Информационные процессы, Том 13, № 3, 2013, стр. 141–170.

Гиббсовские случайные поля на решетке. Определения, существование, единственность и фазовые переходы (обзор трудов семинара по статистической физике, Механико-Математический факультет Московского Университета, 1962–1994 годы)[1]

Р.А. Минлос, Е.А. Печерский, С.А. Пирогов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Российская академия наук, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 13.08.2013

Аннотация—Московский большой семинар по статистической физике является одним из первых в мире, работа которого была посвящена строгим методам в статистической физике. Публикации руководителей семинара (Р.Л. Добрушин, В.А. Малышев, Р.А. Минлос, Я.Г. Синай) в достаточно полной мере дают представление о достижениях работы семинара. В этой статье предлагается обзор (далеко не полный) трудов семинара. Главной упор в этой статье сделан на описании основополагающих определениях и важнейших результатах.

Ключевые слова: стохастическая физика, решетка, фазовые переходы

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Семинар по статистической физике открылся на механико-математическом факультете МГУ осенью 1962 года и просуществовал до весны 1994 года. Первыми его руководителями были Р.Л. Добрушин и Р.А. Минлос, вскоре к ним присоединился Я.Г. Синай и через несколько лет – В.А. Малышев. Первые годы ушли на освоение основных понятий и методов статистической физики, но уже с 1965 года появляются серьезные и глубокие результаты участников семинара. Вскоре семинар завоевал мировую известность и на нем стремились выступить многие математики из различных стран мира. В течение более чем тридцатилетней работы семинара его участниками было выполнено огромное число первоклассных работ по математической физике, так или иначе связанных с его тематикой. Эти работы и проблемы, разбиравшиеся на семинаре, оказывали значительное влияние на общее развитие математической физики в эти годы. Следует сказать, что математическая физика в последние десятилетия прошлого века развивалась чрезвычайно интенсивно: были выработаны новые подходы к изучению разнообразных моделей, введено много универсальных понятий и обнаружен ряд тонких математических явлений, касающихся этих моделей. По своим подходам и методам, математическая физика разделена ныне на несколько направлений, которые вкратце можно обозначить как “аналитическое”, “алгебраическое” и “вероятностное”. Работа нашего семинара в основном протекала в “вероятностном” русле, хотя изредка в его тематику вплетались и фрагменты других направлений. Темы, разбиравшиеся на семинаре, были

[1] Краткая версия этого обзора была опубликована в *Eur. Phys. J. H*, 2012, vol. 37, no. 4.

очень разнообразны: квантовая теория поля, ренорм-группа, гидродинамические уравнения, динамика бесконечного газа, спектральный анализ трансфер-матриц и т.д. Но самым главным сюжетом, составлявшим лейтмотив всей многолетней работы семинара, были исследования по гиббсовским случайным полям (определенным на бесконечном множестве – пространстве $\mathbb{R}^d$ или решетке $\mathbb{Z}^d$), а именно: определение таких полей, вопросы их существования, их свойства, критерии единственности, описание случаев неединственности (фазовые переходы) и т.д. В настоящей статье мы излагаем краткий обзор результатов о гиббсовских полях, принадлежащих участникам семинара. Сообразно этому мы очень редко упоминаем результаты ученых, непосредственно не связанных с семинаром.

Мы ограничились здесь случаем полей на бесконечном дискретном множестве, чаще всего на d-мерной решетке $\mathbb{Z}^d$. Гиббсовские (точечные) поля в непрерывном пространстве – это отдельная параллельная тема, которую мы здесь не затрагиваем.

Возможно, что уровень изложения в этой статье кому-то покажется чересчур абстрактным (хотя мы приводим много конкретных примеров и поясняющих замечаний). Но таков был уровень нашего семинара и всякое его "облегчение" выглядело бы профанацией.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСОВСКОГО ПОЛЯ

2.1. Гиббсовские поля в конечном объеме

Пусть T – счетное множество и S – некоторое пространство с мерой ν (спиновое пространство). Для любого подмножества $\Lambda \subseteq T$ через $\Omega_\Lambda = S^\Lambda$ обозначим пространство всех функций (конфигураций в множестве Λ)

$$\sigma_\Lambda : \Lambda \to S, \tag{2.1}$$

определенных на Λ со значениями в S (эти значения часто называют "спинами"). В случае $\Lambda = T$ пространство Ω_T и конфигурации σ_T будем просто обозначать Ω и σ. В случае конечного Λ пространство Ω_Λ снабдим мерой ν_Λ, равной произведению $|\Lambda|$ экземпляров меры ν ($|\Lambda|$ - число элементов в Λ). Функцию $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$, определенную на Ω, с вещественными значениями (и, быть может, со значением $+\infty$), называют *локальной*, если существует такое конечное подмножество $A \subset T$, что $\varphi(\sigma)$ зависит только от сужения $\sigma|_A$ конфигурации σ на множество A. Наименьшее такое A (в смысле упорядоченности подмножеств по вложению) называют *носителем* функции φ. Часто пишут φ_A, где A – носитель локальной функции, и несколько вольно $\varphi_A(\sigma|_A)$ для значений $\varphi_A(\sigma)$ этой функции.

Пусть далее задано семейство локальных функций

$$\{V_A, A \subset T, |A| < \infty\}, \tag{2.2}$$

носители которых пробегают все конечные подмножества T. Такое семейство назовем *потенциалом* взаимодействия и для любого конечного подмножества $\Lambda \subset T$ рассмотрим сумму

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda) = \sum_{A \subseteq \Lambda} V_A(\sigma_\Lambda|_A), \quad \sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda \tag{2.3}$$

($\sigma_\Lambda|_A$ сужение конфигурации σ_Λ на подмножество $A \subseteq \Lambda$). Функцию H_Λ обычно называют *энергией* взаимодействия конфигурации σ_Λ.

Введем теперь *распределение Гиббса* G_Λ, $\Lambda \subset T$, как распределение вероятностей на пространстве Ω_Λ для конечного подмножества $\Lambda \subset T$, задаваемое потенциалом $\{V_A, A \subset T\}$. Оно определяется формулой

$$\frac{dG_\Lambda}{d\nu^\Lambda}(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda} \exp\{-H_\lambda(\sigma_\Lambda)\}, \quad \sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda, \tag{2.4}$$

при условии, что нормирующий множитель Z_Λ (*статистическая сумма*):

$$Z_\Lambda = \int\limits_{\Omega_\Lambda} \exp\{-H_\Lambda(\sigma_\Lambda)\} d\nu_\Lambda(\sigma_\Lambda) \tag{2.5}$$

отличен от нуля и бесконечности

$$0 < Z_\Lambda < \infty. \tag{2.6}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что условие (2.6) (называемое часто условием *устойчивости* распределение G_Λ) выполнено для всех конечных подмножеств $\Lambda \subset T$.

Вот наиболее простые примеры описанных выше систем; во всех этих примерах $T = \mathbb{Z}^d$ (d – мерная кубическая решетка); параметр β (т.н. *обратная температура*) положителен.

I. Модель Изинга:

здесь $S = \{-1, 1\}$, $\nu(\{-1\}) = \nu(\{1\}) = 1$

$$V_A(\sigma) = \begin{cases} \beta h \sigma(t), & \text{если } A = \{t\},\ t \in \mathbb{Z}^d, \\ \beta \varepsilon \sigma(t_1)\sigma(t_2), & \text{если } A = \{t_1, t_2\},\ |t_1 - t_2| = 1, \\ 0, & \text{при остальных } A \subset T, \end{cases} \tag{2.7}$$

(здесь h – т.н. “*магнитная напряженность*”, ε – *энергия взаимодействия* соседних спинов; для любого вектора $t = \{t^{(1)}, \ldots, t^d\} \in \mathbb{Z}^d$ норма $|t| \equiv \sum\limits_{i=1}^{d} |t^{(i)}|$). В случае $\varepsilon < 0$ говорят о *ферромагнитной* модели Изинга, а при $\varepsilon > 0$ об *антиферромагнитной*.

II. Решетчатый газ:

$$S = \{0, 1\}, \quad \nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = 1,$$

$$V_A(\sigma) = \begin{cases} \beta \mu \sigma(t), & \text{если } A = \{t\},\ t \in \mathbb{Z}^d, \\ \beta \varphi(t_1 - t_2)\sigma(t_1)\sigma(t_2), & \text{если } A = \{t_1, t_2\},\ t_1 \neq t_2, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.8}$$

(μ – *химический потенциал*, $\varphi(t_1 - t_2)$ – *энергия взаимодействия* двух частиц, находящихся в точках $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^d$).

III. Модель ротаторов:

$S = O_1$ – единичная окружность, ν – обычная длина дуги на O_1,

$$V_A(\sigma) = \begin{cases} \beta \varepsilon \cos(\sigma(t_1) - \sigma(t_2)), & \text{если } \sigma(t_1), \sigma(t_2) \in O_1, \\ & \text{и} \quad A = \{t_1, t_2\}, |t_1 - t_2| = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.9}$$

IV. Решетчатая модель квантового бозонного поля:

$S = R^1$, ν – обычная мера Лебега на прямой,

$$V_A(\sigma) = \begin{cases} \beta \sigma^4(t) + m\sigma^2(t), & \text{если } A = \{t\}, \\ (\sigma(t_1) - \sigma(t_2))^2 & \text{если } A = \{t_1, t_2\},\ |t_1 - t_2| = 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2.10}$$

где параметры β и m – положительны.

2.2. Гиббсовское поле в бесконечном объеме

Перейдем теперь к определению гиббсовского поля (распределения на Ω) во всем множестве T.

Имеется два формально различных способа определить такое распределение. Первый из них состоит в следующем: распределение вероятностей G на Ω называет *предельным* гиббсовским распределением, задаваемым потенциалом $\{V_A, A \subset T\}$, если существует возрастающая последовательность $\{\Lambda_n, n = 1, 2, \ldots\}$ конечных подмножеств Т

$$\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots \subset \Lambda_n \subset \ldots, \tag{2.11}$$

заполняющих все Т:

$$\bigcup_n \Lambda_n = T,$$

(условимся для такой последовательности писать: $\Lambda_n \nearrow T, n \to \infty$) такая, что последовательность гиббсовских распределений

$$\{G_{\Lambda_n}, n = 1, 2, \ldots\},$$

(задаваемых одним и тем же потенциалом) слабо сходится к распределению G. Последнее означает, что для любой ограниченной локальной функции φ_A ее средние

$$\langle \varphi_A \rangle_{G_{\Lambda_n}} \to \langle \varphi_A \rangle_G, \quad n \to \infty, \tag{2.12}$$

(здесь и в дальнейшем $\langle\rangle_p$ означает среднее по распределению вероятностей p). Разумеется, что среднее $\langle \varphi_A \rangle_{G_{\Lambda_n}}$ корректно определено лишь для тех n для которых $A \subset \Lambda_n$.

Это определение было введено Р.А. Минлосом в работах [1], [2] (в этих работах рассматривалась модель непрерывного газа).

Как мы увидим ниже, введенное определение не охватывает всех распределений вероятностей на Ω, которые было бы естественно также считать гиббсовскими распределениями, соответствующими данному потенциалу $\{V_A\}$. И вскоре после работ Р.А.Минлоса, Р.Л.Добрушин в работах [4, 5, 6, 7] предложил другой способ определения предельных гиббсовских полей. Несколько позже и независимо к такому определению пришли Д. Рюель и О. Ланфорд [8] и с тех пор этот способ обозначается аббревиатурой *DLR*. В большом цикле работ (см. [9, 10, 14, 18, 19, 20]) Р.Л. Добрушин и его сотрудники и ученики тщательно исследовали понятие гиббсовского предельного поля (в *DLR*-смысле) и связанные с ним вопросы, но об этом ниже.

Итак, переходим к *DLR* определению предельного гиббсовского поля (порожденного некоторым фиксированным потенциалом $\{V_A, A \subset T\}$). Для каждого множества $\Lambda \subset T$ через $\Lambda' = T \setminus \Lambda$ будем обозначать его дополнение в T. Пусть $\Lambda \subset T$ конечное подмножество T и $\overline{\sigma}_{\Lambda'} \in \Omega_{\Lambda'}$ конфигурация, определенная на его дополнении, которую мы будем называть *внешней* или *граничной* конфигурацией относительно Λ. Величина

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda|\overline{\sigma}_{\Lambda'}) = \sum_{A:A\cap\Lambda\neq\varnothing} V_A(\sigma_\Lambda \sqcup \overline{\sigma}_{\Lambda'}|_A), \tag{2.13}$$

при условии, что ряд в правой части (2.13) сходится абсолютно, называется *энергией взаимодействия конфигурации σ в присутствии граничной конфигурации $\overline{\sigma}_{\Lambda'}$*. Через $\sigma_{\Lambda_1} \sqcup \sigma_{\Lambda_2}$, где Λ_1, Λ_2 – два непересекающихся множества, обозначена конфигурация $\sigma_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} \in \Omega_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}$, сужение которой на каждое из множеств Λ_1 и Λ_2 совпадает с σ_{Λ_1} и σ_{Λ_2} соответственно.

Сообразно с определением (2.4) введем распределение вероятностей $G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}}$ на пространстве Ω_Λ по формуле

$$\frac{dG_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}}}{d\nu^\Lambda}(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda(\bar\sigma_{\Lambda'})} \exp\{-H_\Lambda(\sigma_\Lambda|\bar\sigma_{\Lambda'})\}. \tag{2.14}$$

Здесь мы снова предполагаем, что статистическая сумма $Z_\Lambda(\bar\sigma_{\Lambda'})$ (определяемая аналогично (2.5)) удовлетворяет условию

$$0 < Z_\Lambda(\bar\sigma_{\Lambda'}) < \infty \tag{2.15}$$

для всех Λ и $\bar\sigma_{\Lambda'}$.

Распределение (2.14) называют *распределением Гиббса в Λ при граничной конфигурации $\bar\sigma_{\Lambda'}$*. Совокупность всех таких распределений $\mathfrak{S} = \{G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}}, \Lambda \subset T, \bar\sigma_{\Lambda'} \in \Omega_{\Lambda'}\}$ при всевозможных Λ и $\bar\sigma_{\Lambda'}$ и фиксированном потенциале $\{V_A\}$ называют обычно *спецификацией*, порожденной этим потенциалом. Для единообразия языка распределение Гиббса, введенного ранее формулой (1.4), называют распределением с "пустой" граничной конфигурацией.

