Информационные процессы, Том 13, № 3, 2013, стр. 185–197

Системы $M^\theta/G/1/m$ и $M^\theta/G/1$ с параметрами функционирования, зависящими от длины очереди

К. Ю. Жерновый, Ю. В. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 27.08.2013

Аннотация—Изучены системы $M^\theta/G/1/m$ и $M^\theta/G/1$, в которых длительность обслуживания и параметры входного потока зависят от длины очереди и определяются в моменты окончания обслуживания заявок. С помощью подхода, основанного на идее метода потенциала В. С. Королюка, найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости и стационарное распределение числа заявок в системе. Как частный случай, рассмотрена система $M^\theta/G/1$ с одним порогом переключения режимов функционирования. Полученные результаты проверены с помощью имитационных моделей, построенных с привлечением инструментальных средств GPSS World.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система обслуживания с параметрами, зависящими от длины очереди, групповое поступление заявок, период занятости, распределение числа заявок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели систем массового обслуживания, в которых заявки прибывают группами, а параметры функционирования целенаправленно изменяется вместе с длиной очереди, часто используются для изучения телекоммуникационных процессов, в частности процессов передачи данных в сетях ATM с использованием технологий мультиплексирования (см. библиографию в работе [1]). Продолжая исследования, начатые в статьях [1, 2], в настоящей работе мы изучаем системы $M^\theta/G/1/m$ и $M^\theta/G/1$, для которых существует возможность переключения режимов функционирования в моменты окончания обслуживания заявок. Как и в работе [1], длительность обслуживания каждой заявки определяется согласно правилу: если в момент начала обслуживания этой заявки в системе находится n заявок, то её времени обслуживания соответствует функция распределения $F_n(x)$. В отличие от [1], параметры входного потока заявок для каждого режима могут быть разными и определяются в моменты окончания обслуживания заявок. Системы обслуживания с возможностью переключений режимов функционирования изучались, в частности, в работах [3; 4; 5, с. 56–61].

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим систему обслуживания $M^\theta/G/1/m$, которую формально опишем следующим образом. Пусть для n–ого режима функционирования системы заданы последовательности независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{\alpha_{ni}\}$, $\{\theta_{ni}\}$ $(i \geq 1,\ n \geq 0)$, $\{\beta_{ni}\}$ $(i \geq 1,\ n \geq 1)$, где α_{ni} — время между поступлением $(i-1)$–ой и i–ой группы заявок, θ_{ni} — число заявок в i–ой группе, а β_{ni} — время обслуживания i–ой заявки. Считаем, что $\mathbf{P}\{\alpha_{ni} < x\} = 1 - e^{-\lambda_n x}$ $(\lambda_n > 0)$, $\mathbf{P}\{\theta_{ni} = j\} = a_{nj}$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{nj} = 1$. Если $\mathbf{P}\{\theta_{ni} = 1\} = a_{n1} = 1$, то в n–ом режиме заявки в систему поступают по одной.

Если $\xi(t)$ — число заявок в системе в момент времени t, и в момент $\widetilde{t}$ начала обслуживания i–ой заявки $\xi(\widetilde{t}) = n$, то $\mathbf{P}\{\beta_{ni} < x\} = F_n(x)$ $(x \geq 0)$, $F_n(0) = 0$ $(n \in \{1, 2, \ldots, m+1\})$. Для параметров входного потока λ_n и a_{nj} номер режима n равен числу заявок в системе в момент окончания обслуживания заявки.

Итак, различные режимы функционирования системы отличаются друг от друга параметрами входного потока λ_n, a_{nj} $(n \geq 0)$ и функциями распределения $F_n(x)$ $(n \geq 1)$ длительности обслуживания одной заявки, а переключения режимов может осуществляться в моменты окончания обслуживания заявок.

Заявки обслуживаются по одной, обслуженная заявка покидает систему, и обслуживающее устройство немедленно начинает обслуживать заявку из очереди при её наличии или же ждёт поступления очередной группы заявок. Применяется дисциплина обслуживания FIFO. Очередь внутри одной группы заявок может быть организована произвольно, поскольку изучаемые нами характеристики не зависят от способа её организации. Максимальное количество заявок, которые одновременно могут находиться в очереди, не превышает числа m. Обозначим описанную систему обслуживания через $\mathrm{M_n^{\theta_n}/G_1, \ldots, G_{m+1}/1/m}$.

Обозначим через $\mathbf{P}_n$ условную вероятность при условии, что в начальный момент времени в системе находится $n \geq 0$ заявок, а через $\mathbf{E}$ $(\mathbf{P})$ условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что система начинает работать в момент прибытия первой группы заявок.

Введём следующие обозначения: $\eta(x)$ — число заявок, прибывающих на промежутке времени $[0; x)$; a_{nj}^{k*} — k–кратная свёртка последовательности a_{nj};

$$f_n(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_n(x), \qquad M_n = \int_0^\infty x dF_n(x) < \infty, \qquad \overline{F}_n(x) = 1 - F_n(x);$$

$$\alpha_n(z) = \sum_{k=1}^\infty z^k a_{nk}; \quad \overline{a}_{nj} = \sum_{k=j}^\infty a_{nk}; \quad \overline{p}_{nj} = \sum_{k=j}^\infty p_{nk}; \quad \overline{q}_{nj} = \sum_{k=j}^\infty q_{nk}; \quad e_{a_n} = \sum_{k=1}^\infty k a_{nk} < \infty;$$

$$\begin{aligned} p_{ni}(s) &= \frac{1}{f_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}_n\{\eta(x) = i+1\}\, dF_n(x) \\ &= \frac{1}{f_n(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{n,\,i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda_n+s)x} \frac{(\lambda_n x)^k}{k!}\, dF_n(x) \qquad (n \geq 1,\ i \geq -1); \\ q_{ni}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}_n\{\eta(x) = i\}\, \overline{F}_n(x)\, dx \\ &= \sum_{k=0}^{i} a_{ni}^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda_n+s)x} \frac{(\lambda_n x)^k}{k!}\, \overline{F}_n(x)\, dx \qquad (n \geq 1,\ i \geq 0); \end{aligned} \tag{1}$$

$$R_{n1}(s) = \frac{1}{f_n(s) p_{n,-1}(s)}, \quad R_{n,k+1}(s) = \frac{R_{nk}(s) - f_n(s) \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_{ni}(s) R_{n,k-i}(s)}{f_n(s) p_{n,-1}(s)} \qquad (n \geq 1,\ k \geq 1);$$

$$p_{ni} = \lim_{s \to +0} p_{ni}(s), \qquad q_{ni} = \lim_{s \to +0} q_{ni}(s), \qquad R_{ni} = \lim_{s \to +0} R_{ni}(s). \tag{2}$$

