Информационные процессы, Том 13, № 1, 2013, стр. 19–34

Многолинейные системы с отказами и равновероятным распределением заявок

Ю. В. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 6.02.2013

Аннотация—Для систем обслуживания с отказами, произвольным распределением длительности обслуживания и двумя способами распределения заявок по неоднородным обслуживающим приборам (равновероятным распределением заявок по всем приборам (свободным и занятым) и равновероятным распределением заявок по свободным приборам) найдены стационарные распределения числа заявок и доказана их инвариантность относительно функций распределения длительности обслуживания. Для системы $\mathrm{M^X/M/n/0}$ с однородными приборами и равновероятным распределением заявок по всем приборам предложен алгоритм определения стационарного распределения числа заявок в случае, когда число заявок в группе меньше шести. Изучены системы $\mathrm{M^X/M/2/0}$ и $\mathrm{M^X/M/3/0}$ с равновероятным распределением заявок по всем приборам и произвольным распределением числа прибывающих заявок в группе. Полученные результаты проверены с помощью имитационных моделей, построенных с привлечением инструментальных средств GPSS World.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система обслуживания без ожидания, неоднородные приборы, равновероятное распределение заявок по обслуживающим приборам, групповое поступление заявок, вероятность отказа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы обслуживания с отказами (без ожидания) используются для расчёта числа каналов связи (физических или логических), необходимого для обеспечения заданного качества обслуживания при передаче потоков информации в современных телекоммуникационных сетях [1], а также для решения проблем исследования сетей коммутации каналов, цифровых сетей интегрального обслуживания, адаптивных терминальных измерительных систем [2].

Одним из важных вопросов, возникших в задачах телефонии, был вопрос о возможности использования формул Эрланга, выведенных в предположении показательного распределения длительности обслуживания, при произвольном распределении, но с тем же математическим ожиданием. Положительным решением этого вопроса стала известная теорема Б. А. Севастьянова [3], доказанная методом интегро-дифференциальных уравнений. Позднее появились другие доказательства независимости распределения состояний многолинейной системы с отказами от распределения длительности обслуживания при фиксированной средней длительности [4–6]. В настоящей статье будут доказаны аналогичные утверждения для двух систем типа $\mathrm{M/G/n/0}$ с неоднородными приборами и различными способами распределения заявок по обслуживающим приборам: равновероятным распределением заявок по всем обслуживающим приборам (свободным и занятым) и равновероятным распределением заявок по свободным приборам.

Система с равновероятным распределением заявок по всем приборам может служить моделью процесса обслуживания при нарушенном управлении в распределении заявок по обслуживающим приборам. Такая система рассматривалась в работе [7] в предположении показательного распределения длительности обслуживания и однородности приборов. Многолинейные системы обслуживания с неоднородными приборами возникают в различных приложениях, в частности являются адекватной моделью работы узла сети передачи данных [8].

Для системы M/G/n/0 с равновероятным распределением заявок по всем приборам введём обозначение $\mathrm{M_{1/n}/G/n/0}$. Через $\mathrm{M/G_1, \ldots, G_n/n/0}$ обозначим систему с неоднородными приборами.

В случае группового поступления заявок без введения ограничения на число заявок в группе построение математической модели системы $\mathrm{M^X_{1/n}/M/n/0}$ для произвольного числа обслуживающих приборов n оказывается невыполнимой задачей. Поэтому мы изучим системы $\mathrm{M^X_{1/n}/M/2/0}$ и $\mathrm{M^X_{1/n}/M/3/0}$ при произвольном распределении числа заявок в группе, а также систему $\mathrm{M^X_{1/n}/M/n/0}$ в случае, когда число заявок в группе меньше шести.

2. СИСТЕМА $\mathrm{M/G_1, \ldots, G_n/n/0}$

Рассмотрим систему обслуживания $\mathrm{M/G_1, \ldots, G_n/n/0}$. Это система с отказами, состоящая из n неоднородных приборов (с неодинаковыми законами распределения длительности обслуживания), на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Если заявка застаёт все n приборов занятыми, то она получает отказ (покидает систему необслуженной). При наличии k занятых приборов заявка направляется с одинаковой вероятностью $1/(n-k)$ в любой из свободных приборов. Длительность обслуживания заявки в i-ом приборе — случайная величина с функцией распределения $G_i(x)$ и математическим ожиданием τ_i.

Нас интересуют стационарные характеристики

$$p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t), \qquad 0 \le k \le n,$$

где $p_k(t)$ — вероятность того, что в момент времени t заняты обслуживанием заявок k приборов.

Пусть $\nu(t)$ обозначает число приборов, занятых в момент времени t. Предположим, что в некоторый момент времени $\nu(t)$ приняло значение k $(1 \le k \le n)$, причём $\nu(t-0) \ne k$. Присвоим тем приборам, которые заняты в момент t, номера от 1 до k в случайном порядке. Присвоенные номера будут иметь силу, пока $\nu(t)$ не примет нового значения. Обозначим через $\xi_j(t)$ длительность времени с момента t до того момента, когда прибор с номером j закончит обслуживание, длящееся в момент t, и рассмотрим случайный процесс $\zeta(t) = \{\nu(t);\, \xi_1(t),\, \xi_2(t), \ldots,\, \xi_{\nu(t)}(t)\}$.