Заметим, что распределения $G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}} \in \mathfrak{S}$ из спецификации $\mathfrak{S}$ удовлетворяют следующему условию согласованности. Пусть $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ – два конечных подмножества T и $\bar\Lambda = \Lambda_2 \setminus \Lambda_1$. Пусть далее $\bar\sigma_{\bar\Lambda}$ – конфигурация, определенная в "зазоре" $\bar\Lambda$ между Λ_2' и Λ_1. Рассмотрим условное распределение

$$G_{\Lambda_2,\bar\sigma_{\Lambda_2'}}(\cdot|\bar\sigma_{\bar\Lambda}),$$

определенное на пространстве Ω_{Λ_1} и порожденное распределением $G_{\Lambda_2,\bar\sigma_{\Lambda_2'}}$ в большем множестве, при условии, что фиксирована конфигурация $\bar\sigma_{\bar\Lambda}$. Тогда, как можно без труда подсчитать, это условное распределение совпадает с гиббсовским распределением в Λ_1 с граничной конфигурацией $\bar\sigma_{\Lambda_2'} \cup \bar\sigma_{\bar\Lambda}$:

$$G_{\Lambda_2,\bar\sigma_{\Lambda_2'}}(\cdot|\bar\sigma_{\bar\Lambda}) = G_{\Lambda_1,\bar\sigma_{\Lambda_2'}\sqcup\bar\sigma_{\bar\Lambda}}(\cdot). \tag{2.16}$$

Это условие согласованности позволяет ввести следующее определение: распределение G на пространстве Ω называют *гиббсовским* (или предельным гиббсовским) распределением, порожденным потенциалом $\{V_A\}$, если для любого конечного $\Lambda \subset T$ и любой граничной конфигурации $\bar\sigma_{\Lambda'}$ условное распределение $G(\cdot|\bar\sigma_{\Lambda'})$ на пространстве Ω_Λ совпадает с гиббсовским распределением в Λ при граничной конфигурации $\bar\sigma_{\Lambda'}$:

$$G(\cdot|\bar\sigma_{\Lambda'}) = G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}}(\cdot). \tag{2.17}$$

Поскольку для любого распределения вероятностей P на пространстве Ω его условные распределения вида $P(\cdot|\bar\sigma_{\Lambda'})$ при разных Λ удовлетворяют условию согласованности, аналогичному 2.17, условие (2.17) и делает наше определение (2.14) корректным. Для данного гиббсовского распределения G на пространстве Ω систему соотношений (2.17) для всех конечных $\Lambda \subset T$ будем называть DLR-*свойством* этого распределения.

Заметим, и это подтверждается ниже, что среди гиббсовских распределений в смысле DLR-определения (2.17) имеются и такие, которые нельзя представить как предельные распределения Гиббса в смысле (2.12) (т.е. с пустыми граничными конфигурациями). С другой стороны, во всех случаях, когда удается построить предельное гиббсовское распределение на Ω как предел конечных гиббсовских распределений с "пустыми" граничными конфигурациями, оно обладает DLR-свойством, т.е. оказывается гиббсовским в DLR-смысле. Общего утверждения на этот счет, однако, нет. При этом во многих случаях предельные гиббсовские DLR-распределения также являются слабыми пределами конечных гиббсовских распределений в $\Lambda_n \nearrow T$ с теми или иными граничными конфигурациями $\{\bar\sigma_{\Lambda_n'}\}$. Однако таким образом все равно нельзя получить все предельные DLR-распределения, в частности, потому, что выпуклые суммы таких распределений снова оказываются гиббсовскими DLR-распределениями.

В связи с введенными выше определениями 2.12 и 2.17 предельных гиббсовских распределений на пространстве Ω (при фиксированном потенциале $\{V_A\}$) сразу возникает проблема об их существовании. Затем - после того, как построено хотя бы одно предельное гиббсовское поле на Т, возникает вопрос: единственно ли оно или нет? В случае определения 2.12

неединственность может возникать из-за выбора разных последовательностей подмножеств $\Lambda_n \nearrow T$. Однако, во всех случаях, когда удается таким образом построить предельное гиббсовское поле оно оказывается одним и тем же для всех таких последовательностей. В случае DLR-определения (2.16) неединственность действительно может иметь место и поэтому требуются специальные приемы для того, чтобы выяснить единственно ли предельное поле или не единственно. Наконец, в случае, когда обнаружено, что существует несколько предельных гиббсовских полей (при заданном потенциале $\{V_A^0\}$), следует изучить их свойства, структуру множества таких полей, а также описать множество "близких" к $\{V_A^0\}$ потенциалов, для которых эта неединственность сохраняется (т.е. построить т.н. "*фазовую диаграмму*", см.ниже). Все перечисленные здесь вопросы будут разбираться в следующих параграфах.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ ГИББСОВСКИХ ПОЛЕЙ (С "ПУСТЫМИ" ГРАНИЧНЫМИ КОНФИГУРАЦИЯМИ)

В работах В.А. Малышева [22], Я.М. Парка [23] (см.также книгу В.А. Малышева и Р.А. Минлоса [24]) было установлено существование и единственность предельных гиббсовских распределений (вместе с их DLR-свойством) в следующих случаях:

Теорема 3.1 (ограниченный потенциал). *Пусть потенциал $\{V_A, A \subset T\}$ удовлетворяет следующим условиям: существует $\lambda, 0 < \lambda < 1$ так, что для любого $t \in T$*

$$\sum_{\substack{A \subset T: \\ |A|=n \geq 2,\ t \in A}} \sup_{\sigma} |V_A(\sigma)| < c\lambda^n, \tag{3.1}$$

где $c > 0$ – некоторая константа и, кроме того,

$$\sup_t \sup_\sigma |V_{\{t\}}(\sigma)| < \infty. \tag{3.2}$$

Тогда при достаточно малом $c < c_0(\lambda)$:

1. для любой последовательности $\Lambda_n \nearrow T$, $n \to \infty$, существует предел (в смысле (2.12) конечных гиббсовских распределений G_{Λ_n}

$$\lim_{n \in \infty} G_{\Lambda_n} = G, \tag{3.3}$$

и предельное распределение G одно и то же для всех таких последовательностей;

2. распределение G обладает DLR-свойством, т.е. является предельным гиббсовским распределением в DLR-смысле, причем единственным DLR-предельным распределением, порожденным потенциалом $\{V_A\}$.

Из этой теоремы, в частности, следует существование и единственность предельных распределений при малых β для модели Изинга, модели решетчатого газа и модели ротаторов (см. примеры на стр. 143).

При изучении моделей с неограниченным потенциалом (таких, например, как решетчатая модель квантового поля на стр. 143) бывает полезным следующее наблюдение. Пусть потенциал $\{V_A\}$ равен сумме двух других потенциалов

$$V_A = V_A^{(1)} + V_A^{(2)}, \quad A \subset T, \tag{3.4}$$

и $G^{(1)}$ – предельная гиббсовская мера на пространстве Ω, порожденная потенциалом $\{V_A^{(1)}\}$ (и некоторой последовательностью $\Lambda_n \nearrow T$). Для каждого конечного $\Lambda \subset T$ определим меру

$\bar{G}_{\Lambda}^{(2)}$ на Ω по формуле

$$\frac{d\bar{G}_{\Lambda}^{(2)}}{dG^{(1)}}(\sigma) = \frac{1}{\tilde{Z}_{\Lambda}} \exp\{-H_{\Lambda}^{(2)}(\sigma|_{\Lambda})\}, \quad \sigma \in \Omega, \tag{3.5}$$

где $H_{\Lambda}^{(2)}(\sigma_{\Lambda}) = \sum\limits_{A \leq \Lambda} V_A^{(2)}(\sigma_{\Lambda}|_A)$ – энергия конфигурации $\sigma_{\Lambda} \in \Omega_{\Lambda}$, вычисленная по потенциалу $\{V_A^{(2)}\}$, а $\tilde{Z}_{\Lambda}$ – нормирующий множитель

$$\tilde{Z}_{\Lambda} = \int_{\Omega} \exp\{-H_{\Lambda}^{(2)}(\sigma|_{\Lambda})\} d\bar{G}^{(1)}(\sigma),$$

удовлетворяющий, по предположению, неравенствам (2.6). Тогда, если слабый предел (для той же последовательности $\Lambda_n \nearrow T$, $n \to \infty$, что и выше)

$$\bar{G}_{\Lambda_n}^{(2)} \to \bar{G}$$

существует, то он совпадает с предельным гиббсовским распределением, порожденным полным потенциалом $\{V_A\}$ (и по-прежнему последовательностью $\{\Lambda_n\}$).

Мы применим это наблюдение к следующему случаю. Пусть $S = \mathbb{R}^1$, ν – лебеговская мера на $\mathbb{R}^1$ и потенциал $\{V_A\}$ представим в виде суммы (3.4) двух потенциалов, где

$$V_A^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} b_{t,t}\sigma^2(t), & \text{если } A = \{t\} \subset T, \\ b_{t_1 t_2}\sigma(t_1)\sigma(t_2), & \text{если } A = \{t_1 t_2\} \subset T, \ t_1 \neq t_2, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{3.6}$$

$$V_A^{(2)}(\sigma) = \begin{cases} \beta\varphi(\sigma(t)), & \text{если } \ A = \{t\}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Здесь бесконечная матрица $B = \{b_{t_1 t_2}\}$ предполагается положительно-определенной (это означает, что для любой финитной вещественной функции $\{\chi(t), t \in T\}$ на T сумма

$$\sum_{t_1, t_2} b_{t_1 t_2}\chi(t_1)\chi(t_2) > 0 \tag{3.8}$$

– положительна). Функция $\{\varphi(x), x \in R^1\}$ предполагается вещественной ограниченной снизу функцией на R^1. Очевидно, что распределение $G_{\Lambda}^{(1)}$, построенное по потенциалу $\{V_A^{(1)}\}$ на $(R^1)^{\Lambda}$, является гауссовским распределением со средним нуль и матрицей ковариаций, равной $(B_{\Lambda})^{-1}$, где B_{Λ} – сужение матрицы B на Λ:

$$(B_{\Lambda})_{t_1 t_2} = \begin{cases} b_{t_1 t_2}, & \text{если } t_1, t_2 \in \Lambda, \\ 0, & \text{при остальных парах } t_1, t_2. \end{cases} \tag{3.9}$$

Введем еще некоторые предположения относительно матрицы B. Предположим, что на T задана некоторая метрика $\{d(t_1, t_2), t_1 t_2 \in T\}$ так, что

a) $b_{t_1 t_2} = 0$, если $d(t_1 t_2) > d$, где $d > 0$ некоторая константа.

Кроме того,

b) при некотором $0 < \delta < 1$ и при всех $t \in T$

$$\sum_{\substack{t' \in T \\ t' \neq t}} |b_{t,t'}| < \delta b_{t,t} \quad (b_{t,t} > 0 \text{ в силу } (3.8)),$$

c) существуют две константы $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \infty$ такие, что для всех $t \in T$

$$\kappa_1 < b_{t,t} < \kappa_2.$$

Теорема 3.2 (В.А. Малышев, Р.А. Минлос; см. [24]). *При введенных предположениях:*

1) существует обратная к B матрица B^{-1}, также являющаяся положительно определенной; следовательно, определено гауссовское распределение G^{gauss} на $(\mathbb{R}^1)^T$ со средним нуль и матрицей ковариаций B^{-1};

2) для любой последовательности $\{\Lambda_n \nearrow T, n \to \infty\}$ существует предел конечных гауссовских распределений

$$G^{(1)}_{\Lambda_n} \to G^{(1)}, \quad n \to \infty, \tag{3.10}$$

и предельное распределение $G^{(1)}$ на $(\mathbb{R}^1)^T$ совпадает с гауссовским распределением G^{gauss};

3) при достаточно малых $\beta > 0$ для любой последовательности $\{\Lambda_n \nearrow T,\ n \to \infty\}$ существует предел распределений $\bar{G}^{(2)}_{\Lambda_n}$, задаваемых формулой (2.5), в которой $H^{(2)}_{\Lambda}$ определяется по потенциалу (2.8a):

$$\bar{G}^{(2)}_{\Lambda_n} \to G, \ \ n \to \infty, \tag{3.11}$$

и G – является предельным гиббсовским распределением, порождаемым потенциалом $V_A = V_A^{(1)} + V_A^{(2)}$ (и любой последовательностью $\{\Lambda_n \nearrow T,\ n \to \infty\}$);

4) распределение G обладает DLR-свойством, т.е. является предельным гиббсовским распределением в DLR-смысле и при этом единственным предельным DLR-распределением на $(\mathbb{R}^1)^T$, порожденным потенциалом $\{V_A\}$.

Поскольку матрица квадратичной формы

$$\sum_t m\chi^2(t) + \sum_{\substack{t_1 t_2 \\ t_1 \neq t_2}} (\chi(t_1) - \chi(t_2))^2$$

удовлетворяет условиям a), b), c), для модели квантового решетчатого поля (пример 4) выполнены все условия теоремы 3.2 и при малых $\beta > 0$ у этой модели существует и при том единственное предельное гиббсовское поле.

4. КЛАСТЕРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Один из способов доказать приведенные выше теоремы состоит в построении т.н. *кластерных разложений* для мер $\{G_\Lambda\}$. Метод кластерных разложений является некоторой версией теории возмущений, приспособленной для больших (“многокомпонентных”) систем математической физики. Различные модификации этого метода описаны в обзорах В.А. Малышева [22] и Р.Л. Добрушина [25] и книгах В.А. Малышева и Р.А. Минлоса [24], Дж. Глимма и А. Джаффе [26] (см.также работы В.А. Малышева [59], В.А. Малышева и И. Николаева [60]). Здесь – чтобы не усложнять изложение – мы продемонстрируем этот метод и его применение для случая простейшей модели, скажем, модели Изинга (пример 1 на стр. 143). Мы воспользуемся при этом самым простым вариантом кластерного разложения – т.н. “полимерным” разложением, восходящим к работе [28] и подробно изложенным в книге [24].