Все зависимости от s рассматриваются для значений аргумента $\operatorname{Re} s \ge 0$.

Отметим, что для каждого $n \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ выполняется равенство $\sum\limits_{i=-1}^{\infty} p_{ni} = 1$, поэтому последовательность p_{ni} можно интерпретировать как распределение скачков полунепрерывного снизу случайного блуждания.

Учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k q_{nk} = \frac{1 - f_n\big(\lambda_n(1 - \alpha_n(z))\big)}{\lambda_n(1 - \alpha_n(z))}\,,$$

получим равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_{nk} = M_n. \tag{3}$$

Последовательности q_{nk} и R_{nk} можно вычислить с помощью рекуррентных соотношений:

$$q_{n0} = \frac{1 - f_n(\lambda_n)}{\lambda_n}\,, \qquad q_{nk} = \sum_{i=1}^{k} a_{ni} q_{n,k-i} - \frac{p_{n,k-1}}{\lambda_n} \qquad (n,\, k \ge 1); \tag{4}$$

$$R_{n1} = \frac{1}{p_{n,-1}}\,, \qquad R_{n,k+1} = \frac{R_{nk} - \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_{ni} R_{n,k-i}}{p_{n,-1}} \qquad (n,\, k \ge 1). \tag{5}$$

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК НА ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ

Пусть $\tau(m) = \inf\{\, t \ge 0 : \xi(t) = 0 \,\}$ обозначает первый период занятости для системы $\mathrm{M_n^{\theta_n}/G_1, \ldots, G_{m+1}/1/m}$;

$$\begin{aligned} &\varphi_n^{(m)}(t,\, k) = \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t \,\}, \\ &\Phi_n^{(m)}(s, k) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi_n^{(m)}(t,\, k)\, dt \qquad (\, 1 \le n,\, k \le m+1\,). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\varphi_0^{(m)}(t,\, k) = 0$. С помощью формулы полной вероятности получим равенства

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(m)}(t,\, k) = &\sum_{j=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}_n\{\eta(x) = j\,\}\, \varphi_{n+j-1}^{(m)}(t - x,\, k)\, dF_n(x) \\ &+ \int_0^t \mathbf{P}_n\{\eta(x) \ge m + 1 - n\,\}\, \varphi_m^{(m)}(t - x,\, k)\, dF_n(x) + \big(\mathbf{P}_n\{\eta(t) = k - n\,\} \\ &+ I\{k = m+1\}\mathbf{P}_n\{\eta(t) \ge m + 2 - n\,\}\big)\overline{F}_n(t) \quad (1 \le n \le m). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 или 0, в зависимости от того, состоялось событие A или нет.

Введя обозначение $f_{(n)}(s, k, m) = q_{n,k-n}(s) + I\{k = m+1\}\overline{q}_{n,m+2-n}(s)$, и учитывая соотношения (1), из (6) получим систему уравнений для определения функций $\Phi_n^{(m)}(s, k)$

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(m)}(s, k) = f_n(s) &\sum_{j=0}^{m-n} p_{n,j-1}(s) \Phi_{n+j-1}^{(m)}(s, k) \\ &+ f_n(s)\overline{p}_{n,m-n}(s)\Phi_m^{(m)}(s, k) + f_{(n)}(s, k, m) \qquad (1 \le n \le m), \end{aligned} \tag{7}$$

с граничным условием

$$\Phi_0^{(m)}(s,k) = 0. \tag{8}$$

Найдём функции $\Phi_n^{(m)}(s,k)$, решив систему уравнений (7), (8).

Будем использовать функции $\mathcal{R}_{ni}(s)$, определяемые с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered}\mathcal{R}_{n,1}(s) = R_{n+1,1}(s); \qquad \mathcal{R}_{n,j+1}(s) = R_{n+1,1}(s)\Bigg(\mathcal{R}_{n+1,j}(s) \\ - f_{n+1}(s)\sum_{i=0}^{j-1} p_{n+1,i}(s)\mathcal{R}_{n+1+i,j-i}(s)\Bigg) \qquad (1 \le j \le m-n-1, \quad 0 \le n \le m-1).\end{gathered} \tag{9}$$

Теорема 1. *Для всех* $1 \le k \le m+1$ *и* $\operatorname{Re} s > 0$ *функции* $\Phi_n^{(m)}(s,k)$ *определяются в виде*

$$\begin{gathered}\Phi_n^{(m)}(s,k) = \Bigg(\mathcal{R}_{n,\,m-n}(s) - \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni}(s) f_{n+i}(s)\overline{p}_{n+i,\,m-n-i}(s)\Bigg)\Phi_m^{(m)}(s,k) \\ - \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni}(s) f_{(n+i)}(s,k,m) \qquad (1 \le n \le m-1),\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\Phi_m^{(m)}(s,k) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i}(s) f_{(i)}(s,k,m)}{\mathcal{R}_{0m}(s) - \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i}(s) f_i(s)\overline{p}_{i,\,m-i}(s)}. \tag{11}$$

Доказательство. Докажем равенства (10) с помощью метода математической индукции. Уравнение (7) при $n = m$ принимает вид

$$\Phi_m^{(m)}(s,k) = f_m(s)p_{m,-1}(s)\Phi_{m-1}^{(m)}(s,k) + f_m(s)\overline{p}_{m,0}(s)\Phi_m^{(m)}(s,k) + f_{(m)}(s,k,m).$$

Учитывая, что $f_m(s)p_{m,-1}(s) = 1/R_{m,1}(s) = 1/\mathcal{R}_{m-1,1}(s)$, находим

$$\Phi_{m-1}^{(m)}(s,k) = \mathcal{R}_{m-1,1}(s)\Big(\big(1 - f_m(s)\overline{p}_{m,0}(s)\big)\Phi_m^{(m)}(s,k) - f_{(m)}(s,k,m)\Big).$$

Полученное равенство совпадает с (10) при $n = m-1$.