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}
&F_k(t;\, x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k) = \mathrm{P}\{\nu(t) = k;\, \xi_1(t) < x_1,\, \xi_2(t) < x_2, \ldots,\, \xi_k(t) < x_k\},\\
&F_{k\,(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(t;\, x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k)\\
&\qquad\qquad = \mathrm{P}\{\nu(t) = k;\, \xi_{1i_1}(t) < x_1,\, \xi_{2i_2}(t) < x_2, \ldots,\, \xi_{ki_k}(t) < x_k\}, \qquad 0 \le k \le n.
\end{aligned}$$

Здесь $\xi_{ji_j}(t)$ — длительность времени с момента t до того момента, когда прибор с номером j закончит обслуживание при условии, что длительность обслуживания в этом приборе распределена по закону $G_{i_j}(x)$, причём во всевозможных упорядоченных наборах $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ нет одинаковых номеров и $1 \le i_j \le n$ для каждого j.

Очевидно, что $p_k(t) = F_k(t;\, \infty,\, \infty, \ldots,\, \infty)$, а значит

$$p_k = \lim_{t\to\infty} F_k(t;\, \infty,\, \infty, \ldots,\, \infty),$$

поэтому для определения стационарных вероятностей p_k необходимо найти функции F_k.

Введём обозначения: $A_n^k = n!/(n-k)!$ — число размещений из n по k,

$$F_k(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k) = \lim_{t\to\infty} F_k(t;\, x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k),$$

$$F_{k\,(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k) = \lim_{t\to\infty} F_{k\,(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(t;\, x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k).$$

Теорема 1. *Если $\tau_i < \infty$, $1 \le i \le n$, то случайный процесс $\zeta(t)$ обладает эргодическим стационарным распределением, а стационарные вероятности p_k определяются по формулам*

$$\begin{gathered} p_k = p_0 \widetilde{p}_k, \qquad 1 \le k \le n; \qquad \frac{1}{p_0} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{p}_k; \\ \widetilde{p}_k = \frac{\lambda^k}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=1;\\ i_1<i_2<\ldots<i_k}}^{n} \prod_{j=1}^{k} \tau_{i_j}, \qquad 1 \le k \le n. \end{gathered} \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку $\zeta(t)$ — кусочно-линейный процесс [4, с. 383], то утверждение первой части теоремы вытекает из эргодической теоремы для кусочно-линейных марковских процессов [4, с. 211].

Поведение процесса $\zeta(t)$ в установившемся режиме сводится к изучению всех случаев, благоприятствующих событию A, состоящему в том, что

$$\nu(t+h) = k;\ \ \xi_1(t+h) < x_1,\ \xi_2(t+h) < x_2,\ \ldots,\ \xi_k(t+h) < x_k,$$

где $x_i > 0$, $1 \le i \le k$. Поскольку для простейшего входящего потока вероятность поступления более одной заявки за время h есть $o(h)$, то остаётся рассмотреть случаи, благоприятствующие событию A, когда в интервале времени $(t,\, t+h)$: 1) не было поступления заявок, 2) была обслужена одна заявка, 3) поступила одна заявка. Что же касается возможности окончания обслуживания более одной заявки или окончания обслуживания в сочетании с поступлением заявки, то для этих случаев, учитывая равенство

$$F_k(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k) = \frac{1}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=1;\\ i_1\ne i_2\ne\ldots\ne i_k}}^{n} F_{k\,(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k),$$

так же, как в [4, с. 384-385], выводим оценку

$$\begin{gathered} \mathrm{P}\{\nu(t) = k;\, x_1 \le \xi_1(t) < x_1 + h,\, x_2 \le \xi_2(t) < x_2 + h, \ldots,\, x_k \le \xi_k(t) < x_k + h\} \\ \le \frac{(\lambda h)^k}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=1;\\ i_1\ne i_2\ne\ldots\ne i_k}}^{n} \prod_{j=1}^{k} \bigl(1 - G_{i_j}(x_j)\bigr). \end{gathered} \tag{2}$$

Повторяя рассуждения, приведённые в [4, с. 383-386], с учётом оценки (2) для определения функций $F_k(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k)$ получим равенства, справедливые почти всюду,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \lambda(1-\delta_{kn}) F_k \\ &+ \frac{\lambda}{k(n-k+1)} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=1;\\ i_1\ne i_2\ne\ldots\ne i_k}}^{n} F_{k-1(i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_k) G_{i_k}(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_k(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_k)}{\partial x_j} - (1-\delta_{kn})(k+1) \frac{\partial F_{k+1}(x_1,\ldots,x_k,0)}{\partial x_{k+1}},\ \ 1 \le k \le n, \end{aligned} \tag{3}$$

где δ_{kn} — символы Кронекера.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что системе уравнений (3) удовлетворяет (почти всюду) неотрицательное, абсолютно непрерывное решение вида

$$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\lambda^k}{k! A_n^k} F_0 \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1; \\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k}}^{n} \prod_{j=1}^{k} \int_0^{x_j} \bigl(1 - G_{i_j}(u)\bigr)\, du. \tag{4}$$

Так как

$$\lim_{x_j \to \infty,\ 1 \le j \le k} F_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\lambda^k}{A_n^k} F_0,$$

то при нормирующем условии

$$F_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{A_n^k} = 1$$

формулы (4) дают эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$. В частности, устремив к бесконечности все координаты, придём к формулам (1). Теорема доказана. □

Стационарная вероятность отказа для системы $\mathrm{M/G_1, \ldots, G_n/n/0}$ равна

$$\mathrm{P_{rej}} = p_n = p_0 \lambda^n \prod_{j=1}^{n} \tau_j. \tag{5}$$

Если средняя длительность обслуживания для всех n приборов одинакова, то есть $\tau_i = \tau$, $1 \le i \le n$, то из (1) следуют формулы Севастьянова [3] для системы $\mathrm{M/G/n/0}$.