1. Применим приведенное выше наблюдение и представим потенциал модели Изинга (2.7) в виде суммы

$$V_A = V_A^{(1)} + V_A^{(2)},$$

где

$$V_A^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} \beta h\sigma(t), & \text{при } A = \{t\}, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$
$$V_A^{(2)}(\sigma) = \begin{cases} \beta\varepsilon\sigma(t_1)\sigma(t_2), & \text{при } A = \{t_1, t_2\}, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Очевидно, что при любом конечном $\Lambda \subset T$ мера $G_\Lambda^{(1)}$, построенная по потенциалу $\{V_A^{(1)}\}$, является произведением $|\Lambda|$ экземпляров вероятностной меры $\tilde{\nu}$ на S:

$$\tilde{\nu}(s) = \frac{e^{-\beta hs}}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}}, \quad s = -1, 1.$$

Очевидно, что предельная мера $G^{(1)} = \lim\limits_{\Lambda \nearrow Z^d} G_\Lambda^{(1)}$ существует и является счетным произведением меры $\tilde{\nu}$. Таким образом, распределение $\bar{G}_\Lambda^{(2)}$ на Ω задается формулой (см. (3.5))

$$\frac{d\bar{G}_\Lambda^{(2)}}{dG^{(1)}}(\sigma) = \frac{1}{\tilde{Z}_\Lambda} \exp\left\{ -\beta\varepsilon \sum_{\substack{t_1 t_2 \in \Lambda \\ |t_1 - t_2| = 1}} \sigma(t_1)\sigma(t_2) \right\}, \tag{4.2}$$

где

$$\tilde{Z}_\Lambda = \left\langle \exp\{-\beta\varepsilon \sum_{\substack{t_1 t_2 \in \Lambda \\ |t_1 - t_2| = 1}} \sigma(t_1)\sigma(t_2)\} \right\rangle_{G^{(1)}}. \tag{4.3}$$

2. Выражение, стоящее под знаком $\langle\rangle_{G^{(1)}}$ в (4.3), представимо в виде

$$\exp\left\{ -\beta\varepsilon \sum_{\substack{t_1 t_2 \in \Lambda, \\ |t_1 - t_2| = 1}} \sigma(t_1)\sigma(t_2) \right\} = \prod_{\substack{t_1 t_2 \in \Lambda \\ |t_1 - t_2| = 1}} \left(e^{-\beta\varepsilon\sigma(t_1)\sigma(t_2)} - 1 + 1 \right) =$$

(раскрывая скобки)

$$= 1 + \sum_{\Gamma = \{(t_1 t_2), |t_1 - t_2| = 1\}} \prod_{(t_1, t_2) \in \Gamma} \left(e^{-\beta\varepsilon\sigma(t_1)\sigma(t_2)} - 1 \right) = \tag{4.4}$$

(разбивая набор Γ на связные компоненты: $\Gamma = \{\gamma_i\}$)

$$= 1 + \sum_{\substack{\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\} \\ s = 1, 2, \ldots}} \prod_{i=1}^{s} \prod_{(t_1, t_2) \in \gamma_i} \left(e^{-\beta\varepsilon\sigma(t_1)\sigma(t_2)} - 1 \right).$$

Здесь $\Gamma = \{(t_1, t_2)\}$ – непустой неупорядоченный набор попарно различных двухточечных множеств, состоящих из соседних точек на решетке $\mathbb{Z}^d$, а $\{\gamma_i\}$ – связные компоненты Γ (“кластеры”) и, таким образом, суммирование в последнем члене цепочки равенств (3.4) происходит по неупорядоченным наборам кластеров, для которых множества точек $\bar{\gamma}_i = \bigcup\limits_{(t_1,t_2)\in\gamma_i} \{t_1, t_2\}$ попарно не пересекаются. Вводя обозначение

$$\kappa_\gamma = \left\langle \prod_{(t_1 t_2)\in\gamma} \left(e^{-\beta\varepsilon\sigma(t_1)\sigma(t_2)} - 1\right) \right\rangle_{G^{(1)}} \tag{4.5}$$

для связного набора γ соседних пар $(t_1 t_2)$, мы получим следующее представление для статистической суммы $\tilde{Z}_\Lambda$

$$\tilde{Z}_\Lambda = 1 + \sum_{\substack{\{\gamma_1,\ldots,\gamma_s\}: \\ \bar{\gamma}_i\cap\bar{\gamma}_j=\emptyset,\ i\neq j,\ \bar{\gamma}_i\subseteq\Lambda\ i=1,\ldots,s}} \prod_{i=1}^{s} \kappa_{\gamma_i}, \tag{4.6}$$

которые обычно называют “*кластерным представлением*”. Поскольку для любых значений спинов σ_1 и σ_2

$$\left| e^{-\beta\varepsilon\sigma_1\sigma_2} - 1 \right| < \beta e^{\beta|\varepsilon|}$$

верна оценка

$$|\kappa_\gamma| < (\beta e^{|\varepsilon|\beta})^{|\gamma|}, \tag{4.7}$$

где $|\gamma|$ – число пар (t_1, t_2) в $\gamma/$

3. Рассмотрим величины

$$f_\Lambda^{(A)} = \frac{\tilde{Z}_{\Lambda\setminus A}}{\tilde{Z}_\Lambda} \quad A \subseteq \Lambda. \tag{4.8}$$

Оказывается (см. [24]), что при достаточно малых $\beta \ll 1$ величина $f_\Lambda^{(A)}$ при любом $A \subset \Lambda$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд по переменным κ_γ:

$$f_\Lambda^{(A)} = \sum_{\eta:\bar{\eta}\subseteq\Lambda} D_\eta^{(A)} \kappa_\eta, \tag{4.9}$$

где $\eta = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ – неупорядоченный набор кластеров (быть может, повторяющихся в наборе η), а $\kappa_\eta = \prod\limits_{\gamma\in\eta} \kappa_\gamma, \kappa_\emptyset = 1$. В (4.9) суммирование происходит по наборам η (включая пустой), таким, что множество $\bar{\eta} = \bigcup\limits_{\gamma\in\eta} \bar{\gamma} \subseteq \Lambda$, а коэффициенты $D_\eta^{(A)}$ не зависят от Λ. При этом для любой последовательности $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$, $n \to \infty$,

$$f_{\Lambda_n}^{(A)} \to f^{(A)}, \tag{4.10}$$

где $f^{(A)}$ также представляется в виде ряда, подобного (4.9), в котором коэффициенты те же, что и в (4.9), а наборы η – произвольны.

4. Пусть F_B – локальная ограниченная функция с носителем B. Для любого $\Lambda \supseteq B$ среднее $\langle F_B \rangle_{\bar{G}_\Lambda}$ равно

$$\langle F_B \rangle_{\bar{G}_\Lambda^{(2)}} = \frac{1}{\tilde{Z}_\Lambda} \left\langle F_B(\sigma) \exp\left\{ -\beta\varepsilon \sum_{\substack{t_1,t_2\in\Lambda, \\ |t_1-t_2|=1}} \sigma(t_1)\sigma(t_2) \right\} \right\rangle_{G^{(1)}}. \tag{4.11}$$

Рассуждая далее как и выше, получим, что

$$\left\langle F_B(\sigma)\exp\left\{-\beta\varepsilon\sum_{\substack{t_1,t_2\in\Lambda,\\|t_1-t_2|=1}}\sigma(t_1)\sigma(t_2)\right\}\right\rangle_{G^{(1)}} =$$
$$\sum_{\eta_1,\eta_2}\langle F_B\kappa_{\eta_1}\cdot\kappa_{\eta_2}\rangle_{G^{(1)}} = \sum_{\substack{\eta_1:\\ \bar\eta_1\subseteq\Lambda}}\langle F_B\kappa_{\eta_1}\rangle_{G^{(1)}}\sum_{\substack{\eta_2:\\ \bar\eta_2\subseteq\Lambda\setminus(B\bigcup\bar\eta_1)}}\langle\kappa_{\eta_2}\rangle_{G^{(1)}} = \tag{4.12}$$
$$\sum_{\eta_1:\bar\eta_1\subseteq\Lambda}\langle F\kappa_{\eta_1}\rangle_{G^{(1)}}Z_{\Lambda\setminus(B\bigcup\bar\eta_1)}.$$

Здесь η_1,η_2 – два набора кластеров, “лежащих” в Λ (т.е. $\bar\eta_i\subseteq\Lambda, i=1,2$) и непересекающихся друг с другом (т.е. $\bar\eta_1\bigcap\bar\eta_2=\emptyset$). При этом η_1 состоит из кластеров $\{\gamma_i\}$, пересекающихся с B ($\bar\gamma_i\bigcap B\neq\emptyset,\gamma_i\in\eta_1$), а набор η_2 состоит, наоборот, из кластеров $\{\gamma_j\}$ непересекающихся с B ($\gamma_j\bigcap B=\emptyset,\gamma_j\in\eta_2$). Таким образом, из (4.11), ((4.12) находим, что

$$\langle F_B\rangle_{\bar G_\Lambda} = \sum_{\substack{\eta=\{\gamma_j\}:\bar\gamma_j\bigcap B\neq\emptyset,\\ \bar\eta\subseteq\Lambda}}\langle F_B\cdot\kappa_\eta\rangle_{G^{(1)}}\ \ f_\Lambda^{(B\bigcup\bar\eta)}, \tag{4.13}$$

где суммирование происходит по всем наборам η, пересекающимся с B и лежащим в Λ. Переходя к пределу $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^d$, получим

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^d}\langle F_B\rangle_{\bar G_\Lambda} = \sum_{\eta=\{\gamma_j\}:\bar\gamma_j\bigcap B\neq\emptyset}\langle F_B\cdot\kappa_\eta\rangle_{G^{(1)}}\ \ f^{(B\bigcup\bar\eta)}, \tag{4.14}$$

где суммирование идет по всем наборам η, пересекающимся с B. Таким образом, мы получим, что для любой ограниченной локальной функции F_B существует предел $\lim\limits_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^d}\langle F_B\rangle_{\bar G_\Lambda}$ средних при $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^d$. Эти пределы однозначно определяют предельную меру G (порожденную потенциалом (2.7)).

Помимо описанного здесь приема получения кластерных разложений, применимого, главным образом, к моделям с конечным спиновым пространством и финитным взаимодействием, существуют и другие приемы, приводящие к более сложным разложениям. Эти приемы развиты в основном для случая моделей с бесконечным (некомпактным) спиновым пространством и бесконечно–протяженным взаимодействием. В частности, следует упомянуть работы В.А. Малышева [22, 24, 59], в которых с помощью очень тонких комбинаторных построений получены довольно общие кластерные разложения, применимые к таким моделям, как решетчатая модель квантового поля (см. пример 4 на стр. 143), решетчатым моделям калибровочных полей и т.д. Представляет также интерес развитый Р.Л. Добрушиным [25] способ кластерных разложений, связанный с задачей убывания корреляций спинов в модели Изинга при низкой температуре (область фазового перехода).

5. КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ГИББСОВСКИХ DLR-ПОЛЕЙ

В этом параграфе мы приведем некоторые критерии того, что для заданной спецификации $\mathfrak{G}=\{G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda 1}};\Lambda\subset T,\bar\sigma_{\Lambda'}\in\Omega_{\Lambda'}\}$, построенной по потенциалу $\{V_A, A\subset T\}$, существует хотя бы одно предельное гиббсовское распределение. Заметим, что этот вопрос решался и в предыдущих параграфах для т.н. “высокотемпературной области”: $\beta\ll 1$, но описанные ниже результаты охватывают более широкий класс потенциалов, даже таких, в частности, при которых существует несколько предельных гиббсовских полей.

Ниже мы будем предполагать, что в спиновом пространстве S введена метрика $\rho(s_1, s_2)$, $s_1, s_2 \in S$. Эта метрика, точнее топология в S, ею порождаемая, позволяет ввести топологию во всех пространствах $\Omega_\Lambda = S^\Lambda$, $\Lambda \subseteq T$ как тихоновское произведение топологий в S. Далее мы будем предполагать, что спецификация $\mathfrak{S} = \{G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}}\}$ такова, что распределения $G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}}$ слабо-непрерывно зависят от граничной конфигурации $\bar\sigma_{\Lambda'}$. Это означает, напомним, что для любого конечного $\Lambda \subset T$ и для любой ограниченной функции φ на пространстве Ω_Λ ее среднее по распределению $G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}}$

$$\langle\varphi\rangle_{G_{\Lambda,\bar\sigma_{\Lambda'}}} \equiv f(\bar\sigma_{\Lambda'}) - \text{непрерывная функция на пространстве } \Omega_{\Lambda'} \tag{5.1}$$

(относительно введенной выше топологии в $\Omega_{\Lambda'}$).

Первый и наиболее простой результат о существовании предельных гиббсовских полей такой:

Теорема 5.1. *Пусть пространство S – компактно относительно метрики ρ и спецификация $\mathfrak{S}$ удовлетворяет условию (5.1). Тогда существует по крайней мере одно гиббсовское распределение, порождаемое $\mathfrak{S}$.*

Вот полезное следствие этой теоремы. Поясним предварительно, что называют *финитным* потенциалом. Пусть в множестве T введена некоторая метрика $d(t_1, t_2)$, каждый шар которой содержит конечное число точек; если для потенциала $\{V_A\}$ найдется такое число $r > 0$ ("*радиус взаимодействия*"), что $V_A \equiv 0$ как только $\mathrm{diam} A > r$, его называют финитным

Следствие из теоремы 4.1.

Если множество S конечно и потенциал $\{V_A\}$ финитен, то предельное гиббсовское распределение, порожденное этим потенциалом существует.