Предположим, что равенства (10) выполняются для всех натуральных n из множества $\{\widetilde{n}, \widetilde{n}+1, \ldots, m-2\}$, где $\widetilde{n}$ — фиксированное число ($1 < \widetilde{n} < m-1$). Докажем равенство вида (10) для $n = \widetilde{n}-1$. Из (7) при $n = \widetilde{n}$ получаем:

$$\begin{gathered}\Phi_{\widetilde{n}}^{(m)}(s,k) = f_{\widetilde{n}}(s)p_{\widetilde{n},-1}(s)\Phi_{\widetilde{n}-1}^{(m)}(s,k) + f_{\widetilde{n}}(s)p_{\widetilde{n},0}(s)\Phi_{\widetilde{n}}^{(m)}(s,k) + f_{\widetilde{n}}(s)\sum_{j=2}^{m-\widetilde{n}} p_{\widetilde{n},j-1}(s)\Phi_{\widetilde{n}+j-1}^{(m)}(s,k) \\ + f_{\widetilde{n}}(s)\overline{p}_{\widetilde{n},m-\widetilde{n}}(s)\Phi_m^{(m)}(s,k) + f_{(\widetilde{n})}(s,k,m).\end{gathered}$$

Отсюда находим

$$\Phi^{(m)}_{\widetilde{n}-1}(s,k) = R_{\widetilde{n},1}(s)\Bigg(\big(1-f_{\widetilde{n}}(s)p_{\widetilde{n},0}(s)\big)\Phi^{(m)}_{\widetilde{n}}(s,k) - f_{\widetilde{n}}(s)\sum_{j=2}^{m-\widetilde{n}} p_{\widetilde{n},j-1}(s)\Phi^{(m)}_{\widetilde{n}+j-1}(s,k)$$

$$-f_{\widetilde{n}}(s)\overline{p}_{\widetilde{n},m-\widetilde{n}}(s)\Phi^{(m)}_m(s,k) - f_{(\widetilde{n})}(s,k,m)\Bigg) = R_{\widetilde{n},1}(s)\Bigg(\big(1-f_{\widetilde{n}}(s)p_{\widetilde{n},0}(s)\big)\Bigg(\Big(\mathcal{R}_{\widetilde{n},\,m-\widetilde{n}}(s)$$

$$-\sum_{i=1}^{m-\widetilde{n}} \mathcal{R}_{\widetilde{n}i}(s)f_{\widetilde{n}+i}(s)\overline{p}_{\widetilde{n}+i,\,m-\widetilde{n}-i}(s)\Big)\Phi^{(m)}_m(s,k) - \sum_{i=1}^{m-\widetilde{n}} \mathcal{R}_{\widetilde{n}i}(s)f_{(\widetilde{n}+i)}(s,k,m)\Bigg)$$

$$-f_{\widetilde{n}}(s)\sum_{j=2}^{m-\widetilde{n}} p_{\widetilde{n},j-1}(s)\Bigg(\Big(\mathcal{R}_{\widetilde{n}+j-1,\,m-\widetilde{n}-j+1}(s)$$

$$-\sum_{i=1}^{m-\widetilde{n}-j+1} \mathcal{R}_{\widetilde{n}+j-1,i}(s)f_{\widetilde{n}+j-1+i}(s)\overline{p}_{\widetilde{n}+j-1+i,\,m-\widetilde{n}-j+1-i}(s)\Big)\Phi^{(m)}_m(s,k)$$

$$-\sum_{i=1}^{m-\widetilde{n}-j+1} \mathcal{R}_{\widetilde{n}+j-1,i}(s)f_{(\widetilde{n}+j-1+i)}(s,k,m)\Bigg) - f_{\widetilde{n}}(s)\overline{p}_{\widetilde{n},m-\widetilde{n}}(s)\Phi^{(m)}_m(s,k) - f_{(\widetilde{n})}(s,k,m)\Bigg).$$

Собрав в этом выражении все слагаемые, образующие коэффициент при $\Phi^{(m)}_m(s,k)$, и отдельно записав все остальные слагаемые, после использования соотношений (9) приходим к выражению

$$\Phi^{(m)}_{\widetilde{n}-1}(s,k) = R_{\widetilde{n},1}(s)\Bigg(\big(1-f_m(s)\overline{p}_{m,0}(s)\big)\Big(\big(1-f_{\widetilde{n}}(s)p_{\widetilde{n},0}(s)\big)\mathcal{R}_{\widetilde{n},\,m-\widetilde{n}}(s)$$

$$-f_{\widetilde{n}}(s)\sum_{j=2}^{m-\widetilde{n}} p_{\widetilde{n},j-1}(s)\mathcal{R}_{\widetilde{n}+j-1,\,m-\widetilde{n}-j+1}(s)\Big) - \sum_{i=2}^{m-\widetilde{n}} f_{\widetilde{n}-1+i}(s)\overline{p}_{\widetilde{n}-1+i,\,m-\widetilde{n}+1-i}(s)\Big(\mathcal{R}_{\widetilde{n},\,i-1}(s)$$

