразований, которые здесь не приводятся, имеем:

$$M_{00}(z) = \frac{\lambda}{\mu(\lambda - \lambda^- z_1(0))(z_2(0) - z)},$$

откуда после обращения находятся все $m_{00}(i)$ в удобном для расчётов виде:

$$m_{00}(i) = \frac{\lambda}{\mu(\lambda - \lambda^- z_1(0)) z_2^{i+1}(0)}, \quad i \geq 0.$$

Для доказательства (30) введём ПФ

$$M_{00}^-(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{00}^-(i) z^i, \quad 0 < z < 1.$$

Домножая уравнения (15) и (16) на z^i и суммируя по всем значениям i получаем:

$$M_{00}^-(z) = \frac{(\lambda^- z - \lambda) m_{00}^-(0) + z + \mu^- z^2 M_{00}(z)}{(\lambda + \lambda^- + \mu^-) z - \lambda}.$$

Знаменатель в правой части последнего равенства обращается в нуль в точке $z_7 = \lambda/(\lambda + \lambda^- + \mu^-)$, причём $0 < z_7 < 1$. Учитывая, что ПФ $M_{00}^-(z)$ является аналитической функцией в области $\{0 < z < 1\}$, в точке $z = z_7$ в нуль должен обращаться и числитель. Отсюда, учитывая вид $M_{00}(z)$, находится $m_{00}^-(0)$ в виде (30).

Перейдём к доказательству (31). Уравнения (17) и (18) в терминах ПФ

$$M_{k0}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{k0}(i) z^i, \quad 0 < z < 1, \quad k \geq 1$$

имеют вид:

$$M_{k0}(z) = \frac{z^{k+1} + m_{k0}(0)(\lambda^- z - \lambda)}{\mu[(z - z_1(0)][z_2(0) - z]}, \quad k \geq 1. \tag{A.12}$$

Отсюда, учитывая, что $0 < z_1(0) < 1 < z_2(0)$, и используя свойство аналитичности ПФ $M_{k0}(z)$ в области $\{0 < z < 1\}$, получаем, что числитель должен обращаться в нуль в точке $z = z_1(0)$, т. е. $m_{k0}(0)$ задаётся формулой (31).

Для доказательства (32) введём ПФ

$$M_{k0}^-(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{k0}^-(i) z^i, \quad 0 < z < 1, \quad k \geq 1.$$

Выражая в этой ПФ $m_{k0}^-(i)$ через их значения по формулам (19) и (20), после обычных преобразований приходим к выражению:

$$M_{k0}^-(z) = \frac{m_{k0}^-(0)(\lambda^- z - \lambda) + z^{k+1} + \mu^- z^2 M_{k0}(z)}{(\lambda + \lambda^- + \mu^-) z - \lambda}, \quad k \geq 1.$$

Знаменатель в правой части $M_{k0}^-(z)$ обращается в нуль в точке $z = z_7$. Значит, по свойству аналитичности в этой точке в нуль должен обращаться и числитель, т. е.

$$m_{k0}^-(0) = \frac{z_7^k + \mu^- z_7 M_{k0}(z_7)}{\lambda + \mu^-}, \quad k \geq 1.$$

Подставляя в последнее равенство значение $M_{k0}(z_7)$, выраженное по формуле (A.12), получаем (32).

Доказательство формулы (33) начнём с того, что запишем уравнения (21) и (22) в терминах ПФ

$$M_{0l}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{0l}(i) z^i, \quad 0 < z < 1, \quad l \geq 1.$$

Домножая уравнения (21) и (22) на z^i и суммируя по всем значениям i, имеем

$$M_{0l}(z) = \frac{m_{0l}(0)(\lambda - \lambda^- z) - \lambda^- z^2 M_{0,l-1}(z)}{\mu z^2 - (\lambda + \lambda^- + \mu)z + \lambda}, \quad l \geq 1.$$

Теперь введём ПФ

$$G_0(z,v) = \sum_{l=1}^{\infty} M_{0l}(z) v^{l-1}, \quad 0 < v < 1,$$

которая с учётом формулы для $M_{0l}(z)$ после преобразований приводится к виду:

$$G_0(z,v) = \frac{G_0(0,v)(\lambda - \lambda^- z) - \lambda^- z^2 M_{00}(z)}{(\mu + \lambda^- v)z^2 - (\mu + \lambda + \lambda^-)z + \lambda}.$$

Знаменатель в правой части $G_0(z,v)$ обращается в нуль в точках $z = z_1(v)$ и $z = z_2(v)$, поэтому по свойству аналитичности в точке $z = z_1(v)$ в нуль должен обращаться и числитель в правой части $G_0(z,v)$. Учитывая это, приходим к выражению для $m_{0l}(0)$ в терминах ПФ $G_0(0,v)$ в виде (33).