Это следствие основано на том, что в случае конечного S и финитного потенциала средние (5.1) всегда непрерывны относительно топологии в $\Omega_{\Lambda'}$, порождаемой дискретной метрикой в S:

$$\rho_{\mathrm{discr}}(s_1, s_2) = \begin{cases} 0, \ s_1 = s_2 \ s_1, s_2 \in S \\ 1, \ s_1 \neq s_2. \end{cases}$$

Из теоремы 4.1 и приведенного следствия вытекает, в частности, что для модели Изинга, модели решетчатого газа (с финитным взаимодействием) и модели ротаторов (примеры 1, 2, 3 на стр. 143) предельные гиббсовские поля существуют при всех значениях параметров в этих моделях. Модели с некомпактным пространством спинов S (такие, как пример 4 на стр. 143 – модель квантового поля) не охватываются приведенной теоремой и требуют других критериев существования предельного поля.

Эти критерии основаны на понятии компактной функции. Положительная вещественная функция $h(s)$ на пространстве S называется *компактной*, если для любого $a > 0$ множество

$$\{s \in S : h(s) \le a\}$$

компактно.

В следующих теоремах существование предельного поля для спецификации $\mathfrak{S}$ проверяется только по одноточечным элементам этой спецификации:

$$\{G_{\{t\},\bar\sigma_{\{t\}'}}, t \in T\}. \tag{5.2}$$

Теорема 5.2. *Пусть существует такое число $C > 0$ и для каждого $t \in T$ компактная функция h_t такая, что все средние*

$$\langle h_t(\sigma(t))\rangle_{G_{t,\bar\sigma_{\{t\}'}}} < C \tag{5.3}$$

для любого распределения (5.2) из спецификации $\mathfrak{S}$. Тогда, если выполнено (5.1), предельное гиббсовское поле для спецификации $\mathfrak{S}$ существует. При этом

$$\langle h_t(\sigma(t))\rangle < C,$$

где $\langle\ \rangle$ означает среднее по предельной гиббсовской мере.

Хотя эта теорема уже позволяет исследовать некоторые модели с некомпактным спиновым пространством S, для многих таких моделей она еще непригодна из-за того, что при граничных конфигурациях $\bar{\sigma}_{\{t\}'}$ с очень "большими" значениями средние вида (5.3) могут быть очень "велики". В следующем критерии эти средние уже "контролируются" значениями конфигурации $\bar{\sigma}_{\{t\}'}$.

Мы скажем, что спецификация $\varphi = \{G_{\Lambda,\bar{\sigma}_{\Lambda^1}}\}$ удовлетворяет условию *компактности*, если существует некоторая константа $C > 0$, для каждого $t \in T$ компактная функция h_t и набор констант $\{c_t(t^1) > 0, t^1 \in T \setminus \{t\}\}$ таких, что

$$\sup_{t\in T} \sum_{t^1\in T\setminus\{t\}} c_t(t^1) = \delta < 1 \tag{5.4}$$

и выполнено условие

$$\langle h_t(\sigma(t))\rangle_{G_{\{t\},\bar{\sigma}_{\{t\}'}}} \le C + \sum_{t^1\in T\setminus\{t\}} c_t(t^1) h_{t^1}(\bar{\sigma}_{\{t\}'}(t^1)) \tag{5.5}$$

для любого одноточечного распределения $G_{\{t\},\bar{\sigma}_{\{t\}'}}$ из спецификации $\mathfrak{S}$.

Теорема 5.3 (Р.Л.Добрушин [4]). *Пусть спецификация удовлетворяет условию (5.1) и условию компактности (5.4), (5.5). Тогда существует предельное распределение Гиббса, соответствующее спецификации $\mathfrak{S}$. При этом*

$$\sup_t \langle h_t(\sigma(t))\rangle < \infty.$$

Применим эту теорему к модели квантового решетчатого поля (пример 4 на стр. 143). Выберем компактную функцию $h(s) = |s|, s \in \mathbb{R}^1$. Тогда для любого $t \in \mathbb{Z}^d$ и любой граничной конфигурации $\bar{\sigma}_{\{t\}'}$ среднее $\langle|s|\rangle_{G_{\{t\},\bar{\sigma}_{\{t\}'}}}$ равно

$$\langle|s|\rangle_{G_{\{t\},\bar{\sigma}_{\{t\}'}}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^1} |s| e^{-P_A(s)} ds}{\int_{\mathbb{R}^1} e^{-P_A(s)} ds} \equiv I, \tag{5.6}$$

где

$$P_A(s) = \beta s^4 + (2d+m)s^2 - 2sA, \text{ а } A = \sum_{|t^1-t|=1} \bar{\sigma}_{\{t\}'}(t^1).$$

Пусть s_0 – точка минимума $P_A(s)$, т.е. корень (единственный) уравнения

$$4\beta s_0^3 + 2(2d+m)s_0 = 2A. \tag{5.7}$$

Представим $P_A(s)$ в виде многочлена Тейлора в точке s_0: $P_A(s) = Q(s-s_0)+\gamma(s-s_0)^2+const$, где $Q(x) = \beta x^4 + 4\beta s_0 x^3$, а $\gamma = 6\beta s_0^2 + 2d + m$, и получим, что

$$I < |s_0| + \frac{\int_{\mathbb{R}^1} |x| \exp\{-Q(x)\} e^{-\gamma x^2} dx}{\int_{\mathbb{R}^1} \exp\{-Q(x)\} e^{-\gamma x^2} dx}. \tag{5.8}$$

Числитель последней дроби, так как

$$Q(x) + 4\beta s_0^2 x^2 > 0,$$

можно оценить интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\tilde{\gamma} x^2} dx = \frac{C_1}{\tilde{\gamma}}, \tag{5.9}$$

где C_1 – абсолютная константа, а $\tilde{\gamma} = 2s_0^2\beta + 2d + m$. Знаменатель дроби (5.8) допускает оценку снизу по неравенству Иенсена:

$$\begin{gathered} \int_{R^1} \exp\{-Q(x)\} e^{-\gamma\beta^2} dx > \sqrt{\tfrac{\pi}{\gamma}} \exp\{-\beta\langle x^4\rangle_{\text{gauss}}\} = \\ \sqrt{\tfrac{\pi}{\gamma}} \exp\{-\tfrac{\beta}{\gamma^2} C_2\} \geq \sqrt{\tfrac{\pi}{\gamma}} \exp\{-\tfrac{\beta C_2}{(2d+m)^2}\}, \end{gathered} \tag{5.10}$$

где C_2 – абсолютная константа, а $\langle\ \rangle_{\text{gauss}}$ означает среднее по гауссовскому распределению с плотностью

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} e^{-\gamma x^2}.$$

Подставляя оценки (5.9) и (5.10) в (5.8), и замечая, что $|s_0| < (\frac{1}{2\beta}A)^{1/3}$, как это видно из уравнения (5.7), находим, что

$$I < (\frac{1}{2\beta}A)^{1/3} + C_4 \frac{\sqrt{6s_0^2\beta + 2d + m}}{2s_0^2\beta + 2d + m} < (\frac{1}{2\beta}A)^{1/3} + C_5, \tag{5.11}$$

где константы $C_4 = C_4(\beta)$ и $C_5 = C_5(\beta)$ не зависят от A. Поскольку для любых чисел $a > 0$ и $b > 0$ найдется такое $\bar{C} = \bar{C}(a, b)$, что для любого $A > 0$, выполнено неравенство

$$aA^{1/3} < \bar{C} + bA.$$

Полагая теперь $a = (\frac{1}{2\beta})^{1/3}$ и $b = \frac{1}{(2d+m)(2d)^2}$, найдем, что выполняется оценка

$$I < \bar{\bar{c}} + \frac{1}{(2d+m)(2d)^2} \sum_{t^1 : |^1 - t| < 1} |\bar{\sigma}_{\{t\}'}(T^1)|, \quad \bar{\bar{c}} = \bar{\bar{c}}(\beta) - \text{константа}.$$

Таким образом, если положить

$$\bar{\bar{C}}_t(t^1) = \begin{cases} \frac{1}{(2d+m)(2d)^2}, |t - t^1| = 1 \\ \qquad\qquad 0, |t - t^1| > 0 \end{cases}$$

то условия (5.4) и (5.5) будут выполнены:

$$\sum_{t^1 : |t^1 - t| = 1} \bar{\bar{C}}_t(t^1) < \frac{1}{(2d)^2} \tag{5.12}$$

(эта оценка понадобится в следующем параграфе). Условие (5.1) слабой непрерывности распределений $G_{\{t\}, \bar{\sigma}_{\{t\}'}}$ относительно конфигурации $\bar{\sigma}_{\{t\}'}$ очевидно. Таким образом, у модели решетчатого квантового поля предельное гиббсовское распределение существует при всех значениях параметров $\beta > 0$ и $m > 0$.

В заключение скажем кратко о соображениях, на которых основаны доказательства приведенных теорем. В доказательстве теоремы 5.1 используется тот факт, что множество вероятностных распределений на компактном пространстве слабо-компактно. Это позволяет построить последовательность распределений $G_{\Lambda_n, \bar{\sigma}_{\Lambda'_n}}$ из спецификации $\mathfrak{S} = \{G_{\Lambda, \bar{\sigma}_{\Lambda'}}\}$ с растущими

$\Lambda_n \nearrow T, \quad n \to \infty$ и некоторым образом выбранными граничными конфигурациями $\bar{\sigma}_{\Lambda'_n}$ так, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} G_{\Lambda_n, \bar{\sigma}_{\Lambda'_n}} = G \tag{5.13}$$

и предельное распределение оказывается гиббсовским. Условие теоремы 5.2 влечет – согласно известному критерию Ю.В. Прохорова [29] слабую компактность множество распределений $\{G_{\Lambda, \bar{\sigma}_{\Lambda'}}\}$ для любого фиксированного конечного $\Lambda \subseteq T$. После этого следует применить рассуждения из доказательства предыдущей теоремы. Наконец, условия теоремы 5.3 после некоторых рассуждений приводят снова к требованию (5.3) теоремы 5.2, однако непосредственно установить (5.3) гораздо труднее, чем вывести условия (5.4) и (5.5).

6. КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРЕДЕЛЬНОГО ГИББСОВСКОГО DLR-ПОЛЯ

Как уже говорилось, бывают потенциалы $\{V_A\}$, порождающие несколько предельных гиббсовских полей и мы рассмотрим эти случаи в следующих параграфах. Здесь же мы хотим выяснить условия, при которых потенциал $\{V_A\}$ имеет единственное предельное распределение (или по крайней мере единственное в некотором естественном классе распределений). Мы приведем здесь ряд критериев такой единственности. Первые два из них снова проверяются лишь по одноточечным элементам спецификации $\mathfrak{S}$, а в третьем фигурируют элементы спецификации $G_{\Lambda, \bar{\sigma}_{\Lambda'}}$ с уже многоточечными Λ.

В этом параграфе мы вводим для простоты изложения следующие упрощающие предположения: $T = \mathbf{Z}^d$, потенциал $\{V_A\}$ – финитный (с радиусом взаимодействия r) и *трансляционно-инвариантный*. Последнее означает, что при сдвиге конфигурации $\sigma \in \Omega$ вдоль решетки $\mathbb{Z}^d$ на вектор $v \in \mathbb{Z}^d$:

$$\tau_v : \Omega \to \Omega : (\tau_v \sigma)(t) = \sigma(t - v) \tag{6.1}$$

значения потенциала не меняются:

$$V_{A+v}(\tau_v \sigma|_{A+v}) = V_A(\sigma|_A)$$

(здесь $A + v$ – сдвиг множества $A \in \mathbf{Z}^d$ на вектор v). Для двух элементов $G_{\Lambda, \bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda'}}$ и $G_{\Lambda, \bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda'}}$ спецификации с одним и тем же Λ, но разными граничными конфигурациями $\bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda}$ введем расстояние между ними по формуле

$$R(G_{\Lambda, \bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda'}}, G_{\Lambda, \bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda'}}) = \int_{\Omega_\Lambda} \left| \frac{dG_{\Lambda, \bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda'}}}{d\nu^\Lambda}(\sigma_\Lambda) - \frac{dG_{\Lambda, \bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda'}}}{d\nu^\Lambda}(\sigma_\Lambda) \right| d\nu^\Lambda(\sigma_\Lambda). \tag{6.2}$$

Мы скажем, что спецификация $\mathfrak{S}$ удовлетворяет условию *сжатия*, если найдется набор констант $\{k_u > 0, u \in \mathbf{Z}^d, |u| \le r\}$ таких, что

$$\sum_{u:|u|\le r} k_u = \alpha < 1 \tag{6.3}$$

и для любой пары одноточечных распределений $G_{t, \bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}}$, $G_{t, \bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}}$ с одним и тем же $t \in \mathbf{Z}^d$ выполнено условие

$$R(G_{\{t\}, \bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}}, G_{\{t\}, \bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}}) \le \sum_{t^1 : \bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}(t^1) \ne \bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}(t^1)} k_{t^1 - t} \tag{6.4}$$

для любого $t \in \mathbf{Z}^d$. Чтобы пояснить смысл условия сжатия, заметим, что, как мы уже видели, многие предельные гиббсовские распределения могут быть получены как слабые пределы

$$G = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^d} G_{\Lambda, \bar{\sigma}_{\Lambda'}} \tag{6.5}$$

распределений из спецификации со специально подобранными граничными конфигурациями $\{\bar{\sigma}_{\Lambda'}, \Lambda \nearrow \mathbf{Z}^d\}$. Единственность гиббсовского поля для данной спецификации означает, в частности, совпадение всех таких пределов. Это, в свою очередь, значит следующее: пусть $\Lambda_0 \subset \mathbf{Z}^d$ некоторое фиксированное конечное подмножество решетки, а $\Lambda \supseteq \Lambda_0$ "большое" множество, содержащее Λ_0 – например, куб с центром в нуле и большой стороной L – и $\bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda'}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda'}$ - две граничные конфигурации вне Λ. Обозначим $G^{\Lambda_0}_{\Lambda,\bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda'}}$ и $G^{\Lambda_0}_{\Lambda,\bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda'}}$ распределения на пространстве Ω_{Λ_0}, порожденные соответственно распределениями $G_{\Lambda,\bar{\sigma}^{(1)}{}_{\Lambda'}}$ и $G_{\Lambda,\bar{\sigma}^{(2)}{}_{\Lambda'}}$. Если для любого Λ_0 расстояние (определенное аналогично (6.2))

$$R(G^{\Lambda_0}_{\Lambda,\bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda'}}, G^{\Lambda_0}_{\Lambda,\bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda'}}) \to 0 \quad \text{при} \quad \Lambda \nearrow T, \tag{6.6}$$

то пределы (6.5) совпадают при различных выборах граничных конфигураций $\bar{\sigma}_{\Lambda'}$. Оказывается, что требование (6.6) следует из условия сжатия.

