

Адаптивная универсальная торговая стратегия¹

В.В.Вьюгин, В.Г.Трунов

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
vuyugin@iitp.ru*

Поступила в редколлегия 10.09.2013

Аннотация—В первой части работы предложен универсальный метод для алгоритмической торговли на финансовом рынке, который приносит асимптотически наибольший доход по сравнению с любой “не слишком сложной” торговой стратегией. Проводится сравнение с классом стратегий, которые на каждом шаге торговли вычисляют число приобретаемых или продаваемых единиц финансового инструмента с помощью непрерывных функций от входной информации. В процессе игры универсальная стратегия принимает решение, используя предсказание будущей цены финансового инструмента с помощью рандомизированного алгоритма, выдающего так называемые хорошо калибруемые предсказания в смысле Дэйвида. Данный алгоритм является развитием метода Какаде и Фостера, который мы также комбинируем с аналогичным методом прогнозирования, предложенным В.Г. Вовком. Во второй части работы приведены результаты численных экспериментов с предложенным универсальным алгоритмом на исторических данных финансовых рядов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: алгоритмическая торговля; цена акций; хорошо калибруемые предсказания.

1. ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмическая торговля (Algorithmic trading) – это формализованный процесс совершенствования торговых операций на финансовых рынках по заданному алгоритму с использованием специализированных компьютерных систем (торговых роботов).

Теоретико-информационный подход к построению универсальных торговых стратегий был основан Ковером и Орденглихом [1], которые предложили алгоритм для построения “универсального” динамического портфеля акций. Свойство универсальности этого алгоритма заключается в том, что он является “наилучшим” в целом классе инвестиционных портфелей. Алгоритм Ковера динамически перераспределяет деньги между несколькими акциями в зависимости от их текущей доходности так, что получаемый им доход оказывается асимптотически не меньшим, чем доход от любой постоянной стратегии вложения в эти акции. При этом не делается никаких стохастических предположений о поведении временных рядов цен акций. Полученные результаты имеют смысл при любом характере изменения цен акций.

Мы приведем другой алгоритм подобного рода, предназначенный для алгоритмической торговли с одной акцией. Этот алгоритм также будет давать асимптотически наибольший доход по сравнению с любой “не слишком сложной” торговой стратегией. Мы также не делаем никаких стохастических предположений о поведении временных рядов цен акций.

В предыдущей работе [2] были рассмотрены некоторые стратегии игры на рынке ценных бумаг и приведены результаты виртуальной торговли “на повышение” при использовании адаптивного прогнозирования. В данном исследовании предлагается использование рандомизированных алгоритмов и приведены результаты их использования при комбинированной стратегии игры.

¹ Работа частично поддержана грантами РФФИ 13-01-00521 и 13-01-12447.

Предлагаемая стратегия будет использовать хорошо калибруемые прогнозы цен акций. Метод предсказания будет основан на комбинации метода построения рандомизированных предсказаний Какаде и Фостера [6] и предложенного Вовком [10] метода предсказаний с использованием гильбертовых пространств порожденных воспроизводящими ядрами.

В основе этого подхода лежит понятие калибруемости предсказаний, предложенное Дэйвидом [3], которое мы обобщим для более широкого класса правил выбора. Дадим необходимые определения.

Рассматривается следующая задача прогнозирования: предсказатель получает в режиме онлайн некоторую числовую последовательность исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \dots$, при этом его задачей является вычисление числовой оценки p_n для будущего события ω_n по известным $n - 1$ исходам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$.

Число p_n может рассматриваться как прогноз среднего значения будущего исхода ω_n . В случае, когда ω_i принимают значения 0 или 1, это среднее равно вероятности события $\omega_n = 1$.

Типичным примером такого прогнозирования в случае бинарных исходов является задача вероятностного предсказания погоды на завтра. Событие $\omega_n = 1$ может интерпретироваться как дождь в n -ый день, а число p_n — как его вероятность, вычисленная на основе наблюдений погоды $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ за предыдущие $n - 1$ дней. Отсутствие дождя соответствует событию $\omega_n = 0$, его вероятность равна $1 - p_n$.

Предсказатель погоды считается калибруемым, если дождь случается так же часто, как он прогнозируется предсказателем. Например, если дождь случается в 80% всех дней, для которых предсказатель давал прогноз $p_n = 0.8$ и т.д. В этом примере $p_n \in [0, 1]$.

В данной работе мы будем рассматривать случай $\omega_n \in [0, 1]$ и $p_n \in [0, 1]$ для всех n . Например, действительные числа ω_n могут быть ценами некоторого финансового инструмента в моменты времени $n = 1, 2, \dots$; предполагаем, что цена нормирована, так что $0 \leq \omega_n \leq 1$ для всех n . Число p_n может рассматриваться как прогноз значения этой цены на момент времени n , так что $0 \leq p_n \leq 1$ для всех n .