Для системы с неоднородными приборами представляет интерес вычисление коэффициента использования для каждого прибора. Пусть U_i — коэффициент использования прибора, среднее время обслуживания в котором равно τ_i, $\overline{U}$ — среднее число занятых приборов. Поскольку

$$\overline{U} = \sum_{k=1}^{n} k p_k = p_0 \sum_{i=1}^{n} \tau_i \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} = 1\, (\neq i); \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1}}}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \tau_{i_j} + \frac{\lambda}{n} \right)$$

и, с другой стороны,

$$\overline{U} = \sum_{i=1}^{n} U_i,$$

то

$$U_i = p_0 \tau_i \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{A_n^k} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} = 1\, (\neq i); \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1}}}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \tau_{i_j} + \frac{\lambda}{n} \right), \qquad 1 \le i \le n. \tag{6}$$

3. СИСТЕМА $\mathrm{M_{1/n}/G_1, \ldots, G_n/n/0}$

Система обслуживания $\mathrm{M_{1/n}/G_1, \ldots, G_n/n/0}$ отличается от системы $\mathrm{M/G_1, \ldots, G_n/n/0}$ лишь способом распределения прибывающих заявок. Если заявка застаёт все n приборов занятыми, то она получает отказ. При наличии хотя бы одного свободного прибора заявка направляется с одинаковой вероятностью $1/n$ в любой из n приборов независимо от того, занят он или нет. Если заявка направлена в свободный прибор, то она принимается на обслуживание. Если заявка направлена в занятый прибор, то она покидает систему необслуженной.

Сохранив для системы $\mathrm{M_{1/n}/G_1, \ldots, G_n/n/0}$ все обозначения, введённые для системы $\mathrm{M/G_1}$, $\ldots, \mathrm{G_n/n/0}$, и рассуждая по схеме, изложенной в предыдущем пункте, получим равенства, справедливые почти всюду, для функций $F_k(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k)$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \lambda \frac{n-k}{n}(1-\delta_{kn})F_k \\ &+ \frac{\lambda}{kn} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1; \\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k}}^{n} F_{k-1(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k) G_{i_k}(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_k(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_k)}{\partial x_j} - (1-\delta_{kn})(k+1) \frac{\partial F_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, 0)}{\partial x_{k+1}}, \ \ 1 \le k \le n,\end{aligned} \tag{7}$$

Множитель $(n-k)/n$, появившийся в этом уравнении перед функцией F_k, выражает вероятность попадания заявки в свободный прибор при условии, что занято k приборов. Множитель $1/(kn)$ перед функцией $F_{k-1(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1})}$ получился после учёта вероятности $(n-k+1)/n$ попадания заявки в свободный прибор при условии, что занято $(k-1)$ приборов, вероятности $1/k$ занятия заявкой, попавшей на обслуживание, одного из k приборов и вероятности $1/(n-k+1)$ того, что в k-ом занимаемом приборе длительность обслуживания распределена по закону $G_{i_k}(x)$:

$$\frac{1}{kn} = \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n-k+1}\,.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что системе уравнений (7) удовлетворяет (почти всюду) неотрицательное, абсолютно непрерывное решение вида

$$F_k(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k) = \frac{\lambda_n^k}{k!}\, F_0 \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1; \\ i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_k}}^{n} \prod_{j=1}^{k} \int_0^{x_j} \bigl(1 - G_{i_j}(u)\bigr)\, du, \tag{8}$$

где $\lambda_n = \lambda/n$. Так как

$$\lim_{x_j \to \infty,\ 1 \le j \le k} F_k(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k) = \lambda_n^k F_0,$$

то при нормирующем условии

$$F_0 \sum_{k=0}^{n} \lambda_n^k = 1$$

формулы (8) дают эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$ для системы $\mathrm{M_{1/n}/G_1, \ldots, G_n/n/0}$. В частности, устремив к бесконечности все x_j, $1 \le j \le k$, придём к формулам для стационарных вероятностей p_k:

$$\begin{aligned}&p_k = p_0 \widetilde{p}_k, \qquad 1 \le k \le n; \qquad \frac{1}{p_0} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{p}_k; \\ &\widetilde{p}_k = \lambda_n^k \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1; \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k}}^{n} \prod_{j=1}^{k} \tau_{i_j}, \qquad 1 \le k \le n.\end{aligned} \tag{9}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $\tau_i < \infty$, $1 \le i \le n$, *то для системы* $\mathrm{M_{1/n}/G_1, \ldots, G_n/n/0}$ *случайный процесс* $\zeta(t)$ *обладает эргодическим стационарным распределением, а стационарные вероятности* p_k *определяются по формулам* (9).