Теорема 6.1 (Р.Л.Добрушин [4,10]). *Пусть спецификация удовлетворяет условию сжатия, а также условию (5.1), то существует ровно одно предельное распределение для этой спецификации.*

Применим эту теорему к случаю модели Изинга (пример 1) при $h = 0$. Очевидно, что

$$\begin{gathered} R(G_{\{t\},\bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}}, G_{\{t\},\bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}}) = \sum_{\sigma=1,-1} \left| \frac{e^{\beta\varepsilon\sigma A_t^{(1)}}}{2ch\beta\varepsilon A_t^{(1)}} - \frac{e^{\beta\varepsilon\sigma A_t^{(2)}}}{2ch\beta\varepsilon A_t^{(2)}} \right| = \\ \sum_{\sigma=1,-1} \left| \int_{A_t^{(2)}}^{A_t^{(1)}} \left(\frac{e^{-\beta\varepsilon\sigma x}}{ch\beta\varepsilon x} \right)'_x dx \right| = \sum_{\sigma=1,-1} \left| \int_{A_t^{(2)}}^{A_t^{(1)}} \frac{\beta\varepsilon dx}{(ch\beta\varepsilon x)^2} \right|, \end{gathered} \tag{6.7}$$

где $A_t^{(i)} = \sum\limits_{t^1:|t-t^1|=1} \bar{\sigma}^{(i)}_{\{t\}'}(t^1)$, $i = 1, 2$. Отсюда находим, что

$$\begin{gathered} R(G_{\{t\},\bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}}, G_{\{t\},\bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}}) < 2|\beta\varepsilon||A_t^{(1)} - A_t^{(2)}| = 4|\beta\varepsilon| \times \\ \{ \text{ число точек } t^1, \text{соседних с } t, \text{ в которых } \bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}(t^1) \neq \bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}(t^1)\}. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Таким образом, если положить в (6.8)

$$K_u = 4|\beta\varepsilon|, \quad |u| = 1,$$

то условие сжатия будет выполнено при

$$|\beta\varepsilon| < \frac{1}{8d}. \tag{6.9}$$

Неравенство (6.9) – дает довольно грубую оценку снизу для т.н. критического значения β, т.е. такого значения β, выше которого возникают несколько предельных распределений в модели Изинга.

Для случая некомпактного пространства S имеется более сложный критерий единственности предельного гиббсовского поля. Предположим, что для финитного потенциала $\{V_A\}$ с радиусом взаимодействия $r = 1$ выполнены следующие условия относительно порожденной им спецификации:

1) усиленное условие компактности (см.(5.4) и (5.5)), в котором требование $\delta \equiv \sum_{t^1} c_t(t^1) < 1$ заменено более сильным требованием

$$\delta < \frac{1}{(2d)^2}. \tag{6.10}$$

При этом в силу трансляционной инвариантности потенциала $\{V_A\}$ в (5.5) можно считать, что для всех $t \in \mathbb{Z}^d$ выбрана одна и та же компактная функция h, константы $c_t\{t^1\}$ зависят лишь от разности $t - t^1$

$$c_t\{t^1\} = \bar{c}(t - t^1), \tag{6.11}$$

где $\bar{c}(u) = 0$ при $|u| > 1$, и условия компактности (5.4) и (5.5) достаточно проверить в одной какой-нибудь точке $\mathbb{Z}^d$;

2) ослабленное условие сжатия (см.(6.3), (6.4)): требуется лишь, чтобы оценка (6.4) выполнялась для тех пар конфигураций $\bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}(t^1)$ и $\bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}(t^1)$, для которых справедливо неравенство

$$\max_{t^1:|t^1-t|=1} h(\bar{\sigma}^{(i)}_{\{t\}'}(t^1)) < M \quad i = 1, 2, \tag{6.12}$$

где M – некоторая константа, которая определяется по потенциалу $\{V_A\}$ (точнее, по числам C, $\bar{c}(u)$ и компактной функции h, входящих в условие компактности).

Теорема 6.2 (Р.Л. Добрушин, Е.А. Печерский [19]). *Пусть для спецификации $\mathfrak{S}$ выполнены сформулированные условия 1) и 2) и условие (5.1). Тогда у нее существует ровно одно предельное гиббсовское распределение.*

Применим эту теорему к случаю модели квантового решетчатого поля, изучавшейся в предыдущем параграфе, где было для нее установлено усиленное условие компактности (см. стр. 153–154). Для проверки условия 2) в случае малых β нам будет удобно перейти к эквивалентной модели с гамильтонианом

$$H_{\{t\}'}(\sigma(t)) = \beta\alpha^2(\sigma(t))^4 + \alpha \sum_{t^1:|t-t^1|=1} (\sigma(t) - \bar{\sigma}(t^1))^2,$$

который получается из прежнего гамильтониана заменой значений спина $\sigma \to \sqrt{\alpha}\sigma$. Повторяя рассуждения из предыдущего параграфа, мы найдем, что для новой модели также выполнено усиленное условие компактности для компактной функции $h(s) = |s|$ и тем самым указана константа M, входящая в оценку (6.12). Для оценки расстояния между двумя распределениями $G_{\{t\},\bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}}$ и $G_{\{t\},\bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}}$, где $\bar{\sigma}^{(i)}_{\{t\}'}$, $i = 1, 2$ удовлетворяют оценке (6.12), поступим как и выше:

$$R(G_{\{t\},\bar{\sigma}^{(1)}_{\{t\}'}}, G_{\{t\},\bar{\sigma}^{(2)}_{\{t\}'}}) < \int_{A_1}^{A_2} dA \int_{R^1} \left| \left(\frac{\exp\{P_A(s)\}}{\int_{\mathbb{R}^1} \exp\{P_A(y)\}dy} \right)'_A \right| ds, \tag{6.13}$$

где $A = \sum_{t^1} \bar{\sigma}_{\{t\}'}(t^1)$, а $P_A(s) = \beta\alpha^2 s^4 + \alpha(2d + m)s^2 - 2\alpha s A$. Вычисляя производную в (6.13), найдем, что она не превосходит

$$2\alpha \frac{\int_{\mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^2} (s - y)e^{-P_A(s)-P_A(y)} ds dy}{(\int_{\mathbb{R}^1} \exp\{-P_A(y)\}dy)^2} < 2\alpha \frac{\int_{\mathbb{R}^1} |x| e^{-Q(x)-\gamma x^2} dx}{\int_{\mathbb{R}^1}, e^{-Q(y)-\gamma y^2} dy}, \tag{6.14}$$

где $Q(x) = \beta\alpha^2 x^4 + 4\beta\alpha^2 s_0 x^3$, а $\gamma = 6\alpha^2\beta s_0^2 + \alpha(2d + m)$ (s_0 – точка минимума $P_A(s)$). Далее повторяя оценки из предыдущего параграфа, найдем, что правая часть в (6.14) не превосходит

$$C_1\sqrt{\alpha}e^{C_2\beta}, \tag{6.15}$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ – константы, не зависящие от α и β. Из (6.13), (6.14) и (6.16) вытекает, что расстояние (6.13) при малом β не превосходит (в силу оценки (6.12))

$$C_1\sqrt{\alpha}e^{C_2\beta}|A_2 - A_1| < \bar{C}\sqrt{\alpha}M\#\{t^1 : \sigma^{(1)}_{\{t\}'}(t^1) = \sigma^{(1)}_{\{t\}'}(t^1)\},$$

где $\bar{C} = C_1 e^{C_2\beta}$. Полагая теперь

$$K_u = \frac{\bar{C}\sqrt{\alpha}M}{2\alpha},$$

мы видим, что при малых α и β условие (6.3) выполняется. Таким образом, из теоремы 6.2 вытекает, что у рассматриваемой модели имеется ровно одно предельное распределение. Полученный результат, как мы видели, следует из теоремы 6.2. Мы привели его снова для демонстрации метода.

До сих пор условия единственности гиббсовского поля, равно как условия их существования, формулировались в терминах одноточечных элементов спецификации $\mathfrak{S}$. Ниже приводится критерий единственности, включающий уже многоточечные элементы спецификации $\mathfrak{S}$.

Пусть спиновое пространство S конечно и потенциал $\{V_A\}$ – финитен с радиусом взаимодействия r и трансляционно-инвариантен. Пусть далее для некоторого конечного множества $\Lambda_0 \subset \mathbb{Z}^d$ выполнены условия:

1) существует набор констант $\{b_u > 0, u \in \partial_r\Lambda_0\}$ таких, что

$$\sum_{u\in\partial_r\Lambda_0} b_u < |\Lambda_0|$$

(здесь через $\partial_r\Lambda_0$ обозначена r – окрестность множества Λ_0

$$\partial_r\Lambda_0 = \{t^1 \in \Lambda_0' : \min_{t\in\Lambda_0} |t^1 - t| \le r\});$$

2) для любого $t^1 \in \partial_r\Lambda_0$ и для любых граничных конфигураций $\bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda_0'}$ и $\bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda_0'}$, совпадающих всюду, кроме точки t^1, выполнена оценка

$$R(G_{\Lambda_0,\bar{\sigma}^{(1)}_{\Lambda_0'}}, G_{\Lambda_0,\bar{\sigma}^{(2)}_{\Lambda_0'}}) < b_{t^1}.$$

Теорема 6.3 (Р.Л. Добрушин, С.Б. Шлосман [20]). *Пусть для трансляционно-инвариантного потенциала выполнены условия 1) и 2). Тогда для такого потенциала существует ровно одно предельное распределение.*

Оказывается, что гиббсовские поля, для которых выполнены условия 1) и 2) обладают многими “хорошими” свойствами: аналитичность статистической суммы относительно параметров, задающих потенциал (например, относительно параметров h и β в случае модели Изинга или μ и β в случае решетчатого газа и т.д.), быстрое убывание корреляций между далеко отстоящими значениями поля, “хорошие” оценки для семиинвариантов поля и т.д. Такие гиббсовские поля были названы в работе Р.Л. Добрушина и С.Б. Шлосмана [31] вполне аналитическими. Там же указаны двенадцать эквивалентных свойств таких полей, каждое из которых является характеристическим – т.е. влечет за собою все остальные свойства. В настоящее время этот список расширился и понятие полной аналитичности и связанные с ним свойства гиббсовских полей широко применяются в работах по статистической физике.

Рассмотрим отдельно случай гиббсовских полей на одномерной решетке $\mathbb{Z}^1$. Долгое время принято было считать, что в этом случае у любого разумного потенциала $\{V_A\}$ существует единственное гиббсовское поле. Однако, Ф. Дайсон в работе [35] построил пример модели на $\mathbb{Z}^1$ с неединственным гиббсовским полем. В этой модели $S = \{-1, 1\}$, а потенциал $\{V_A\}$ имеет вид:

$$V_A(\sigma) = \begin{cases} -\frac{1}{|t_1-t_2|^\alpha}\sigma(t_1)\sigma(t_2), & \text{if } A = \{t_1 t_2\}, t_1 \neq t_2 \\ 0, & \text{для остальных } A, \end{cases} \tag{6.16}$$

где $0 < \alpha < 2$.

В работе [39] Р.Л. Добрушиным подробно была исследована проблема единственности для одномерных моделей и получено почти исчерпывающее описание тех потенциалов, для которых гиббсовское предельное поле единственно. Мы не будем здесь приводить результаты Р.Л. Добрушина полностью, а укажем лишь следствие из них, касающееся моделей того типа, который рассмотрел Дайсон, А именно, пусть по-прежнему $S = \{-1, 1\}$, а потенциал имеет вид

$$V_A(\sigma) = \begin{cases} J(t_1 - t_2)\sigma(t_1)\sigma(t_2), & \text{если } A = \{t_1, t_2\}, \\ 0, & \text{для остальных } A, \end{cases} \tag{6.17}$$

где $J(u)$ – четная функция на множестве $\mathbb{Z}^1 \setminus \{0\}$. Тогда при условии, что

$$\sum_{u>0} u|J(u)| < \infty, \tag{6.18}$$

потенциал (6.17) порождает лишь одно гиббсовское предельное поле.

В упомянутой выше работе [35] Ф. Дайсон ввел вспомогательную одномерную модель, названную им *иерархической* моделью. Эта модель, а также некоторые ее модификации, подробно изучались в работах П. Блехера и Я.Г. Синая [36,37], а также П. Блехера и П. Майера [38] (см. также книгу Я.Г. Синая [64]). В исходной модели Ф. Дайсона $T = \mathbb{Z}^1_+ = \{1, 2, \ldots\}$, $S = \{-1, +1\}$, мера $\nu(-1) = \nu(1) = 1$. Потенциал взаимодействия определяется следующим образом. Пусть $\{\Lambda_n(k)\ k = 1, 2, \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$ последовательность укрупняющихя разбиений $\mathbb{Z}^1_+$ на блоки $\Lambda_n(k)$ длины 2^n (k – номер блока). Для любых двух точек $t, t' \in \mathbb{Z}^1_+$ обозначим $n(t, t')$ – наименьший номер разбиения, при котором обе точке лежат в одном и том же блоке этого разбиения. Легко проверить, что функция

$$d(t, t') = \begin{cases} 0, & t = t', \\ 2^{n(t,t')-1}, & t \neq t' \end{cases} \tag{6.19}$$

задает метрику на $\mathbb{Z}^1_+$. При этом потенциал иерархической модели равен

$$V_A(\sigma) = \begin{cases} -\beta(d(t, t'))^{-a}\sigma(t)\sigma(t'), & A = \{t, t'\}, \\ 0, & \text{при остальных } A. \end{cases} \tag{6.20}$$

Здесь $1 < a < 2$ – параметр модели. Укажем следующую модификацию описанной модели – т.н. модель Дайсона φ^4. В этом случае пространство T по-прежнему есть решетка $\mathbb{Z}^1_+$, спиновое пространство $S = \mathbb{R}^1$, а мера ν задается плотностью относительно лебеговой меры dx на $\mathbb{R}^1$:

$$\frac{d\nu}{dx}(x) = C(u) \exp\left\{-\frac{x^2}{2} - \frac{u}{4}x^4\right\}, \tag{6.21}$$

где $C(u)$ – нормировочный множитель, а параметр $u > 0$ достаточно мал. Потенциал $\{V_A\}$ для этой модели по-прежнему задается формулой (6.20). Рассматривают также иерархические модели с векторными значениями спина: $S = \mathbb{R}^k$. В упомянутых выше работах установлено существование для каждого варианта иерархических моделей такого значения β_{cr}, что при

$\beta < \beta_{cr}$ существует единственное предельное гиббсовское поле, а при $\beta > \beta_{cr}$ таких полей по-крайней мере два.