$$-f_{\widetilde{n}}(s)\sum_{k=0}^{i-2} p_{\widetilde{n},\,k}(s)\mathcal{R}_{\widetilde{n}+k,\,i-1-k}(s)\Big) - f_{\widetilde{n}}(s)\overline{p}_{\widetilde{n},m-\widetilde{n}}(s)\Bigg)\Phi^{(m)}_m(s,k)$$

$$-R_{\widetilde{n},1}(s)\Bigg(f_{(\widetilde{n})}(s,k,m) + \sum_{i=2}^{m-\widetilde{n}+1} f_{(\widetilde{n}-1+i)}(s,k,m)\Big(\mathcal{R}_{\widetilde{n},\,i-1}(s) - f_{\widetilde{n}}(s)\sum_{k=0}^{i-2} p_{\widetilde{n},\,k}(s)\mathcal{R}_{\widetilde{n}+k,\,i-1-k}(s)\Big)\Bigg)$$

$$= \Bigg(\mathcal{R}_{\widetilde{n}-1,\,m-\widetilde{n}+1}(s) - \sum_{i=1}^{m-\widetilde{n}+1} \mathcal{R}_{\widetilde{n}-1,\,i}(s)f_{\widetilde{n}-1+i}(s)\overline{p}_{\widetilde{n}-1+i,\,m-\widetilde{n}+1-i}(s)\Bigg)\Phi^{(m)}_m(s,k)$$

$$-\sum_{i=1}^{m-\widetilde{n}+1} \mathcal{R}_{\widetilde{n}-1,\,i}(s)f_{(\widetilde{n}-1+i)}(s,k,m).$$

Полученное выражение совпадает с (10) при $n = \widetilde{n} - 1$. Итак, равенства (10) доказаны.

Для получения формулы (11) достаточно положить $n = 0$ в (10) и использовать граничное условие (8). Теорема доказана. $\square$

4. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Для более компактной записи получаемых ниже формул условимся, что $\mathcal{R}_{m0}(s) \equiv 1$.

Если система начинает работать в момент прибытия первой группы заявок, то, используя распределение числа прибывающих заявок в группе, соответствующее режиму свободной системы, для всех $1 \le k \le m+1$ с помощью формулы полной вероятности получим равенства:

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{i=1}^{m} a_{0i}\Phi_i^{(m)}(s,k) + \overline{a}_{0,\,m+1}\Phi_{m+1}^{(m)}(s,k). \tag{12}$$

Учитывая, что

$$\varphi_{m+1}^{(m)}(t,\,k) = \int\limits_0^t \varphi_m^{(m)}(t-x,\,k)\,dF_{m+1}(x) + I\{k=m+1\}\overline{F}_{m+1}(t),$$

$$\Phi_{m+1}^{(m)}(s,k) = \Phi_m^{(m)}(s,k) + I\{k=m+1\}\frac{1-f_{m+1}(s)}{s}\,,$$

и используя соотношения (10), можем записать правую часть (12) в виде:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt &= \Biggl(\sum_{i=1}^{m} a_{0i}\Bigl(\mathcal{R}_{i,\,m-i}(s) - \sum_{j=1}^{m-i}\mathcal{R}_{ij}(s)f_{i+j}(s)\overline{p}_{i+j,\,m-i-j}(s)\Bigr)\\ &\quad + \overline{a}_{0,\,m+1}\Biggr)\Phi_m^{(m)}(s,k) - \sum_{i=1}^{m-1} a_{0i}\sum_{j=1}^{m-i}\mathcal{R}_{ij}(s)f_{(i+j)}(s,k,m)\\ &\quad + \overline{a}_{0,\,m+1}I\{k=m+1\}\frac{1-f_{m+1}(s)}{s}\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Для отыскания $\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt$ необходимо сложить равенства (13) для всех k от 1 до $m+1$. Учитывая определения $f_{(n)}(s,k,m)$ и $q_{ni}(s)$, нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{m+1} f_{(n)}(s,k,m) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{nk}(s) = \frac{1-f_n(s)}{s} \qquad (1 \le n \le m). \tag{14}$$

Итак, из (13) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для системы* $\mathrm{M_n^{\theta_n}/G_1,\dots,G_{m+1}/1/m}$ *преобразование Лапласа от функции распределения периода занятости определяется в виде*

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt &= \Biggl(\sum_{i=1}^{m} a_{0i}\Bigl(\mathcal{R}_{i,\,m-i}(s) - \sum_{j=1}^{m-i}\mathcal{R}_{ij}(s)f_{i+j}(s)\overline{p}_{i+j,\,m-i-j}(s)\Bigr) + \overline{a}_{0,\,m+1}\Biggr)\\ &\quad\times\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\mathcal{R}_{0i}(s)\dfrac{1-f_i(s)}{s}}{\mathcal{R}_{0m}(s) - \sum\limits_{i=1}^{m}\mathcal{R}_{0i}(s)f_i(s)\overline{p}_{i,\,m-i}(s)} - \sum_{i=1}^{m-1} a_{0i}\sum_{j=1}^{m-i}\mathcal{R}_{ij}(s)\frac{1-f_{i+j}(s)}{s}\\ &\quad + \overline{a}_{0,\,m+1}\frac{1-f_{m+1}(s)}{s}\,.\end{aligned} \tag{15}$$

Для отыскания $\int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt = \mathbf{E}\,\tau(m)$ необходимо перейти к пределу в равенстве (15) при $s\to+0$. Для этого будем использовать последовательности $\{p_{ni}\}$, $\{q_{ni}\}$ и $\{R_{ni}\}$, определённые согласно (2), а также последовательности $\{\mathcal{R}_{ni}\}$, полученные вследствие предельного перехода $\mathcal{R}_{ni} = \lim\limits_{s\to+0} \mathcal{R}_{ni}(s)$. Для $\mathcal{R}_{ni}$ из (9) вытекают рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_{n,1} = R_{n+1,1};\\ &\mathcal{R}_{n,j+1} = R_{n+1,1}\left(\mathcal{R}_{n+1,j} - \sum_{i=0}^{j-1} p_{n+1,i}\mathcal{R}_{n+1+i,j-i}\right) \qquad (1 \le j \le m-n-1,\ \ 0 \le n \le m-1). \end{aligned} \tag{16}$$