Если средняя длительность обслуживания для всех n приборов одинакова, то есть $\tau_i = \tau$, $1 \le i \le n$, то из (9) следуют формулы для стационарных вероятностей системы $\mathrm{M_{1/n}/G/n/0}$

$$p_k = \frac{C_n^k (\lambda_n \tau)^k}{(1 + \lambda_n \tau)^n}\,, \qquad 0 \le k \le n\,. \tag{10}$$

В случае показательного распределения времени обслуживания с параметром μ из (10) получаем формулы, приведённые в работе [7],

$$p_k = \frac{C_n^k \rho_n^k}{(1 + \rho_n)^n}\,, \qquad 0 \le k \le n; \qquad \rho_n = \frac{\lambda}{n\mu}\,.$$

Рассуждая аналогично, как и при получении формул (6), приходим к следующим выражениям для коэффициентов использования приборов системы $\mathrm{M_{1/n}/G_1, \ldots, G_n/n/0}$

$$U_i = p_0 \tau_i \Bigg(\sum_{k=2}^{n} \lambda_n^k \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1} = 1\, (\ne i);\\ i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1}}}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \tau_{i_j} + \lambda_n \Bigg), \qquad 1 \le i \le n. \tag{11}$$

Учитывая, что стационарное среднее число обслуженных заявок за единицу времени равно $\sum\limits_{i=1}^{n} (U_i/\tau_i)$, выводим формулу для стационарной вероятности отказа для этой системы

$$\mathrm{P_{rej}} = 1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{\tau_i}. \tag{12}$$

4. СИСТЕМА $\mathrm{M^X_{1/n}/M/n/0}$

Рассмотрим систему обслуживания с равновероятным распределением заявок по всем однородным приборам и показательным распределением длительности обслуживания ($G_i(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \ge 0$, $\tau_i = 1/\mu$, $1 \le i \le n$), заявки в которую поступают группами. С вероятностью a_k число заявок в группе равно k ($k \ge 1$), причём $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 1$, $\overline{a} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k < \infty$. Внутри группы заявки обслуживаются в случайном порядке.

Пусть, как и выше, $\nu(t)$ обозначает число приборов, занятых в момент времени t. Все состояния марковского процесса $\{\, \nu(t),\ t \ge 0 \,\}$ сообщаются, число состояний конечно, поэтому этот процесс является эргодическим, и стационарные вероятности

$$p_k = \lim_{t \to \infty} p_k(t), \qquad 0 \le k \le n,$$

где $p_k(t) = \mathrm{P}\{\, \nu(t) = k \}$, существуют и определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;\\
& -\Bigg(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_{ki} + k\mu \Bigg) p_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_{ik} p_i + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \qquad 1 \le k \le n-1;\\
& -n\mu p_n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_{in} p_i = 0; \qquad \sum_{i=0}^{n} p_i = 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь λ_{ij} — интенсивность простейшего потока, переводящего систему из состояния s_i в состояние s_j, где s_j означает, что занято j приборов. Очевидно, что $\lambda_{ij} = \lambda a_{ij}$, где a_{ij} зависит от распределения числа прибывающих заявок в группе.

Введём обозначения:

$$\overline{\lambda}_{ik} = \sum_{j=k}^{n} \lambda_{ij}, \qquad \overline{\rho}_{ik} = \frac{\overline{\lambda}_{ik}}{\mu}, \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad \rho_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\mu}.$$

Решения системы уравнений (13) определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} & p_k = p_0 \widetilde{p}_k, \qquad 1 \le k \le n; \qquad \frac{1}{p_0} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{p}_k; \\ & \widetilde{p}_1 = \rho; \qquad \widetilde{p}_k = \frac{1}{k}\left(\overline{\rho}_{0k} + \sum_{i=1}^{k-1} \overline{\rho}_{ik} \widetilde{p}_i\right), \quad 2 \le k \le n-1; \\ & \widetilde{p}_n = \frac{1}{n}\left(\rho_{0n} + \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{in} \widetilde{p}_i\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Ограничимся случаем, когда число поступающих заявок в группе меньше шести, то есть $a_k = 0$, $k \ge 6$.

Теорема 3. *Если $a_k = 0$, $k \ge 6$, то для системы $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}_{1/\mathrm{n}}/\mathrm{M}/\mathrm{n}/0$ стационарные вероятности p_k, $0 \le k \le n$, определяются по формулам (14), где $\lambda_{ij} = \lambda a_{ij}$, и все отличные от нуля постоянные a_{ij} представляются в виде*

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} =& \frac{n-i}{n}\left(a_1 + \frac{(2i+1)a_2}{n} + \frac{(3i^2+3i+1)a_3}{n^2} + \frac{(4i^3+6i^2+4i+1)a_4}{n^3} + \right. \\ & \left. \frac{(5i^4+10i^3+10i^2+5i+1)a_5}{n^4}\right), \qquad 0 \le i \le n-1; \\ a_{i,i+2} =& \frac{(n-i)(n-i-1)}{n^2}\left(a_2 + \frac{3(i+1)a_3}{n} + \frac{(6i^2+12i+7)a_4}{n^2} + \right. \\ & \left. \frac{5(2i^3+6i^2+7i+3)a_5}{n^3}\right), \qquad 0 \le i \le n-2; \\ a_{i,i+3} =& \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{n^3}\left(a_3 + \frac{2(2i+3)a_4}{n} + \right. \\ & \left. \frac{5(2i^2+6i+5)a_5}{n^2}\right), \qquad 0 \le i \le n-3; \\ a_{i,i+4} =& \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)}{n^4}\left(a_4 + \frac{5(i+2)a_5}{n}\right), \qquad 0 \le i \le n-4; \\ a_{i,i+5} =& \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)(n-i-4)a_5}{n^5}, \qquad 0 \le i \le n-5. \end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство. При вычислении $a_{i,i+j}$ учитываем, что $a_{i,i+j} = \lambda_{i,i+j}/\lambda$, где $\lambda_{i,i+j}$ — это интенсивность перехода из состояния s_i в состояние s_{i+j}. Обозначим через $A_{i,i+j}$ событие "принято на обслуживание j заявок из одной группы заявок, поступившей в систему, находящуюся в сосотоянии s_i". Тогда $A_{i,i+j} = \bigcup\limits_{k=j}^{5} A_{i,i+j}H_k$, где гипотеза H_k состоит в том, что в систему прибывает группа, сосотоящая из k заявок. Поскольку $\mathrm{P}(H_k) = a_k$, то по формуле полной вероятности получаем

$$\mathrm{P}(A_{i,i+j}) = a_{i,i+j} = \sum_{k=j}^{5} a_k \mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_k). \tag{16}$$