Основные результаты работы описывают асимптотические (при $n \to \infty$) свойства последовательности случайных полей на $\mathbb{Z}^1_+$

$$Y_n(k) = \frac{1}{A_n} \sum_{t \in \Lambda_n(k)} (\sigma(t) - \langle \sigma(t) \rangle_{G_{\Lambda_n}}), \; k \in \mathbb{Z}^1_+, \tag{6.22}$$

где среднее $\langle \sigma(t) \rangle$ берется по гиббсовскому полю G_{Λ_n}, A_n – некоторая подходящим образом выбранная нормировочная константа. Показано, что это поле при $\beta \neq \beta_{cr}$ и $A_n = 2^{n/2}$ сходится к независимому гауссовскому полю, а в случае $\beta = \beta_{cr}$ и $A_n = 2^n c^{-n/2}$ к некоторому возможно негауссовскому полю (здесь $c = 2^{2-a}$).

Изучались также асимптотические свойства распределения p_n случайной величины

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i \in V_n} \sigma(i).$$

Здесь также установлено, что при $\beta < \beta_{cr}$ распределение p_n асимптотически гауссово со средним нуль и дисперсией $const 2^n$, а при $\beta > \beta_{cr}$ оно близко к смеси двух гауссовских распределений с той же дисперсией, но разными средними.

К проблеме единственности гиббсовских полей близко примыкает явление т.н. *неразрушения непрерывной симметрии*, которое возникает только для моделей на двумерной решетке. Это явление состоит в следующем. Пусть в спиновом пространстве S действует преобразование $g : S \to S$, сохраняющее меру ν. Зададим действие этого преобразования на пространстве Ω всех конфигураций:

$$(\tau_g \sigma)(t) = (g^{-1} \sigma(t)), \quad t \in T, \quad \sigma \in \Omega. \tag{6.23}$$

Мы скажем, что потенциал $\{V_A\}$ инвариантен относительно преобразования τ_g, если для любого $A \subset T$

$$V_A(\tau_g \sigma) = V_A(\sigma).$$

Всякое такое преобразование g называется внутренним *преобразованием симметрии* системы; преобразования образуют группу, являющуюся подгруппой группы симметрии (группа симметрии может содержать например, преобразования, связанные с вращениями или сдвигами решетки).

Теорема 6.4 (Р.Л. Добрушин, С.Б. Шлосман [15]). *Пусть $T = \mathbb{Z}^2$ и Γ – компактная группа Ли, являющаяся подгруппой группы внутренних симметрий. Тогда любая предельная гиббсовская мера G, порожденная потенциалом $\{V_A\}$, инвариантна относительно этой группы Γ, т.е. для любого множества $B \subseteq \Omega$*

$$G(\tau_g B) = G(B)$$

для всех $g \in \Gamma$.

Как пример, рассмотрим модель ротаторов (см.стр. 143) на решетке $\mathbb{Z}^2$, конфигурации которой можно рассматривать как поле единичных векторов $\{\sigma(t), t \in \mathbb{Z}^2\}$, двумерного пространства $\mathbb{R}^2$. Очевидно, что группа O_1 вращений пространства $\mathbb{R}^2$ является подгруппой группы симметрии модели ротаторов. Из теоремы 6.4 легко следует, что для любого гиббсовского распределения G для модели ротаторов величина

$$\langle \sigma(t) \rangle_G = 0 \tag{6.24}$$

для любого $t \in \mathbb{Z}^2$. Этот факт называют обычно отсутствием *спонтанной намагниченности* (см.[15]). Однако уже в случае модели ротаторов на 3-х мерной решетке $\mathbb{Z}^3$ при низких температурах происходит нарушение непрерывной симметрии и спонтанная намагниченность возникает (см.[44]).

7. НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ ГИББСОВСКИХ ПОЛЕЙ (ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ) У МОДЕЛИ ИЗИНГА И У БЛИЗКИХ МОДЕЛЕЙ

Вопросы неединственности гиббсовских полей тесно связаны с более общей проблемой фазовых переходов вещества. Явление фазового перехода состоит в резком изменении свойств среды при малых возмущениях потенциала взаимодействия (т.е.параметров, задающих потенциал – температуры, намагниченности и проч.). В частности, это изменение может состоять в появлении или исчезновении нового предельного гиббсовского распределения (или, как принято говорить, новой фазы). Такой фазовый переход (называемый обычно переходом 1-ого рода) и означает, что имеется несколько предельных гиббсовских полей. Впервые неединственность гиббсовского поля была обнаружена для модели Изинга (с $h = 0$) на двумерной решетке в старой работе Р. Пайерлса (см.[45]). В этой работе было введено важное понятие границы конфигурации спинов, т.е. линии на решетке, разделяющей значения $(+)$ спинов от значений $(-)$ спинов (подробнее ниже). Это понятие оказалось ключевым в работе Р. Пайерлса и почти во всех дальнейших работах, посвященных неединственности гиббсовских полей. Работа Р. Пайерлса была надолго забыта и лишь в середине 60-х годов Р. Гриффитс [46] воспроизвел эту работу и привел строгое доказательство существования двух предельных гиббсовских полей у ферромагнитной ($\varepsilon = -1$) модели Изинга (см. пример 1 на стр. 143) при низких температурах (большие значения $\beta > 0$). Одновременно это было сделано Р.Л. Добрушиным [48], который однако не опирался на контурный метод Р. Пайерлса, из-за чего построения Р. Добрушина выглядели очень громоздкими. Затем появились работы (Ф.А. Березин и Я.Г. Синай [47], Р.Л. Добрушин [49]), в которых контурный метод применялся к доказательству неединственности гиббсовского поля у ряда решетчатых моделей, несколько более общих, чем модель Изинга.

Рассмотрим подробнее как устанавливается существование двух различных фаз (предельных полей) в двумерной ферромагнитной модели Изинга при $h = 0$. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ квадрат с центром в нуле и граничная конфигурация спинов $\bar{\sigma}_{\Lambda'} = \bar{\sigma}^+_{\Lambda}$ равна

$$\bar{\sigma}^+_{\Lambda'}(t) = +1 \tag{7.1}$$

для всех точек $t \in \Lambda'$; соответствующее распределение $G_{\Lambda,\bar{\sigma}_{\Lambda'}}$ обозначим G^+_{Λ}. Рассмотрим решетку $\tilde{\mathbb{Z}}^2$, сдвинутую относительно исходной решетки на вектор $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, и те ребра этой решетки, которые разделяют точки квадрата с разноименными значениями спина в конфигурации $\sigma_\Lambda \sqcup \bar{\sigma}_{\Lambda'}$; совокупность таких ребер назовем *границей* $\Gamma(\sigma_\Lambda)$ конфигурации σ_Λ, а ее связные компоненты – *контурами* границы. Эти контуры разбивают квадрат Λ на 'области', внутри которых значения конфигурации σ_Λ постоянны, причем во внешней 'области', т.е. 'области', примыкающей к границе Λ, эти значения равны $+1$. Нетрудно далее подсчитать, что энергия конфигурации σ_Λ при взаимодействии с внешней конфигурацией $\bar{\sigma}^+_{\Lambda'}$ равна (при $\varepsilon = -1$)

$$H_\Lambda(\sigma_\Lambda / \bar{\sigma}^+_{\Lambda^1}) = -2\beta(|\Lambda| - |\Gamma|),$$

и таким образом распределение Гиббса G^+_Λ имеет вид

$$G^+_\Lambda(\{\sigma_\Lambda\}) = \frac{e^{-2\beta|\Gamma(\sigma_\Lambda)|}}{Z^+_\Lambda} = \frac{\prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma_\Lambda)} e^{-2\beta|\gamma|}}{Z^+_\Lambda}, \tag{7.2}$$

где

$$Z_\Lambda^+ = \sum_{\sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda} e^{-2\beta|\Gamma(\sigma)|} \tag{7.3}$$

и $\{\gamma\}$ – контуры конфигурации σ_Λ. Заметим, что по любому набору попарно непересекающихся контуров (при заданной граничной конфигурации $\bar\sigma^+_{\Lambda'}$) конфигурация σ_Λ восстанавливается однозначно и в этом смысле ансамбль конфигураций контуров с распределением (7.2) эквивалентен исходному ансамблю спинов. Обозначим для каждого контура γ через $\rho(\gamma)$ – вероятность того, что этот контур содержится в какой-нибудь конфигурации таких контуров. Из (7.2) легко получить оценку

$$\rho(\gamma) < \exp\{-2\beta|\gamma|\}. \tag{7.4}$$

Оценим теперь вероятность события (множества конфигураций σ_Λ)

$$A_0^- = \{\sigma_\Lambda : \sigma_\Lambda(0) = -1\}. \tag{7.5}$$

Очевидно, что это множество содержится в множестве A_1:

$$A_1 = \{\sigma_\Lambda : \text{хотя бы один из контуров границы } \Gamma(\sigma_\Lambda) \text{ охватывает точку } 0 \in \Lambda\}. \tag{7.6}$$

Легко подсчитать, что число контуров длины n, охватывающих точку 0, не превосходит $3^n n^2$. Таким образом, из (7.4), (7.5), (7.6) находим, что

$$G_\Lambda^+(A_0^-) < G_\Lambda^+(A_1) < \sum_{n\ge 4} 3^n n^2 e^{-2\beta n} < \frac{1}{3} \tag{7.7}$$

при достаточно большом β. Следовательно, вероятность события $A_0^+ = \{\sigma_\Lambda : \sigma_\Lambda(0) = +1\}$ больше $2/3$. Подсчитывая аналогичным образом вероятность A_0^+ для распределения G_Λ^- с $(-)$-граничной конфигурацией $\bar\sigma^-_{\Lambda'}$ найдем, что

$$G_\Lambda^-(A_0^+) < 1/3. \tag{7.8}$$

Переходя к пределу при $\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^2$ получим, что найденные оценки для $G_\Lambda^+(A_0^+)$ и $G_\Lambda^-(A_0^+)$ сохранятся в пределе $\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^2$ и, следовательно, предельные распределения

$$G^\pm = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^2} G_\Lambda^\pm \tag{7.9}$$

различны. Отдельно можно доказать, что эти пределы существуют и обладают DLR-свойством.

Дальнейшее исследование ферромагнитной модели Изинга при больших β было подробно проведено в цикле работ Р. Минлоса и Я. Синая ([50,51,52]). В этих работах был подробно исследован ансамбль контуров на решетке $\mathbb{Z}^2$ с распределением (7.2) и на основе этого изучения получено подробное описание структуры типичных конфигураций спинов, скажем в ансамбле G^+: (-)-спины образуют конечные "метрики", окруженные бесконечным "океаном" $(+)$-спинов; внутри этих "материков" могут находиться внутренние "озера" $(+)$-спинов с "островами" $(-)$-спинов и т.д. (типичная картина в ансамбле G^- получается как "негатив" описанной картины для ансамбля G^+). В частности, был подробно изучен условный ансамбль $G_\Lambda^+(\cdot/e(\sigma_\Lambda) = e)$, порожденный ансамблем G_Λ^+ при условии, что удельная намагниченность конфигурации σ_Λ:

$$e(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{t\in\Lambda} \sigma_\Lambda(t) \tag{7.10}$$

фиксирована: $e(\sigma_\Lambda) = e$, и значение e отдельно от среднего значения $\langle e(\sigma_\Lambda)\rangle_{G_\Lambda^+}$. Было показано, что в случае достаточно большого квадрата $\Lambda = L \times L$ типичная конфигурация в условном ансамбле кроме прежних ‘материков’ $(-)$-спинов, размеров, не превышающих $\bar{c}\ln L$, содержит еще один большой – макроскопического размера $\sim L$ – ‘материк’ $(-)$-спинов (‘капля’), случайно расположенный в квадрате Λ. Кроме того, в [50] было показано, что при $h \neq 0$ одна из предельных фаз G^+ или G^- исчезает: при $h > 0$ исчезает фаза G^+, а при $h < 0$ – фаза G^-. Структура же типичных конфигураций для оставшейся фазы остается качественно такой же как и у соответствующей фазы при $h = 0$. Полное доказательство единственности предельного поля в ферромагнитной модели Изинга при $h \neq 0$ и большом β было опубликовано в работе Д. Мартиросяна [53], а также в работе Наср Али [54]. Поскольку типичные конфигурации в обеих фазах близки к постоянным конфигурациям $\sigma^+ \equiv +1$ или $\sigma^- = -1$, являющимися т.н. *основными состояниями* этой модели, то сами фазы в некотором смысле ‘вырастают’ из этих основных состояний при возрастании температуры. Напомним, что основным состоянием модели называют такую конфигурацию $\sigma \in \Omega$, что ее изменение в конечном числе точек решетки приводит к увеличению энергии конфигурации (подробнее об этом ниже). Приведенное наблюдение подсказывает, что прежде, чем искать предельные фазы, следует перечислить все основные состояния (или по крайней мере периодические основные состояния). Так, например, у антиферромагнитной модели Изинга ($\varepsilon = 1$) в некотором диапазоне значений h существуют два основных состояния, представляющие ‘шахматную доску’ с двумя противоположными раскрасками. Исходя из этого, Р.Л. Добрушин, И. Колафа и С.Б. Шлосман в работе [40] определили границу конфигураций σ в этой модели, как границу между двумя ‘шахматностями’ и снова свели задачу к контурному ансамблю. Это позволило ему построить т.н. *фазовую диаграмму* для антиферромагнитной модели Изинга. Фазовой диаграммой называют такое разбиение пространства параметров, определяющих потенциал, на страты, в каждом из которых число фаз постоянно, В случае модели Изинга фазовая диаграмма изображается в полуплоскости $(h, \beta > 0)$.