Докажем формулу (34). Решение уравнений (23) и (24) в терминах ПФ

$$M^-_{0l}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m^-_{0l}(i) z^i, \quad 0 < z < 1, \quad l \geq 1,$$

имеет вид:

$$M^-_{0l}(z) = \frac{m^-_{0l}(0)(\lambda^- z - \lambda) + \lambda^- z^2 M^-_{0,l-1}(z) + \mu^- z^2 M_{0l}(z)}{(\lambda + \mu^- + \lambda^-)z - \lambda}, \quad l \geq 1.$$

Введём ПФ

$$G^-_0(z,v) = \sum_{l=1}^{\infty} M^-_{0l}(z) v^{l-1}, \quad 0 < v < 1.$$

Учитывая формулу для $M^-_{0l}(z)$, после обычных для ПФ преобразований получаем:

$$G^-_0(z,v) = \frac{G^-_0(0,v)(\lambda^- z - \lambda) + \lambda^- z^2 M^-_{00}(z) + \mu^- z^2 G_0(z,v)}{-\lambda^- z^2 v + (\mu^- + \lambda + \lambda^-)z - \lambda}.$$

Заметим, что знаменатель в правой части $G^-_0(z,v)$ обращается в нуль в точках $z = z_3(v)$ и $z = z_4(v)$. Отсюда, используя свойство аналитичности ПФ в области $\{0 < z < 1\}$, приходим к следующему выражению для $m^-_{0l}(0)$ в терминах ПФ:

$$G^-_0(0,v) = \sum_{l=1}^{\infty} m^-_{0l}(0) v^{l-1} = \frac{\lambda^- z_3^2(v) M^-_{00}(z_3(v)) + \mu^- z_3^2(v) G_0(z_3(v), v)}{\lambda - \lambda^- z_3(v)}.$$

Подставляя в последнее равенство уже найденные выражения для $M^-_{00}(z_3(v))$ и $G_0(z_3(v), v)$ получаем формулу (34).

Перейдём к доказательству (35) и (36). Рассмотрим уравнения (25) и (26). Записывая эти уравнения в терминах ПФ

$$M_{kl}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{kl}(i) z^i, \quad 0 < z < 1, \quad k \geq 1, \quad l \geq 1,$$

получаем:

$$M_{kl}(z) = \frac{m_{kl}(0)(\lambda - \lambda^- z) - \lambda^- z^2 M_{k,l-1}(z)}{\mu z^2 - (\lambda + \lambda^- + \mu)z + \lambda}, \quad k \geq 1, \quad l \geq 1.$$

Введём ПФ

$$G_k(z,v) = \sum_{l=1}^{\infty} M_{kl}(z)v^{l-1}, \quad 0 < v < 1, \quad k \geq 1,$$

которая после приведения подобных слагаемых приводится к виду

$$G_k(z,v) = \frac{G_k(0,v)(\lambda - \lambda^- z) - \lambda^- z^2 M_{k0}(z)}{(\mu + \lambda^- v)z^2 - (\mu + \lambda + \lambda^-)z + \lambda}, \quad k \geq 1.$$

Замечая, что в точке $z = z_1(v) \in (0,1)$ знаменатель в правой части предыдущего выражения обращается в нуль, из свойства аналитичности ПФ $G_k(z,v)$ следует, что числитель также должен обращаться в нуль в этой точке. Отсюда получаем, что $m_{kl}(0)$ в терминах ПФ имеет вид:

$$G_k(0,v) = \sum_{l=1}^{\infty} m_{kl}(0)v^{l-1} = \frac{\lambda^- z_1^2(v) M_{k0}(z_1(v))}{\lambda - \lambda^- z_1(v)}, \quad k \geq 1.$$

Подставляя в последнее равенство найденное ранее выражение для $M_{k0}(z_1(v))$, получаем (35).