Используя соотношения (5) и (16), получим равенства

$$\mathcal{R}_{nk} - \sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{ni}\overline{p}_{n+i,\,k-i} = 1 \qquad (n \ge 0,\ \ k \ge 1). \tag{17}$$

Учитывая (3), (14) и (17), с помощью (15) приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Для системы* $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\dots,\mathrm{G}_{\mathrm{m}+1}/1/\mathrm{m}$ *средняя продолжительность периода занятости определяется в виде*

$$\mathbf{E}\,\tau(m) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i}M_i - \sum_{n=1}^{m-1} a_{0n} \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni}M_{n+i} + \overline{a}_{0,\,m+1}M_{m+1}. \tag{18}$$

Введём обозначения: $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k\,\} = \pi_k(m)$, $1 \le k \le m+1$. Рассуждая так же, как в работе [1], получаем формулы для стационарного распределения числа заявок в системе $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\dots,\mathrm{G}_{\mathrm{m}+1}/1/\mathrm{m}$.

Теорема 4. *Стационарное распределение числа заявок в системе* $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\dots,\mathrm{G}_{\mathrm{m}+1}/1/\mathrm{m}$ *определяется по формулам*

$$\begin{aligned} &\pi_0(m) = \frac{1}{1+\lambda_0\mathbf{E}\,\tau(m)}\,;\\ &\pi_k(m) = \lambda_0\pi_0(m)\left(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{0i}q_{i,k-i} - \sum_{n=1}^{k-1} a_{0n}\sum_{i=1}^{k-n}\mathcal{R}_{ni}q_{n+i,k-n-i}\right) \quad (1 \le k \le m);\\ &\pi_{m+1}(m) = \lambda_0\pi_0(m)\left(\sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i}\overline{q}_{i,m+1-i} - \sum_{n=1}^{m-1} a_{0n}\sum_{i=1}^{m-n}\mathcal{R}_{ni}\overline{q}_{n+i,m+1-n-i} + \overline{a}_{0,\,m+1}M_{m+1}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Обозначим через $\rho_i = \lambda_i M_i e_{a_i}$ $(1 \le i \le m+1)$ коэффициент загрузки системы в i-ом режиме её функционирования. Вычислив с помощью (18) отношение среднего числа обслуженных заявок за единицу времени к среднему числу всех прибывающих заявок за единицу времени [2], получим формулу для стационарной вероятности обслуживания для системы $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\dots,\mathrm{G}_{\mathrm{m}+1}/1/\mathrm{m}$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i} - \sum\limits_{n=1}^{m-1} a_{0n}\sum\limits_{i=1}^{m-n}\mathcal{R}_{ni} + \overline{a}_{0,\,m+1}}{e_{a_0} + \sum\limits_{i=1}^{m}\mathcal{R}_{0i}\rho_i - \sum\limits_{n=1}^{m-1} a_{0n}\sum\limits_{i=1}^{m-n}\mathcal{R}_{ni}\rho_{n+i} + \overline{a}_{0,\,m+1}\rho_{m+1}}\,. \tag{20}$$

Стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{E}\,Q(m)$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}\,w(m)$ находим по формулам

$$\mathbf{E}\,Q(m) = \sum_{k=1}^{m} k\pi_{k+1}(m); \qquad \mathbf{E}\,w(m) = \frac{\bigl(1+\lambda_0\mathbf{E}\,\tau(m)\bigr)\mathbf{E}\,Q(m)}{\lambda_0\Bigl(\sum\limits_{i=1}^{m}\mathcal{R}_{0i} - \sum\limits_{n=1}^{m-1} a_{0n}\sum\limits_{i=1}^{m-n}\mathcal{R}_{ni} + \overline{a}_{0,\,m+1}\Bigr)}\,. \tag{21}$$

5. СИСТЕМА $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1$

Предположим, что $P\{\beta_{ni} < x\} = F_n(x)$ для $n \in \{1,2,\ldots,h-1\}$ и $P\{\beta_{ni} < x\} = \widetilde{F}(x)$, $M_n = \widetilde{M}$, $R_{ni} = \widetilde{R}_i$ $(i \geq 1)$, $p_{ni} = \widetilde{p}_i$ $(i \geq -1)$, $q_{ni} = \widetilde{q}_i$ $(i \geq 0)$, $a_{ni} = \widetilde{a}_i$ $(i \geq 1)$, $\lambda_n = \widetilde{\lambda}$, $\alpha_n(z) = \widetilde{\alpha}(z)$ для $n \in \{h, h+1, \ldots, m+1\}$, где h — фиксированное число из множества $\{2,3,\ldots,m+1\}$. Обозначим такую систему обслуживания через $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1/\mathrm{m}$.

Используя соотношения (16) и (5), для системы $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1/\mathrm{m}$ получаем равенства

$$\mathcal{R}_{ni} = \widetilde{R}_i, \qquad n \in \{h-1, h, h+1, \ldots, m+1\}, \quad i \geq 1,$$

с учётом которых формула (18) приобретает вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\tau(m) &= \sum_{i=1}^{h-1}\mathcal{R}_{0i}M_i - \sum_{n=1}^{h-2}a_{0n}\sum_{i=1}^{h-1-n}\mathcal{R}_{ni}M_{n+i}\\ &+ \widetilde{M}\Biggl(\sum_{i=h}^{m}\mathcal{R}_{0i} - \sum_{n=1}^{h-1}a_{0n}\sum_{i=h-n}^{m-n}\mathcal{R}_{ni} - \sum_{n=h}^{m-1}a_{0n}\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i + \overline{a}_{0,\,m+1}\Biggr).\end{aligned} \tag{22}$$

Далее будем изучать соответствующую систему обслуживания без ограничений на длину очереди ($m = \infty$), которую обозначим через $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1$.