Кроме описанных выше трансляционно-инвариантных фаз G^+ и G^- в ферромагнитной модели Изинга, которые существуют для любой размерности $d \geq 2$, Р.Л. Добрушин [11] для размерности $d \geq 3$ обнаружил еще целую серию фаз – уже не инвариантных относительно сдвигов решетки $\mathbb{Z}^d$. В случае $d = 3$ типичные конфигурации σ таких фаз выглядят так: существует некоторая плоскость M, параллельная какой-нибудь из координатных плоскостей XY, XZ или YZ и конфигурация σ с одной стороны этой плоскости совпадает с $(+)$-конфигурацией (типичной для фазы G^+), а с другой стороны от M – с $(-)$-конфигурацией. Граница же между этими частями конфигурации σ представляет собой поверхность, отстоящую от плоскости M на конечное расстояние. Аналогичные фазы существуют и в больших размерностях. Такое явление – жесткое пространственное разделение фаз – носит название “roughening”.

Опыт работы с моделью Изинга был использован в работах В.М. Герцика и Р.Л. Добрушина [14] и В.М. Герцика [55], в которых разбиралась спиновая модель с взаимодействием на два шага. В этих работах было введено более совершенное определение границы конфигурации, как “полосы” на решетке $\mathbf{Z}^d$, разделяющей области, покрытые фрагментом какого-нибудь из основных состояний. Другим важным элементом конструкции, используемой в работах В.М. Герцика и Р.Л. Добрушина была т.н. “оценка Пайерлса”, т.е. оценка “энергии границы” через ее “длину”. Эта оценка применяется во многих работах, посвященных фазовым переходам. Долгое время считалось, что в моделях, описываемых теорией Пирогова-Синая, эта оценка всегда выполняется, пока Е.А. Печерский в работе [56] не привел примера модели, в которой оценка Пайерлса нарушена. В работе В.М. Герцика и Р.Л. Добрушина (см. ниже) было существенно, что фазовые переходы, изученные ими, сопровождаются, как и в модели Изинга, “спонтанным нарушением симметрии”: у потенциала имеется некоторая группа симметрий, а каждая из фаз уже неинвариантна относительно этой группы.

8. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ МОДЕЛЯХ (ТЕОРИЯ ПИРОГОВА–СИНАЯ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ)

Во всех перечисленных в предыдущем параграфе работах при доказательстве существования нескольких фаз при низких температурах использовалось наличие тех или иных симметрий модели. Для моделей общего вида с конечным спиновым пространством, не имеющих каких-либо явных симметрий, С. Пироговым и Я. Синаем [57] была построена изящная теория, позволяющая находить при низких температурах различные фазы и описывать фазовую диаграмму (см. также книгу Я.Г. Синая [64]). Изложим основной результат этой теории. Поскольку параметр β (обратная температура) здесь очень важен, мы выделим его и будем рассматривать потенциал вида $V_A = \beta\hat{V}_A$, где $\hat{V}_A$ – локальная функция, не зависящая от β. В дальнейшем под потенциалом мы будем подразумевать именно семейство $\{\hat{V}_A\}$ и обозначать их по-прежнему $\{V_A\}$; параметр β, не оговаривая этого каждый раз, мы считаем достаточно большим. Пусть S – конечное множество с равномерной мерой $\nu(\{s\}) = 1$, $s \in S$, $T = \mathbb{Z}^d$ и задан финитный и периодический потенциал $\{V_A^0\}$ т.е. инвариантный относительно какой-нибудь подгруппы $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^d$ конечного индекса (фактор-группа $\mathbb{Z}^d/\mathcal{L}$ – конечна). Предположим далее, что существует $r \geq 2$ периодических основных состояний у потенциала $\{V_A^0\}$

$$\sigma_{\mathrm{gr}}^{(1)}, \ldots, \sigma_{\mathrm{gr}}^{(r)} \tag{8.1}$$

$\sigma_{\mathrm{gr}}^{(i)} \in \Omega$, удовлетворяющих условию Пайерлса (см. выше). Рассмотрим $(r-1)$-параметрическое возмущение потенциала $\{V_A^0\}$ переодическими и финитными потенциалами $\{V_A^i\}, i = 1, \ldots, r-1$:

$$V_A^{(\mu)} = V_A^{(0)} + \mu_1 V_A^{(1)} + \ldots + \mu_{r-1} V_A^{(r-1)}, \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{r-1}), \tag{8.2}$$

где μ_i достаточно малы: $|\mu_i| < \varepsilon_0$. Оказывается, что при этом все периодические основные состояния потенциала $(V_A^{(\mu)})$ содержатся среди состояний $\{\sigma_{\mathrm{gr}}^{(i)}, i = 1, \ldots, r\}$. Предполагается, что семейство потенциалов $\{V_A^{(\mu)}\}$ "снимает вырождение" основных состояний потенциала $\{V_A^{(0)}\}$. Это означает, что для любого поднабора $\{\sigma^{(i_1)}, \ldots, \sigma^{(i_k)}\}$, $k \leq r-1$ основных состояний (8.1) найдется такое значение $\bar{\mu}$, что у потенциала $\{V_A^{(\bar{\mu})}\}$ множество основных состояний совпадает с этим поднабором. Рассмотрим те предельные гиббсовские распределения для потенциала $\{V_A^{(\mu)}\}$, которые являются пределами (если они существуют)

$$G_i^{(\mu,\beta)} = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^d} G_{\Lambda, \bar{\sigma}_{\Lambda'}^{(i)}} \tag{8.3}$$

конечных гиббсовских распределений с граничными конфигурациями $\bar{\sigma}_{\Lambda'}^{(i)} = \sigma_{\mathrm{gr}}^{(i)}|_{\Lambda'}$, совпадающими вне Λ с каким-нибудь из основных состояний $\{\sigma_{\mathrm{gr}}^{(i)}\}$. Тогда для каждого фиксированного и достаточно большого $\beta > 0$ и малых ε_0 множества параметров $\mu \in R^d$, при которых существуют пределы (8.3) (фазовая диаграмма) описываются так:

1. существует точка $\mu^0 = (\mu_i^0, \ldots, \mu_{r-1}^0)$, для которой существуют все r предельных распределений (8.3) (вершина диаграммы);

2. Существует r линий $l_i^{(1)}$ $i = 1, \ldots, r$, выходящих из вершины μ^0, на каждой из которых пропадает какое-нибудь одно из распределений (8.3);

3. существует $\frac{r(r-1)}{2}$ двумерных пленок $l_{ij}^{(2)}$, натянутых на линии $l_i^{(1)}$ и $l_j^{(1)}$, на каждой из которых отсутствуют два распределения $G_i^{(\mu,\beta)}$ и $G_j^{(\mu,\beta)}$;

4. далее существуют трехмерные "клинья" $l_{i,j,k}^{(3)}$ ограниченные соответствующими пленками, на которых теряются три распределения (8.3) и т.д.

В конце концов остается r областей размерности $r-1$, ограниченных перечисленными выше гранями и в каждой из этих областей живет какое-нибудь одно из распределений (8.3). Таким образом, топологически фазовая диаграмма (при каждом фиксированном β) представляет собой часть границы r-мерного симплекса, примыкающая к его вершине. При этом подтверждается известное правило фаз Гиббса: размерность каждого страта + число фаз, 'живущих' на нем, на единицу больше числа параметров $\{\mu_i\}$. Типичные конфигурации для построенных таким образом распределений $G_i^{(\mu,\beta)}$ (т.н. 'чистых фаз') выглядит аналогично тому, что мы видели для модели Изинга: в бесконечном "океане", покрытом соответствующим основным состоянием $\sigma_{\mathrm{gr}}^{(i)}$ находятся конечные 'материки', покрытые другими основными состояниями (и, быть может, с внутренними 'озерами' из состояния $\sigma_{\mathrm{gr}}^{(i)}$).

Все эти результаты получены сведением исходного ансамбля к ансамблю т.н. 'маркированных' контуров. Этот сложный ансамбль в свою очередь сводится к более простому ансамблю 'геометрических' контуров, исследованному в работе [52] – в этом и состоит замечательная техническая идея теории. Д.Г. Мартиросяном в работе [53], было показано, что для тех значений параметров $\{\mu_i\}$, которые лежат на линиях l_i (а также в точке μ_0) нет других периодических предельных распределений, кроме построенных по теории Пирогова–Синая.

Для систем с непрерывным пространством спинов исследование фазовых переходов было начато в работах В.А. Малышева [58], В.А. Малышева и Ю.А. Терлецкого [62] (см.также книгу В.А. Малышева и Р.А. Минлоса [24]). В работе Р.Л. Добрушина и М. Заградника [63], где изучается фазовый переход решетчатой модели с непрерывным и некомпактным спиновым пространством, контурный метод сочетается с методом кластерных разложений. В частности, фазовый переход в этой работе был установлен для случая потенциала, имеющего один глобальный и один локальный минимум и он происходит в области конечных β. Этот результат - очень неожиданный – был до этого получен в работе Р.Л. Добрушина и С.Б. Шлосмана [41] с помощью метода 'отражательной положительности'. Метод, развитый в работе Р.Л. Добрушина и М. Заградника, состоящий в "частичном суммировании" по конфигурациям, мало уклоняющимся от основного состояния, был использован в работе Е.И. Динабурга, А.Е. Мазеля и Я.Г. Синая [68] при изучении решетчатых моделей, для которых первоначальный подход Пирогова–Синая оказывается неприменимым. В этой работе был развит специальный метод, обобщающий метод Пайерлса применительно к модели ANNNI. До этого модель ANNNI изучалась в работе [67].

В работах Е.Н. Петровой [65] и Ф.Ф. Галеба [66] были рассмотрены фазовые переходы в системах со счетным числом состояний и построено счетное число фаз.

К рассматриваемой теме тесно примыкает обширное исследование Р.Л. Добрушина, Р. Котецкого и С.Б. Шлосмана [69], посвященное описанию формы "капли". Напомним, что в модели Изинга "каплей" в типичной конфигурации для условного ансамбля, скажем $G_\Lambda^+(\cdot/e(\sigma)=e)$ (см.выше) называют единственный макроскопически большой материк $(-)$-фазы, окруженный $(+)$-фазой. Оказывается, что при достаточно большом Λ – граница капли близка к некоторому овалу, гомотетичному определенной геометрической фигуре. Эта фигура была открыта – на основе феноменологических соображений - в конце позапрошлого века Г.В. Вульфом и носит название овала Вульфа. Замечательно, что форму Вульфа удалось вывести непосредственно из начальных принципов (правда, ценой очень сложных построений). В связи с исследованиями по форме "капли" в работе Р.Л. Добрушина и С.Б. Шлосмана [42] были изучены вероятности больших и умеренных уклонений от среднего значения для намагниченности в ансамбле G_Λ^+. Оказалось, что в случае, когда удельная намагниченность больше средней, вероятности больших уклонений выглядят "классически", а в противоположном случае вид этих вероятностей отличен от "классического".

В заключение нашего обзора следует указать более общую схему гиббсовского подхода. А именно, пусть на пространстве $\Omega = S^T$ уже задано некоторое распределение вероятностей P. Тогда для любого конечного множества $\Lambda \subset T$ и любой граничной конфигурации $\bar{\sigma}_{\Lambda'}$ распределение $G_{\Lambda,\bar{\sigma}_{\Lambda'}}$ на Ω задать формулой аналогичной (2.4) (или (2.14)):

$$\frac{dG_{\Lambda,\bar{\sigma}_{\Lambda'}}}{dP}(\sigma) = \frac{1}{Z_\Lambda(\bar{\sigma}_{\Lambda'})}\exp\{-H_\Lambda(\sigma_\Lambda|\bar{\sigma}_{\Lambda'})\}, \tag{8.4}$$

где $H_\Lambda(\sigma_\Lambda|\bar{\sigma}_{\Lambda'})$ – по прежнему имеет вид (2.13) и затем уже перейти к предельному распределению G на Ω. Это распределение обычно называют гиббсовской *перестройкой* 'свободного' поля P. Заметим, что мы фактически уже сталкивались с таким подходом на стр. 147 при разборе модели с потенциалом (3.6), (3.7) – сначала мы построили вспомогательное гауссовское поле G^{gauss} на Ω по квадратичной части потенциала, а затем уже полное поле G, определенное по формуле (8.4), где $P = G^{\text{гаусс}}$, а H_Λ задается оставшейся частью потенциала.

Если в случае дискретного T определение (8.4) (при условии, что P также является некоторым гиббсовским распределением) служит лишь удобным техническим приемом, то в случае непрерывного пространства T определение (8.4) является, как правило, единственно возможным.

В качестве примера рассмотрим так называемые $P_2(\varphi)$ модели. В этом случае P есть гауссовское поле со спектральной плотностью $\frac{1}{\lambda^2+m^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, m – масса бозона (так называемое поле Молчана–Нельсона (см. [32])). Это поле является марковским и его типичные конфигурации – обобщенные функции. Энергия взаимодействия $H_\Lambda(\sigma)$, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$ равна

$$H_\Lambda(\sigma|\bar{\sigma}_{\Lambda'}) = \beta\int_\Lambda : P(\sigma(x)) : dx,$$

где σ – обобщенная функция такая, что ее значения $\sigma|_{\partial\Lambda} = \bar{\sigma}_{\Lambda'}|_{\partial\Lambda}$ на границе Λ – фиксированы, $P(\sigma)$ – полином четной степени с положительным старшим коэффициентом, а $: P(\sigma) :$ – его определенная регуляризация – так называемое отображение Ито–Вика (см. [33]). Заметим, что пример решетчатого квантового поля, приведенный на стр. 143, является решетчатым аналогом поля со взаимодействием

$$\beta\int : \sigma^4(x) : dx.$$

Вся эта тематика возникла из работ Дж. Глимма и А. Джаффе [26] и работы Е. Нельсона [27] и была бурно подхвачена многими авторами (вся эта деятельность с известным пафосом называлась тогда 'марковской революцией') и не обошла наш семинар. В работе [17] Р.Л. Добрушина и Р.А. Минлоса была сформулирована гипотеза о том, что при больших β у $P_2(\varphi)$ модели имеется несколько предельных полей (фазовый переход). Эта гипотеза была затем доказана Дж. Глиммом и А. Джаффе (см. [26]). Кроме того, в работах [32] и [33] Р.Л. Добрушин и Р.А. Минлос подробно изучили свойства поля Молчана–Нельсона, а также дали детальное описание конструкции Ито–Вика. В работе [34] С.А. Пирогов и Я.Г. Синай ввели понятие асимптотического основного состояния σ^{aysmp}_{ground} для $P_2(\varphi)$ моделей. Из-за того, что конфигурации поля обобщенные функции, а функционал $: P(\sigma) :$ имеет сложную структуру, определение основного состояния довольно сложное и мы его не приводим. В работе [34] было установлено существование при больших β двух таких состояний, равных константе: $\sigma^{asymp}_{gr} = const$.