Вычисляя $\mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_j)$, учитываем, что в группе прибывают j заявок и все они должны попасть на обслуживание. Первая заявка из этой группы принимается на обслуживание с вероятностью $(n-i)/n$, вторая — с вероятностью $(n-i-1)/n$, $\ldots$, последняя — с вероятностью $(n-i-j-1)/n$. Поэтому

$$\mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_j) = n^{-j} \prod_{k=0}^{j-1} (n-i-k), \tag{17}$$

и с помощью (16) получаем первые слагаемые формул (15).

При вычислении $\mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_{j+1})$, учитываем, что в группе прибывает $j+1$ заявка и только одна из них не попадает на обслуживание. Первая заявка из этой группы не принимается на обслуживание с вероятностью i/n, вторая — с вероятностью $(i+1)/n$, $\ldots$, последняя — с вероятностью $(i+j)/n$. Поэтому

$$\mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_{j+1}) = n^{-(j+1)} \sum_{s=0}^{j} (i+s) \prod_{k=0}^{j-1} (n-i-k) = \frac{(2i+j)(j+1)}{2n^{j+1}} \prod_{k=0}^{j-1} (n-i-k), \tag{18}$$

и с помощью (16) получаем вторые слагаемые формул (15).

Вычисляя $\mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_{j+2})$, учитываем, что в группе прибывают $j+2$ заявки и две из них не попадают на обслуживание. Первая и m-ая $(2 \le m \le j+2)$ заявки из этой группы не принимаются на обслуживание с вероятностью $i(i+m-2)/n^2$, вторая и m-ая $(3 \le m \le j+2)$ — с вероятностью $(i+1)(i+m-2)/n^2$, $\ldots$, $(j+1)$-ая и $(j+2)$-ая — с вероятностью $(i+j)^2/n^2$. Поэтому

$$\mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_{j+2}) = \frac{1}{2n^{j+2}} \sum_{s=0}^{j} (i+s)(2i+j+s)(j+1-s) \prod_{k=0}^{j-1} (n-i-k), \tag{19}$$

и с помощью (16) получаем третьи слагаемые формул (15).

При вычислении $\mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_{j+3})$, учитываем, что в группе прибывают $j+3$ заявки и три из них не попадают на обслуживание. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(A_{i,i+1}|H_4) = \frac{n-i}{n^4}\big(i^3 + i^2(i+1) + i(i+1)^2 + (i+1^3)\big) = \frac{n-i}{n^4}(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1);\\ &\mathrm{P}(A_{i,i+2}|H_5) = \frac{(n-i)(n-i-1)}{n^5}\Big(3(i+1)\big(i^2 + (i+1)^2 + (i+2)^2\big) + i(i+1)(i+2)\Big) = \\ &\qquad \frac{5(n-i)(n-i-1)}{n^5}\,(2i^3 + 6i^2 + 7i + 3). \end{aligned} \tag{20}$$

Вычисляя $\mathrm{P}(A_{i,i+1}|H_5)$, учитываем, что в группе прибывают 5 заявок и 4 из них не попадают на обслуживание. Тогда

$$\mathrm{P}(A_{i,i+1}|H_5) = \frac{n-i}{n^5}\Big((2i+1)\big(i^3 + (i+1)^3\big) + i^2(i+1)^2\Big) = \frac{n-i}{n^5}\,(5i^4 + 10i^3 + 10i^2 + 5i + 1). \tag{21}$$

Теорема доказана. □

Учитывая, что стационарное среднее число обслуженных заявок за единицу времени равно $\mu\overline{U}$, а среднее число прибывающих заявок — $\lambda\overline{a}$, выводим формулу для стационарной вероятности отказа для системы $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}_{1/\mathrm{n}}/\mathrm{M}/\mathrm{n}/0$.

$$\mathrm{P}_{\mathrm{rej}} = 1 - \frac{\overline{U}}{\rho\overline{a}}\,. \tag{22}$$

5. СИСТЕМЫ $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}_{1/\mathrm{n}}/\mathrm{M}/2/0$ И $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}_{1/\mathrm{n}}/\mathrm{M}/3/0$

Пусть распределение числа поступающих заявок в группе произвольно с конечным средним значением $\overline{a}$.