Для системы $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1$ введём следующие обозначения: $\xi_\infty(t)$ — число заявок в системе в момент времени t, $\tau(\infty) = \inf\{\,t \geq 0 : \xi_\infty(t) = 0\,\}$ — первый период занятости, $\widetilde{f}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}d\widetilde{F}(x)$, $\rho_i = \lambda_i M_i e_{a_i}$ $(1 \leq i \leq h-1)$, $\widetilde{\rho} = \widetilde{\lambda}\widetilde{M}e_{\widetilde{a}}$; $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\,\xi_\infty(t) = k\,\} = \pi_k(\infty)$, $k \geq 0$.

Отметим, что формулы для $\mathbf{E}\,\tau(\infty)$ и стационарного распределения числа заявок, полученные в статье [1] для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1$ в предположении, что выполняется условие Крамера, имеют место и без выполнения этого условия, поскольку предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{R}_n = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\,,$$

(лемма 1 статьи [1]) выполняется, если $\widetilde{\rho} < 1$ (см. утверждение на стр. 96 работы [6]).

Рассуждая так же, как в [1] при исследовании системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1$, после предельного перехода при $m \to \infty$ в равенствах (22) и (19) получим следующие утверждения для системы $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1$.

Теорема 5. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то для системы* $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\tau(\infty) &= \sum_{i=1}^{h-1}\mathcal{R}_{0i}M_i - \sum_{n=1}^{h-2}a_{0n}\sum_{i=1}^{h-1-n}\mathcal{R}_{ni}M_{n+i}\\ &+ \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\rho}}\left(e_{a_0} + \mathcal{R}_{01}(\rho_1 - 1) + \sum_{i=2}^{h-1}\Bigl(\mathcal{R}_{0i} - \sum_{n=1}^{i-1}a_{0n}\mathcal{R}_{n,i-n}\Bigr)(\rho_i - 1)\right).\end{aligned} \tag{23}$$

Теорема 6. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то для системы* $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{h}}/1$ *стационарное распределение числа заявок определяется по формулам*

$$\begin{aligned}\pi_0(\infty) &= \frac{1}{1+\lambda_0\mathbf{E}\,\tau(\infty)}\,;\\ \pi_k(\infty) &= \lambda_0\pi_0(\infty)\left(\sum_{i=1}^{k}\mathcal{R}_{0i}q_{i,k-i} - \sum_{n=1}^{k-1}a_{0n}\sum_{i=1}^{k-n}\mathcal{R}_{ni}q_{n+i,k-n-i}\right) \quad (k \geq 1).\end{aligned} \tag{24}$$

Зная стационарное распределение $\pi_k(\infty)$ $(k \geq 0)$, для отыскания стационарного значения средней длины очереди $\mathbf{E}\,Q(\infty)$ можно воспользоваться приближённой формулой [1]

$$\mathbf{E}\,Q(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_{k+1}(\infty) \approx \mathbf{E}\,Q_{(N)} = \sum_{k=1}^{N-1} k\pi_{k+1}(\infty) + \Big(N - 1 + \frac{\overline{\pi}_{N+1}(\infty)}{\pi_N(\infty)}\Big)\overline{\pi}_{N+1}(\infty), \tag{25}$$

где

$$\overline{\pi}_{N+1}(\infty) = 1 - \sum_{k=0}^{N} \pi_k(\infty),$$

а N настолько велико, что

$$N - 1 + \frac{\overline{\pi}_{N+1}(\infty)}{\pi_N(\infty)} > 0.$$

Стационарное значение среднего времени ожидания $\mathbf{E}\,w(\infty)$ находим по формуле

$$\mathbf{E}\,w(\infty) = \frac{\mathbf{E}\,Q(\infty)}{\overline{N}(\infty)}\,, \tag{26}$$

в которой выражение для среднего числа прибывающих заявок за единицу времени для рассматриваемой системы

$$\begin{aligned}\overline{N}(\infty) = \lambda_0\pi_0(\infty)\Bigg(&e_{a_0} + \sum_{i=1}^{h-1}\mathcal{R}_{0i}\rho_i - \sum_{n=1}^{h-2} a_{0n}\sum_{i=1}^{h-1-n}\mathcal{R}_{ni}\rho_{n+i} \\ &+ \frac{\widetilde{\rho}}{1-\widetilde{\rho}}\bigg(e_{a_0} + \mathcal{R}_{01}(\rho_1 - 1) + \sum_{i=2}^{h-1}\Big(\mathcal{R}_{0i} - \sum_{n=1}^{i-1} a_{0n}\mathcal{R}_{n,i-n}\Big)(\rho_i - 1)\bigg)\Bigg)\end{aligned} \tag{27}$$

получено с использования формулы (23) для $\mathbf{E}\,\tau(\infty)$.

6. СИСТЕМА $\mathrm{M}_\mathrm{n}^{\theta_\mathrm{n}}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$

Через $\mathrm{M}_\mathrm{n}^{\theta_\mathrm{n}}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ обозначим систему $\mathrm{M}_\mathrm{n}^{\theta_\mathrm{n}}/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1$, в которой $\lambda_n = \lambda$, $a_{ni} = a_i$ $(i \geq 1)$, $F_n(x) = F(x)$ для $1 \leq n \leq h-1$ и $\lambda_n = \widetilde{\lambda}$, $a_{ni} = \widetilde{a}_i$ $(i \geq 1)$, $F_n(x) = \widetilde{F}(x)$ для $n \geq h$, то есть систему с тремя режимами входного потока, двумя режимами обслуживания и одним порогом h переключения этих режимов. Свободной системе соответствуют параметры входного потока λ_0 и a_{0i} $(i \geq 1)$.