На этом мы заканчиваем наш обзор. К сожалению, его объем не позволил нам включить сюда большое количество других работ участников семинара, посвященных гиббсовским полям (точечные поля в непрерывном пространстве, исследования по фазовым переходам 2-ого рода, автомодельные поля, метод трансфер-матриц, соотношения двойственности и т.д.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р.А. Минлос. Предельное распределение Гиббса. Функц.анализ и его прилож., 1967, т. 1, № 2, стр.60–73 (рус.)

2. Р.А. Минлос. Регулярность предельного распределения Гиббса. Функц.анализ и его приложения, 1967, т. 1, № 3, стр. 40–53.

3. R.A. Minlos. Introduction to Mathematical Statistical Physics. AMS University lecture, v. 19, 1999.

4. Р.Л. Добрушин. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности. Теория вероятностей и ее прим., 1968, т. 13, № 2, стр. 201–229.

5. Р.Л. Добрушин. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. Функц. анализ и его прилож., 1968, т. 2, № 4, стр. 31–43.

6. Р.Л. Добрушин. Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов. Функц. анализ и его прилож., т. 2, № 4, стр. 44–57.

7. Р.Л. Добрушин. Гиббсовские поля – общий случай. Функц. анализ и его прил., 1968, т. 3, № 1, стр. 27–35.

8. O. Lanford, D. Ruelle. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. Comm. Math. Phys., 1969, v. 13, pp. 174–215.

9. Р.Л. Добрушин. Гиббсовские случайные поля для частиц без твердой сердцевины. ТМФ, 1970, т. 4, № 1, стр. 101–118.

10. Р.Л. Добрушин. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. Теор. вероятностей и ее прим., 1970, т. 15, № 3, стр. 469–497.

11. Р.Л. Добрушин. Гиббсовское состояние, описывающее сосуществование фаз для трехмерной модели Изинга. Теор. вероят. и ее прим., 1972, т. 17, № 4, стр. 619–639.

12. R.L. Dobrushin. Analyticity of correlation functions in one-dimensional classical systems with slowly decreasing potentials. Comm. Math. Phys., 1973, v. 32, № 4, pp. 269–289.

13. Р.Л. Добрушин. Условия отсутствия фазовых переходов в одномерных классических системах. Мат. сб., 1974, т. 93, № 1, стр. 29–49.

14. Р.Л. Добрушин и В.М. Герцик. Гиббсовские состояния в решетчатой модели с взаимодействием на два шага. Функц. анализ и его прил., 1974, т. 8, № 3, стр. 12–25.

15. R.L. Dobrushin, S.B. Shlosman. Absence of Breakdown of continouos symmetry in two-dimensional models of statistical physics. Comm. Math. Phys., 1978, v. 42, № 1, pp. 31–40.

16. Р.Л. Добрушин, Р.А. Минлос. Исследование свойств обобщенных гауссовских случайных полей. Задачи механики и матем.физики. М.: Наука, 1976, стр. 117–165.

17. Р.Л. Добрушин, Р.А. Минлос. Построение одномерного квантового поля с помощью непрерывного марковского поля, Функц. анализ и его примен., 1979, т. 7, № 4, стр. 88–89.

18. R.L. Dobrushin. Gaussian random fields - Gibbsian point of view Multicomponent random systems. Adv. Prob. Relat. Topicsб New-YorkЖ Dekker 1980, v. 6, pp. 119–152.

19. R.L. Dobrishin, E.A. Pechersky. A criterion of the uniqueness of Gibbsian fields in non-compact case Probability theory and mathematical statistics. Lecture Notes in Math. Springer, 1983, v. 1021, pp. 97–110.

20. R.L. Dobrushin, S.B. Shlosman. Competly analitical Gibbs fields. Constructive criterion for the uniquenes of Gibbs fields. Statistical physics and dynamical systems. Rigorous results Progress in physics Birhauser, 1985, v. 10, pp. 371–403.

21. R.L. Dobrushin. A new approach to the analysis of Gibbs perturbations of Gaussian fields. Selecta Math. Soc.б 1988, № 3, pp. 221–277.

22. В.А. Малышев. Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля. Успехи мат. наук, 1980, т. 35, № 2, стр. 3–53.

23. Y.M. Park. The cluster expansion for classical and quantum lattice systems. J. Stat. Phys., 1982, v. 27, № 3, pp. 553–576.

24. В.А. Малышев, Р.А. Минлос. Гиббсовские случайные поля (метод кластерных разложений). М.Ж Наука, 1985.

25. R.L.Dobrushin. Perturbation methods in the theory of Gibbsian fields. Lectures in Math., Berlin: Springer, 1996, v. 1648, pp. 1–66.

26. J.Glimm, A.Jaffe. Quantum Physics – a functional integral point of view. New York, 1981.

27. E. Nelson, Probability theory and Euclidean Field theory. Constructive quantum field theory, 25, Springer Verlag, 1979.

28. G. Gruber, H. Kunz. Ceneral properties of polymer systems. Comm. Math. Phys., 1971, v. 22, pp. 133–161.

29. П. Беллингсли. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. Перевод с английского: P. Billingsley "Convergence of probability measures".

30. R.L. Dobrushin, S.B. Shlosman. Constructive criterion for uniqueness of Gibbs fields. Statistical Physics and Dynamical Systems Rigogous results. Progress in Physics. 1985, v. 10, pp. 347–370.

31. R.L. Dobrushin, S.B. Shlosman. Completly Analitical interaction: constructive description. J. Stat. Phys., 1987, v. 23, № 5/6, pp. 983–1004.

32. R.L. Dobrushun, R.A. Minlos, An investigation of the properties of generalized Gaussian random fields, Selecta Math. Sov., 1981, 1, 3, 215–261.

33. Р.Л. Добрушин, Р.А. Минлос, Полиномы от линейных случайных функций, УМН, 1977, 32, 2, 67–122.

34. S.A. Pirogov, Ya.G. Sinai, Ground states in twodimensional boson quantumfield theory, Ann. Phys., 109, 2, 393–400.

35. F.J. Dyson. Existence of a phase transition in one dimensional Ising ferromagnet. Commun. Math. Phys., 12, 1971, pp. 901–1007.

36. P.M. Bleher and Ja.G. Sinai, Investigation of the Critical Point in Models of the Type of Dyson's Hierarchical Models, Commun. Math. Phys., 33, 23–42 (1973).

37. P.M. Bleher and Ya.G. Sinai, Critical Indices for Dyson's Asymptotically- Hierarchical Models, Commun. Math. Phys., 45, 247–278 (1975).

38. P.M. Bleher and P. Major, Critical Phenomena and Universal Exponents in Statistical Physics. On Dyson's Hierarchical Model, Ann. Prob., 1987, 15, 2, 431–477.

39. Р.Л. Добрушин. Условия отсутствия фазовых переходов в одномерных классических системах. Матем. Сборник, 93, 1974, № 1, стр. 29–49.

40. R.L. Dobrushin, I. Kolafa and S.B. Shlosman. Phase diagram of the twodimensional Ising antiferromagnet (computer assisted proof), Comm. Math. Phys., 1985, 102, 1, 89–103.

41. R.L. Dobrishin, S.B. Shlosman. Phase corresponding to minima of the local energy. Selecta Math. Soviet, v. 1, № 4, pp. 317–338.

42. R.L. Dobrushin, S.B. Shlosman. Large and moderate deviations in the Ising model Probability contributions in statistical mechanics, R.L. Dobrushin editor, Providence, AMS, 1994, pp. 91–219.

43. N.D. Mermin. Absence of ordering in certain classical systems. J. Math. Phys., 1967, 8, 5, 1061–1064.

44. J. Frohlich, B. Simon, T. Spenser. Infrared Bounds. Phase transitions and continous symmetry breakdown. Comm. Math. Phys., 50 (1976), pp. 79–95.

45. R. Peierls. Ising's model of ferromagnetism. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1936, v. 32, part 3, pp. 477–481.

46. R. Griffiths. 1964, Peierls proof of spontaneous magnitization of a two-dimensional Ising ferromagnet. Phys. Rev., 1964, v. 136, № 2A, pp. 437–439.

47. Ф.А. Березин, Я.Г. Синай. Существование фазового перехода у решетчатого газа с притяжением между частицами. Труды Моск. Мат. Об-ва, 1967, т. 17, стр. 197.

48. Р.Л. Добрушин. Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга. Теор.вероят. и ее применения, 1965, т. 10, № 2, стр. 209–230.

49. R.L. Dobrushin. Existence of phase transitions in models of a lattice gas. Proc.Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Univ. of Calif. Press, 1966, v. 3, pp.73–87.

50. Р.А. Минлос, Я.Г. Синай. Новые результаты о фазовых переходах 1-ого рода в решетчатых системах. Труды Моск. Мат. Об-ва, 1967, т. 17, стр. 213–242.

51. Р.А. Минлос, Я.Г. Синай. Явление разделения фаз в некоторых решетчатых моделях. I. Мат. Сборник, 1967, т. 73, № 3, стр.375–448.

52. Р.А. Минлос, Я.Г. Синай. Явление разделения фаз в некоторых решетчатых моделях. II. Труды Моск. Мат. Об-ва, 1968, т. 19, стр. 113–178.

53. Д.Г. Мартиросян. К вопросу об оценке сверху числа периодических гиббсовских состояний для модели решетчатого газа. УМН, 1975, т. 30, № 6, стр. 181–182.

54. Наср Али. Гиббсовские случайные поля для модели Изинга. Труды Моск. Мат. Об-ва, 1975, т. 32, стр. 187–209.

55. В.М. Герцик. Условия неединственности гиббсовского состояния для решетчатых моделей с финитным потенциалом взаимодействия. Изв. АН СССР, сер. мат., 1976, т. 40, № 2, стр. 448–462.

56. E.A. Pechersky. The peierls condition (or GPS-condition) not always statis field, Sel. Math. Sov., v. 3, № 1, 1983/1984, pp. 87–91.

57. С.А. Пирогов, Я.Г. Синай. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем. I. Теор. и Мат. физика, 1975, т. 25, стр. 358–369. II Теор. и Мат. физика, 1976, т. 26, стр. 61–76.

58. V.A. Malyshev. Phases transitions in classical Heisenberg ferromagnets with arbitary parameter of anisotropy. pp. 75–82.

59. V.A. Malyshev. Complete cluster expansion for weakly coupled Gibbs random fields. In "Meny component systems". Springer, 1979.

60. V.A. Malyshev, I. Nicolaev. Uniqueness of Gibbs fields via cluster expansions., J. Stat. Phys., 1984, v. 35, № 3, pp. 375–379.

61. В.А. Малышев, Р.А. Минлос, Е.Н. Петрова, Ю.А. Терлецкий. Обобщенные контурные модели. Итоги науки и техники, т. 18, М.: ВИНИТИ, 1981, стр. 3–51.

62. В.А. Малышев, Ю.А. Терлецкий. Предельная теорема для некоммутативных полей. Вестник МГУ, сер. I мех.-мат., 1978, вып. 3, стр.47–51.

63. R.L. Dobrushin, M. Zagradnic. Phase diagramm for continous - spin models: an extension of the Pirogov–Sinai theory, Math. problems of statistical mechanics and dynamics. Mat. Appl. Reidel, 1986, v. 6, pp. 1–123.

64. Я.Г. Синай. Теория фазовых переходов (строгие результаты), Москва, Наука, 1980.

65. Е.Н. Петрова. Низкотемпературные разложения в $\mathbf{Z}^1$-модели. Сб. Математические модели статистической физики. Тюмень. Из-во Тюменского Ун-та, 1982, стр. 79–85.

66. Ф.Ф. Галеб. Существование бесконечного числа фаз в некоторых моделях статистической физики. Труды Моск. Мат. Об-ва, 1982, т. 44, стр. 109–123.

67. M.I. Fisher, M.W. Selke, Low temperature energy of ANNNI-model near its multiphase point, Phil., Transactions Royal Soc., 302, 1, 1981.

68. Е.И. Динабург, А.Е. Мазель, Я.Г. Синай. The ANNNI model and contour model with interaction. In: Math. Phys. Rev. Sov. Sci. Rev. set C, Novikov S.P. ed., vol 6, New-York: Cordon and Breach, 1986.

69. R.L. Dobrushin, R.K. Kotecky, S.B. Shlosman. Wulf construction. A global shape from local interaction. Providece AMS, 1992, v. 104.

Gibbs Random Fields on the Lattice. Definitions, Existence and Uniqueness and Phase Transitions. From the History of the Seminar on Statistical Physics in the Faculty of Mathematics and Mechanics (1962–1994)

R.A. Minlos, E.A. Pechersky, and S.A. Pirogov

Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Moscow Large Seminar on Statistical Physics is one of the first in the world which were devoted to rigorous methods in Statistical Physics. To appreciate the achievements of the seminar, it is enough to consider the publications of the heads of the seminar: R.L. Dobrushin, V.A. Malyshev, R.A. Minlos, Ya.G. Sinai. In this paper, a review of the seminar work (far from compete) is presented. The main stress is done on basic definitions and the most important results.

KEYWORDS: statistical physics, lattice, phase transitions