В случае $n = 2$ из рекуррентных соотношений (14) получаем

$$p_k = p_0\widetilde{p}_k, \qquad k = 1;\, 2; \qquad \frac{1}{p_0} = 1 + \widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2;$$
$$\widetilde{p}_1 = \rho, \qquad \widetilde{p}_2 = \frac{\rho_{02} + \rho\rho_{12}}{2}\,; \qquad \rho_{ik} = \rho a_{ik}.$$

Остаётся определить a_{02} и a_{12} с помощью формулы

$$a_{i,i+j} = \sum_{k=j}^{\infty} a_k \mathrm{P}(A_{i,i+j}|H_k), \tag{23}$$

которая выводится по аналогии с (16). Используя формулы (17)–(21), находим

$$\begin{gathered} \mathrm{P}(A_{02}|H_k) = 1 - 2^{1-k}, \qquad \mathrm{P}(A_{12}|H_k) = 1 - 2^{-k}; \\ a_{02} = 1 - a_1 - \sum_{k=2}^{\infty} 2^{1-k} a_k, \qquad a_{12} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} a_k. \end{gathered} \tag{24}$$

В случае геометрического распределения числа прибывающих заявок в группе, когда

$$a_k = pq^{k-1}, \quad k \geq 1, \qquad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p,$$

пользуясь (24), получаем

$$a_{02} = \frac{q}{2 - q}\,, \qquad a_{12} = \frac{1}{2 - q}\,.$$

Если $n = 3$, то из равенств (14) имеем

$$p_k = p_0\widetilde{p}_k, \qquad 1 \leq k \leq 3; \qquad \frac{1}{p_0} = 1 + \widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3;$$
$$\widetilde{p}_1 = \rho, \qquad \widetilde{p}_2 = \frac{1}{2}\big(\rho(1 + \rho_{12} + \rho_{13}) - \rho_{01}\big), \qquad \widetilde{p}_3 = \frac{\rho_{03} + \rho\rho_{13} + \widetilde{p}_2}{3}\,; \qquad \rho_{ik} = \rho a_{ik}.$$

С помощью (17)–(21) и (23), находим

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(A_{01}|H_k) = 3^{1-k}, \qquad \mathrm{P}(A_{03}|H_k) = 1 - \frac{2^k - 1}{3^{k-1}}\,, \\ &\mathrm{P}(A_{12}|H_k) = \frac{2\big(2^k - 1\big)}{3^k}, \qquad \mathrm{P}(A_{13}|H_k) = 1 - \frac{2^{k+1} - 1}{3^k}\,; \\ &a_{01} = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{1-k} a_k, \qquad a_{03} = \sum_{k=3}^{\infty} \Big(1 - \frac{2^k - 1}{3^{k-1}}\Big) a_k, \\ &a_{12} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{3^k}\, a_k, \qquad a_{13} = \sum_{k=2}^{\infty} \Big(1 - \frac{2^{k+1} - 1}{3^k}\Big) a_k. \end{aligned} \tag{25}$$

В случае геометрического распределения числа прибывающих заявок в группе, пользуясь (25), получаем

$$a_{01} = \frac{3p}{3-q}\,, \quad a_{03} = \frac{2q^2}{(3-q)(3-2q)}\,, \quad a_{12} = \frac{6p}{(3-q)(3-2q)}\,, \quad a_{13} = \frac{2q}{(3-q)(3-2q)}\,.$$

6. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Пусть $n = 4$, $\lambda = 2$, $\tau_1 = 4$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 2$, $\tau_4 = 1$ (**данные А**); $\lambda = 2$, $\mu = 1$ (для показательного распределения времени обслуживания), $\tau = 1$ (для непоказательных распределений), $a_1 = 0,4$, $a_2 = 0,3$, $a_3 = 0,2$, $a_4 = 0,1$, то есть $\overline{a} = 2$ (**данные Б**).

В табл. 1–4 приведены значения стационарных характеристик систем $\mathrm{M/G_1,\ldots,G_n/n/0}$, $\mathrm{M_{1/n}/G_1,\ldots,G_n/n/0}$, $\mathrm{M^X_{1/2}/M/2/0}$ и $\mathrm{M^X_{1/3}/M/3/0}$ соответственно, вычисленные по формулам, полученным выше в пп. 2–5. Здесь же для сравнения записаны значения этих характеристик, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [9, 10] для значения времени моделирования $t = 10^5$. Соответствующие программы GPSS World приведены в Приложении. Результаты имитационного моделирования, представленные в табл. 1 и 2, получены для равномерного распределения времени обслуживания на промежутках [3,5] (первый прибор), [2,4] (второй прибор), [1,3] (третий прибор) и [0,5; 1,5] (четвёртый прибор).

Таблица 1. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M/G_1,\ldots,G_n/n/0}$ для данных А

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	U_1	U_2	U_3	U_4	$\overline{U}$	$\mathrm{P_{rej}}$
Аналитическое значение	0,020	0,099	0,232	0,331	0,318	0,808	0,765	0,695	0,560	2,828	0,318
Знач. согласно GPSS World	0,019	0,100	0,233	0,330	0,318	0,809	0,765	0,694	0,560	2,828	0,319

Таблица 2. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M_{1/n}/G_1,\ldots,G_n/n/0}$ для данных А

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	U_1	U_2	U_3	U_4	$\overline{U}$	$\mathrm{P_{rej}}$
Аналитическое значение	0,044	0,222	0,389	0,278	0,067	0,667	0,600	0,500	0,333	2,100	0,527
Знач. согласно GPSS World	0,044	0,224	0,387	0,279	0,066	0,667	0,559	0,500	0,335	2,101	0,527

Таблица 3. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M^X_{1/2}/M/2/0}$ для данных Б

	p_0	p_1	p_2	$\overline{U}$	$\mathrm{P_{rej}}$
Аналитическое значение	0,209	0,419	0,372	1,162	0,709
Знач. согласно GPSS World	0,209	0,418	0,373	1,163	0,710

Таблица 4. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M^X_{1/3}/M/3/0}$ для данных Б

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\overline{U}$	$\mathrm{P_{rej}}$
Аналитическое значение	0,161	0,322	0,342	0,175	1,531	0,617
Знач. согласно GPSS World	0,160	0,322	0,342	0,176	1,531	0,617