Наконец обратимся к последним рекуррентным соотношениям (27) и (28), которые, так же как и все предыдущие, получим терминах ПФ. Положим

$$M_{kl}^-(z) = \sum_{i=0}^{\infty} m_{kl}^-(i)z^i, \quad 0 < z < 1, \quad k \geq 1, \quad l \geq 1.$$

После традиционных для ПФ выкладок, которые здесь не приводятся, имеем:

$$M_{kl}^-(z) = \frac{m_{kl}^-(0)(\lambda^- z - \lambda) + \lambda^- z^2 M_{k,l-1}^-(z) + \mu^- z^2 M_{kl}(z)}{(\lambda + \mu^- + \lambda^-)z - \lambda}, \quad k \geq 1, \quad l \geq 1.$$

Теперь введём ПФ

$$G_k^-(z,v) = \sum_{l=1}^{\infty} M_{kl}^-(z)v^{l-1}, \quad 0 < v < 1, \quad k \geq 1,$$

которая после упрощения приводится к виду

$$G_k^-(z,v) = \frac{G_k^-(0,v)(\lambda^- z - \lambda) + \lambda^- z^2 M_{k0}^-(z) + \mu^- z^2 G_k(z,v)}{-\lambda^- z^2 v + (\mu^- + \lambda + \lambda^-)z - \lambda}, \quad k \geq 1.$$

Используя те же рассуждения по поводу нулей числителя и знаменателя ПФ $G_k^-(z,v)$, получаем значение $m_{kl}^-(0)$ в терминах ПФ:

$$G_k^-(0,v) = \sum_{l=1}^{\infty} m_{kl}^-(0)v^{l-1} = \frac{\lambda^- z_3^2(v) M_{k0}^-(z_3(v)) + \mu^- z_3^2(v) G_k(z_3(v),v)}{\lambda - \lambda^- z_3(v)}, \quad k \geq 1.$$

Подставляя в $G_k^-(0,v)$ уже известный вид $M_{k0}^-(z_3(v))$ и $G_k(z_3(v),v)$, после приведения подобных слагаемых получаем (36). Таким образом, теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tien Van Do. An initiative for a classified bibliography on G-networks. *Performance Evaluation*, 2011, vol. 68, № 4, pp. 385–394.

2. Мандзо Р., Касконе Н., Разумчик Р.В. Экспоненциальная система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок. *Автоматика и телемеханика*, 2008, № 9, стр. 103–113.

3. Печинкин А.В., Разумчик Р.В. О времени ожидания при некоторых дисциплинах обслуживания в системе с отрицательными заявками и бункером. *Queues: Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference "Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks"*, 2011, pp. 207–212.

4. Печинкин А.В, Разумчик Р.В. Система массового обслуживания с отрицательными заявками и бункером для вытесненных заявок в дискретном времени. *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 12, стр. 109–120.

5. Pechinkin A.V., Razumchik R.V. Waiting Characteristics of Queueing System $Geo|Geo|1$ with Negative Claims and a Bunker for Superseded Claims in Discrete Time. *Proceedings of the 2010 International Conference on Ultra Modern Telecommunications*, 2010, pp. 1051–1055.

6. Разумчик Р.В. Система массового обслуживания с отрицательными заявками, бункером для вытесненных заявок и различными интенсивностями обслуживания. *Информатика и ее применения*, 2011, том 5, вып. 3, стр. 39–43.

7. Abate J., Whitt W. Numerical inversion of probability generating functions. *Operations Research Letters 12*, 1992, pp. 245–251.

8. Ramaswami V. A stable recursion for the steady state vector in markov chains of M|G|1 type. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 1988, vol. 4,№ 1, pp. 183–188.

9. Neuts M.F. *Structured Stochastic Matrices of M-G-1 Type and Their Applications.* Pure and Applied a Series of Textbooks and Reference Books, Marcel Dekker, 1989, № 5.

10. Бочаров П.П., Печинкин А.В. *Теория массового обслуживания.* М.: Изд-во РУДН, 1995.