Введём обозначения: $M_n = M$, $R_{ni} = R_i$ $(i \geq 1)$, $p_{ni} = p_i$ $(i \geq -1)$, $\rho_n = \rho$ для $n \in \{1, 2, \ldots, h-1\}$.

Рассуждая так же, как в работе [1] при исследовании системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$, приходим к следующему утверждению

Теорема 7. *Если $\widetilde{\rho} < 1$, то для системы $\mathrm{M}_\mathrm{n}^{\theta_\mathrm{n}}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ средняя продолжительность периода занятости определяется в виде*

$$\mathbf{E}\,\tau(\infty) = M\sum_{i=1}^{h-1} R_i\overline{a}_{0,\,h-i} + \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\rho}}\bigg(e_{a_0} + (\rho - 1)\sum_{i=1}^{h-1} R_i\overline{a}_{0,\,h-i}\bigg). \tag{28}$$

С учётом (28) для системы $\mathrm{M}_\mathrm{n}^{\theta_\mathrm{n}}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ выражение (27) для среднего числа прибывающих заявок за единицу времени упрощается к виду

$$\overline{N}(\infty) = \frac{\lambda_0}{\big(1 + \lambda_0\mathbf{E}\,\tau(\infty)\big)\big(1 - \widetilde{\rho}\big)}\bigg(e_{a_0} + \big(\rho(1 - \widetilde{\rho}) + \widetilde{\rho}(\rho - 1)\big)\sum_{i=1}^{h-1} R_i\overline{a}_{0,\,h-i}\bigg). \tag{29}$$

7. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для каждой из систем $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ и $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1$ рассмотрим по два примера со следующими общими числовыми данными: $\lambda_0 = \lambda = 2$, $\widetilde{\lambda} = 1$, $h = 3$. Для системы $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ зададим значение $m = 6$. Параметры входного потока для свободной системы и первого режима функционирования системы будем считать одинаковыми.

Для **примера 1** определим первый режим функционирования системы так: заявки прибывают группами в количестве от одной до пяти с вероятностями $a_i = 0,2$ $(1 \le i \le 5)$, а время обслуживания распределено равномерно на промежутке [0, 2], следовательно $M = 1$, $e_{a_0} = e_a = 3$, $\rho = 6$. Во втором (послепороговом) режиме заявки прибывают по одной или по две с вероятностями $\widetilde{a}_1 = 0,75$, $\widetilde{a}_2 = 0,25$, а время обслуживания распределено равномерно на промежутке [1/3, 1]. Итак, $\widetilde{M} = 2/3$; $e_{\widetilde{a}} = 1,25$; $\widetilde{\rho} = 5/6$.

Пример 2: $a_1 = 0,75$, $a_2 = 0,15$, $a_3 = 0,1$, $\widetilde{a}_1 = 0,75$, $\widetilde{a}_2 = 0,25$, для первого режима время обслуживания распределено равномерно на промежутке [0, 1], а для второго — равномерно на промежутке [0; 0,5]. Следовательно, $M = 0,5$; $e_{a_0} = e_a = \rho = 1,35$; $\widetilde{M} = 0,25$; $e_{\widetilde{a}} = 1,25$; $\widetilde{\rho} = 0,3125$.

Пользуясь формулами (22) и (28), получаем следующие значения средней продолжительность периода занятости: $\mathbf{E}\,\tau(6) = 117,959$, $\mathbf{E}\,\tau(\infty) = 413,272$ (для данных примера 1); $\mathbf{E}\,\tau(6) = 3,369$, $\mathbf{E}\,\tau(\infty) = 3,462$ (для данных примера 2).

В таблицах 1–7 представлены стационарные распределения числа заявок и стационарные характеристики систем $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ и $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1$, вычисленные для данных примеров 1 и 2 по формулам (19), (24), (20), (21), (25), (26) и (29). Для сравнения в таблицах приведены значения соответствующих характеристик, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [7, 8]. Программа для GPSS World приведена в Приложении.

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок в системе $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ (данные 1)

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_k(6)$	0,00422	0,01298	0,04970	0,11604	0,17961	0,22500	0,24928	0,16318
$\pi_k(6)$ (GPSS World, $t = 10^5$)	0,00435	0,01359	0,04870	0,11496	0,17898	0,22454	0,24822	0,16666

Таблица 2. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ (данные 1)

Характеристика	$\mathbf{E}\,Q(6)$	$\mathbf{E}\,w(6)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(6)$
Аналитическое значение	3,946	2,793	0,694
Значение согласно GPSS World, $t = 10^5$	3,952	2,799	0,689

Таблица 3. Стационарное распределение числа заявок в системе $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1$ (данные 1)

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\pi_k(\infty)$	0,00121	0,00372	0,01423	0,03322	0,05142	0,06442	0,07137	$\cdots$
$\pi_k(\infty)$ (GPSS World, $t = 10^5$)	0,00142	0,00411	0,01406	0,03309	0,05134	0,06436	0,07194	$\cdots$

Таблица 4. Стационарное распределение числа заявок в системе $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ (данные 2)

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_k(6)$	0,12922	0,16967	0,23845	0,19342	0,12716	0,07990	0,04293	0,01925
$\pi_k(6)$ (GPSS World, $t = 10^5$)	0,12716	0,16861	0,23466	0,19296	0,13092	0,08033	0,04546	0,01989

Таблица 5. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1/\mathrm{m}$ (данные 2)

Характеристика	$\mathbf{E}\,Q(6)$	$\mathbf{E}\,w(6)$	$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(6)$
Аналитическое значение	1,657	0,733	0,972
Значение согласно GPSS World, $t = 10^5$	1,683	0,746	0,971

Таблица 6. Стационарное распределение числа заявок в системе $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ (данные 2)