В табл. 5 представлены стационарные характеристики систем $\mathrm{M^X_{1/3}/G/3/0}$ для различных распределений времени обслуживания со средним значением $\tau = 1$, полученные с помощью

Таблица 5. Стационарные характеристики систем $M^X_{1/3}/G/3/0$, вычисленные с помощью GPSS World для данных Б и различных распределений времени обслуживания

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\overline{U}$	P_{rej}
Показательное распр. времени обсл.	0,160	0,322	0,342	0,176	1,531	0,617
Равномерное распр. времени обсл.	0,173	0,309	0,335	0,183	1,531	0,617
Детерминированное время обсл.	0,219	0,256	0,299	0,226	1,532	0,617

GPSS World для значения времени моделирования $t = 10^5$. Равномерное распределение соответствует промежутку [0,2]. Видим, что стационарные распределения числа заявок для различных распределений времени обслуживания не совпадают, но стационарные характеристики $\overline{U}$ и P_{rej} не зависят от вида распределения времени обслуживания.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе доказана инвариантность стационарных характеристик систем $M/G_1, \ldots, G_n/n/0$ и $M_{1/n}/G_1, \ldots, G_n/n/0$ относительно вида распределения длительности обслуживания. Для систем обслуживания с групповым поступлением заявок типа $M^X_{1/n}/G/n/0$ и $M^X/G/n/0$, судя по результатам имитационного моделирования, стационарное распределение числа заявок зависит от вида распределения длительности обслуживания.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММЫ ДЛЯ GPSS WORLD

Система $\mathbf{M/G_1, \ldots, G_n/n/0}$ (n = 4):

```
Lam EQU 2    ; значение λ
Prej VARIABLE 1-N$LB/N$LALL    ; вероятность отказа
TMOD EQU 100000    ; время моделирования
; Булевы переменные
Ver1234 BVARIABLE F1'AND'F2'AND'F3'AND'F4
Ver123 BVARIABLE F1'AND'F2'AND'F3
Ver124 BVARIABLE F1'AND'F2'AND'F4
Ver134 BVARIABLE F1'AND'F3'AND'F4
Ver234 BVARIABLE F2'AND'F3'AND'F4
Ver12 BVARIABLE F1'AND'F2
Ver13 BVARIABLE F1'AND'F3
Ver14 BVARIABLE F1'AND'F4
Ver23 BVARIABLE F2'AND'F3
Ver24 BVARIABLE F2'AND'F4
Ver34 BVARIABLE F3'AND'F4
Ver1 BVARIABLE F1
Ver2 BVARIABLE F2
Ver3 BVARIABLE F3
Ver4 BVARIABLE F4
FFFF TABLE (F1+F2+F3+F4),0,1,7    ; распределение числа заявок
GENERATE 1
TABULATE FFFF
```

```
TERMINATE
GENERATE (Exponential(1,0,(1/Lam)))     ; поток заявок
; Распределение заявок между приборами
LALL TEST E BV$Ver1234,0,OUT
TEST E BV$Ver123,0,LB4
TEST E BV$Ver124,0,LB3
TEST E BV$Ver134,0,LB2
TEST E BV$Ver234,0,LB1
TEST E BV$Ver12,0,LB5
TEST E BV$Ver13,0,LB6
TEST E BV$Ver14,0,LB7
TEST E BV$Ver23,0,LB8
TEST E BV$Ver24,0,LB9
TEST E BV$Ver34,0,LB10
TEST E BV$Ver1,0,LB11
TEST E BV$Ver2,0,LB14
TEST E BV$Ver3,0,LB17
TEST E BV$Ver4,0,LB20
TRANSFER PICK,LB23,LB24
LB23 TRANSFER ,LB1
TRANSFER ,LB2
TRANSFER ,LB3
LB24 TRANSFER ,LB4
LB5 TRANSFER 500,LB3,LB4
LB6 TRANSFER 500,LB2,LB4
LB7 TRANSFER 500,LB2,LB3
LB8 TRANSFER 500,LB1,LB4
LB9 TRANSFER 500,LB1,LB3
LB10 TRANSFER 500,LB1,LB2
LB11 TRANSFER PICK,LB12,LB13
LB12 TRANSFER ,LB2
TRANSFER ,LB3
LB13 TRANSFER ,LB4
LB14 TRANSFER PICK,LB15,LB16
LB15 TRANSFER ,LB1
TRANSFER ,LB3
LB16 TRANSFER ,LB4
LB17 TRANSFER PICK,LB18,LB19
LB18 TRANSFER ,LB1
TRANSFER ,LB2
LB19 TRANSFER ,LB4
LB20 TRANSFER PICK,LB21,LB22
LB21 TRANSFER ,LB1
```

```
TRANSFER ,LB2
LB22 TRANSFER ,LB3
; Прибор 1
LB1 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 1
ADVANCE (Uniform(1,3,5))
RELEASE 1
TRANSFER ,LB
; Прибор 2
LB2 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 2
ADVANCE (Uniform(1,2,4))
RELEASE 2
TRANSFER ,LB
; Прибор 3
LB3 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 3
ADVANCE (Uniform(1,1,3))
RELEASE 3
TRANSFER ,LB
; Прибор 4
LB4 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 4
ADVANCE (Uniform(1,0.5,1.5))
RELEASE 4
LB TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE TMOD
SAVEVALUE Prj,V$Prej    ; записать вероятность отказа
TERMINATE 1
START 1
```