Число заявок (k)	0	1	2	3	4
$\pi_k(\infty)$	0,12620	0,16570	0,23288	0,18890	0,12419
$\pi_k(\infty)$ (GPSS World, $t = 2 \cdot 10^5$)	0,12535	0,16243	0,23031	0,18963	0,12616
Число заявок (k)	5	6	7	8	$\cdots$
$\pi_k(\infty)$	0,07803	0,04193	0,02179	0,01090	$\cdots$
$\pi_k(\infty)$ (GPSS World, $t = 2 \cdot 10^5$)	0,07974	0,04317	0,02213	0,01095	$\cdots$

Таблица 7. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}^{\theta_{\mathrm{n}}}/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ (данные 2)

Характеристика	$\mathbf{E}\,Q(\infty)$	$\mathbf{E}\,w(\infty)$
Аналитическое значение ($N = 8$)	1,770	0,770
Значение согласно GPSS World, $t = 2 \cdot 10^5$	1,820	0,792

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что использование идеи метода потенциала В. С. Королюка позволяет получить простые и удобные для числовой реализации формулы для вычисления стационарного распределения числа заявок и стационарных характеристик систем обслуживания типа $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ и $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$ с параметрами функционирования, зависящими от длины очереди. Для системы с ограничением на длину очереди, кроме стационарного, удаётся исследовать и переходный режим работы: найти преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости.

9. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММА GPSS WORLD (ДЛЯ ДАННЫХ ПРИМЕРА 1)

```
Lam EQU 2    ; значение λ
Ltild EQU 1    ; значение λ̃
AH EQU 3    ; значение h
Em EQU 6    ; значение m
TMOD EQU 100000    ; время моделирования
Psv VARIABLE N$LBR/(N$LBL1+N$LBL2)    ; вероятность обслуживания
DISTR TABLE (F$KAN+Q1),0,1,50    ; распределение числа заявок
GENERATE 1
TABULATE DISTR    ; записать распределение числа заявок
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))    ; входной поток для первого режима
```

```
TRANSFER 200,,LB0    ; значение a1
TRANSFER 250,,LBT2    ; значение a2
TRANSFER (1/3),,LBT3    ; значение a3
TRANSFER 500,,LBT4    ; значение a4
SPLIT 5,LB0    ; поступление заявок по 5
TRANSFER ,OUT
LBT2 SPLIT 2,LB0    ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
LBT3 SPLIT 3,LB0    ; поступление заявок по 3
RANSFER ,OUT
LBT4 SPLIT 4,LB0    ; поступление заявок по 4
TRANSFER ,OUT
LB0 GATE LS KLU1,OUT    ; логический ключ для первого потока
LBL1 TEST L Q1,Em,OUT    ; ограничить длину очереди
TRANSFER ,LB1
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Ltild)))    ; входной поток для второго режима
TRANSFER 750,,LBT0    ; значение ã1
SPLIT 2,LBT0        ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
LBT0 GATE LS KLU2,OUT    ; логический ключ для второго потока
LBL2 TEST L Q1,Em,OUT    ; ограничить длину очереди
LB1 QUEUE 1
SEIZE KAN
DEPART 1
TEST L Q1,(AH-1),LB2    ; проверка условия переключения режимов
ADVANCE (Uniform(5,0,2))    ; обслуживание (режим 1)
TRANSFER ,LBR
LB2 LOGIC R KLU1    ; выключить первый режим
LOGIC S KLU2    ; включить второй режим
ADVANCE (Uniform(5,(1/3),1))    ; обслуживание (режим 2)
LBR RELEASE KAN
ADVANCE 0.00000001    ; время на освобождение места в очереди
TEST L Q1,(AH-1),LB3    ; проверка условия переключения режимов
LOGIC R KLU2    ; выключить второй режим
LOGIC S KLU1    ; включить первый режим
TERMINATE
LB3 LOGIC R KLU1    ; выключить первый режим
LOGIC S KLU2    ; включить второй режим
TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE ,,,1
LOGIC S KLU1    ; включить первый режим
TERMINATE
GENERATE TMOD    ; задать время моделирования
SAVEVALUE Psv,V$Psv    ; записать вероятность обслуживания
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жерновый К. Ю., Жерновый Ю. В. Системы $M^\theta/G/1/m$ и $M^\theta/G/1$ с временем обслуживания, зависящим от длины очереди. *Информационные процессы*, 2013, т. 13, № 2, стр. 76–90.
2. Жерновий К. Ю. Системи типу $M^\theta/G/1/m$ з часом обслуговування, залежним від довжини черги. *Математичні студії*, 2012, т. 38, № 1, стр. 93–105.
3. Ivnitskiy V. A. A stationary regime of a queueing system with parameters dependent on the queue length and with nonordinary flow. *Eng. Cybernetics*, 1975, vol. 13, pp. 85–90.
4. Dudin A. N. Optimal Control for an $M^x/G/1$ Queue with Two Operation Modes. *Probability in Engineering and Informational Sciences*, 1997, vol. 11, № 2, pp. 255–265.
5. Дудин А. Н., Медведев Г. А., Меленец Ю. В. *Практикум на ЭВМ по теории массового обслуживания.* Минск: Университетское, 2000.
6. Королюк В. С. *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.* Киев: Наукова думка, 1975.
7. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.
8. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.

The $M^\theta/G/1/m$ and $M^\theta/G/1$ queues with operating parameters depending on the queue length

Zhernovyi K. Yu., Zhernovyi Yu. V.

We consider the $M^\theta/G/1/m$ and $M^\theta/G/1$ queues in which the service time and input flow parameters depends on the queue length and are defined in the moments of completion of the service of the customers. With the help of an approach based on the idea of V. S. Korolyuk's potential method we find Laplace transform for the distribution of the number of customers in the system on the busy period and for the distribution function of the busy period, the mean duration of the busy time and the stationary distribution of the number of customers in the system. As a special case, we consider the $M^\theta/G/1$ queue with a single threshold for switching of operation modes. The results are verified using simulation models constructed with the assistance of tools GPSS World.

KEYWORDS: queueing system with parameters depending on the queue length, batch arrival of customers, the busy period, distribution of the number of customers.