Система $\mathbf{M_{1/n}/G_1, \ldots, G_n/n/0}$ (n = 4):

```
Lam EQU 2    ; значение λ
Prej VARIABLE 1-N$LB/N$LALL    ; вероятность отказа
TMOD EQU 100000    ; время моделирования
FFFF TABLE (F1+F2+F3+F4),0,1,7    ; распределение числа заявок
GENERATE 1
TABULATE FFFF
TERMINATE
GENERATE (Exponential(1,0,(1/Lam)))    ; поток заявок
; Распределение заявок между приборами
LALL TRANSFER PICK,LB5,LB6
```

```
LB5 TRANSFER ,LB1
TRANSFER ,LB2
TRANSFER ,LB3
LB6 TRANSFER ,LB4
; Прибор 1
LB1 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 1
ADVANCE (Uniform(1,3,5))
RELEASE 1
TRANSFER ,LB
; Прибор 2
LB2 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 2
ADVANCE (Uniform(1,2,4))
RELEASE 2
TRANSFER ,LB
; Прибор 3
LB3 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 3
ADVANCE (Uniform(1,1,3))
RELEASE 3
TRANSFER ,LB
; Прибор 4
LB4 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 4
ADVANCE (Uniform(1,0.5,1.5))
RELEASE 4
LB TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE TMOD
SAVEVALUE Prj,V$Prej    ; записать вероятность отказа
TERMINATE 1
START 1
```

Система $\mathbf{M^X_{1/n}/G/n/0}$ (n = 3):

```
Lam EQU 2    ; значение λ
Myu EQU 1    ; значение μ
Prej VARIABLE 1-N$LB/N$LALL    ; вероятность отказа
FFF TABLE (F1+F2+F3),0,1,5    ; распределение числа заявок
GENERATE 1
TABULATE FFF
TERMINATE
GENERATE (Exponential(1,0,(1/Lam)))    ; поток заявок
```

```
; Групповое поступление заявок
TRANSFER 400,,LALL
TRANSFER 500,,SP3
SPLIT 2,LALL
TRANSFER ,OUT
SP3 TRANSFER 333,,SP4
SPLIT 3,LALL
TRANSFER ,OUT
SP4 SPLIT 4,LALL
TRANSFER ,OUT
LALL TRANSFER PICK,LB1,LB2    ; распределение заявок между приборами
LB1 TRANSFER ,LB3
TRANSFER ,LB4
LB2 TRANSFER ,LB5
; Прибор 1
LB3 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 1
;ADVANCE 1    ; детерминированное время обслуживания
ADVANCE (Exponential(3,0,(1/Myu)))    ; показательное распределение
;ADVANCE (Uniform(3,0,2))    ; равномерное распределение
RELEASE 1
TRANSFER ,LB
; Прибор 2
LB4 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 2
;ADVANCE 1
ADVANCE (Exponential(3,0,(1/Myu)))
;ADVANCE (Uniform(3,0,2))
RELEASE 2
TRANSFER ,LB
; Прибор 3
LB5 TRANSFER BOTH,,OUT
SEIZE 3
;ADVANCE 1
ADVANCE (Exponential(3,0,(1/Myu)))
;ADVANCE (Uniform(3,0,2))
RELEASE 3
LB TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE 100000    ; время моделирования
SAVEVALUE Prj,V$Prej    ; записать вероятность отказа
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дудин А. Н., Клименок В. И. Расчёт необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях. *Информатизация образования*, 2005, № 4, стр. 56–68.
2. Назаров А. А. Формулы Энгсета для неоднородных немарковских систем массового обслуживания и их применение в сетях связи. *Проблемы передачи информации*, 1998, т. 34, вып. 2, стр. 109–116.
3. Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и её приложения к телефонным системам с отказами. *Теория вероятностей и ее применения*, 1957, т. 2, вып. 1, стр. 106–116.
4. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. *Введение в теорию массового обслуживания.* М.: Наука, 1966.
5. Кёниг Д., Штойян Д. *Методы теории массового обслуживания.* М.: Радио и связь, 1981.
6. Матвеев В. Ф., Ушаков В. Г. *Системы массового обслуживания.* М.: Изд-во МГУ, 1984.
7. Овчаров Л. А. *Прикладные задачи теории массового обслуживания.* М.: Машиностроение, 1969.
8. Ефросинин Д. В., Рыков В. В. К анализу характеристик производительности СМО с неоднородными приборами. *Автоматика и телемеханика*, 2008, № 1, стр. 64–82.
9. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.
10. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.

Multiserver systems with failures and equiprobable distribution of customers

Zhernovyi Yu. V.

We consider queuing systems with failures, an arbitrary service time distribution and with two ways of customers distribution on heterogeneous servers: the equiprobable distribution of customers on all servers (free and used) and equiprobable distribution of customers on free servers. Stationary distributions of the number of customers are found, invariance of the distributions on the distribution function of the service time are proved. For the $\mathrm{M^X/M/n/0}$ system with homogeneous servers and equiprobable distribution of customers on all servers an algorithm is proposed for finding of the stationary distribution of the number of customers for the case where the number of customers in the group is less than six. The $\mathrm{M^X/M/2/0}$ and $\mathrm{M^X/M/3/0}$ systems with equiprobable distribution of customers on all servers and an arbitrary distribution of the number of arriving customers in the group are studied. The obtained results are verified with the help of simulation models constructed with the assistance of the GPSS World software.

KEYWORDS: queueing system without waiting, heterogeneous servers, the equiprobable customers distribution on servers, batch arrival of customers, the probability of failure.