Точное определение калибруемости в общем случае выглядит следующим образом. Пусть $I(p)$ обозначает характеристическую функцию подынтервала $I \subseteq [0, 1]$, т.е., $I(p) = 1$, если $p \in I$ и $I(p) = 0$, в противном случае. Бесконечная последовательность прогнозов $p_1, p_2, \dots$ называется хорошо калибруемой на бесконечной последовательности исходов $\omega_1, \omega_2, \dots$, если для характеристической функции $I(p)$ произвольного подынтервала $[0, 1]$ калибровочная ошибка стремится к нулю, а именно,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(p_i)(\omega_i - p_i) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Индикаторная функция $I(p_i)$ определяет некоторое “правило выбора”, которое отбирает номера i исходов, для которых мы вычисляем отклонение между прогнозом p_i и этим исходом ω_i .

Ранее было показано, что никакой детерминированный метод предсказания не может быть хорошо калибруемым на произвольной последовательности исходов (см. [3]). Тем не менее, Фостер и Вохра [4] предложили рандомизированный алгоритм, который выдает предсказания, которые с вероятностью единица хорошо калибруются на произвольной последовательности исходов. Этот алгоритм использует внутреннюю рандомизацию прогноза p_i , поэтому настоящее значение прогноза скрыто от источника, генерирующего исходы. Какаде и Фостер [6] усовершенствовали этот алгоритм: они показали, что для получения универсальных хорошо калибруемых предсказаний достаточно случайным образом округлять предсказания, вычисленные некоторым детерминированным алгоритмом.

Какаде и Фостер [6] рассматривали конечное пространство исходов и в качестве прогнозов рассматривали распределения вероятностей на этом пространстве. В этой работе мы рассматриваем в качестве пространства исходов ω_i единичный интервал $[0, 1]$, а прогноз p_i это действительное число из этого интервала (которое будет значением некоторой случайной переменной). Рандомизированный прогноз будет задаваться с помощью вероятностного распределения на интервале $[0, 1]$. Теорема 1 из раздела 2 данной работы утверждает существование “универсальной” стратегии для алгоритмической торговли, которая приносит доход асимптотически не меньший, чем любая стационарная торговая стратегия, использующая произвольную непрерывную функцию от входной информации для определения числа приобретаемых единиц финансового инструмента. Данная универсальная стратегия основана на использовании хорошо калибруемых предсказаний, которые строятся с помощью теоремы 2 из раздела 3. Наш метод построения хорошо калибруемых предсказаний является обобщением методов Фостера и Вохры, а также метода Какаде и Фостера.

В разделе 5 дается описание компьютерной технологии, основанной на результатах разделов 2 и 3. и приведены результаты численных экспериментов на реальных исторических данных акций ММВБ и электронной биржи BATS(US), загруженных с вебсайта <http://www.finam.ru>.

2. УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ТОРГОВАЯ СТРАТЕГИЯ

Основной результат этого раздела – теорема 1 – утверждает, что предлагаемая в этом разделе торговая стратегия является универсальной – она является асимптотически наилучшей в классе всех стратегий, представленных непрерывными функциями от входной информации.

Предположим, что вещественные значения $S_1, S_2, \dots$, которые мы будем интерпретировать как цены некоторой акции, поступают в режиме онлайн. Мы также предполагаем, что они ограничены и нормированы так, что $0 \leq S_i \leq 1$ для всех i .

В процессе торговли на финансовом рынке трейдеры покупают и продают акции. Мы считаем, что число C покупаемых или продаваемых единиц финансового инструмента может принимать любое вещественное значение. Допускается возможность покупать отрицательное число акций: при $C > 0$, купить $-C$ акций эквивалентно продаже C акций, продать $-C$ акций эквивалентно покупке C акций. Мы также допускаем, что каждый трейдер может одалживать деньги в неограниченном количестве.

Под стратегией мы понимаем некоторый алгоритм (может быть, рандомизированный), который в начале каждого раунда i игры выдает число C_i единиц финансового инструмента, которое необходимо купить (если это число положительное или равное нулю) или продать (если оно отрицательное). В конце этого же раунда трейдер продает купленные единицы или покупает проданные в том же количестве, соответственно. Таким образом, за i -й раунд игры капитал трейдера увеличивается (уменьшается) на величину $C_i(S_i - S_{i-1})$.

Проведем сравнение двух типов торговых стратегий на финансовом рынке в виде протокола игры с двумя типами трейдеров: на шаге i *Трейдер M* использует рандомизированную стратегию – он покупает случайное число акций $\tilde{M}_i$, которое вычисляется некоторым рандомизированным алгоритмом; *Трейдер D* – представитель широкого класса трейдеров, он покупает $D(x_i)$ акций, где D – произвольная непрерывная функция, определенная на единичном отрезке $[0, 1]$, а x_i – число из отрезка $[0, 1]$, в котором закодирована входная информация и которое выдается трейдерам прежде чем они применят свои методы. Таким образом, C_i равно $\tilde{M}_i$ для *Трейдера M* и равно $D(x_i)$ для *Трейдеров D* второго типа.

Вещественное число x_i будет также называться *сигналом* или *дополнительной информацией*. Число x_i принадлежит $[0, 1]$, и в нем может быть закодирована любая числовая информация. Например, это может быть даже будущая цена акции S_i .

Каждый *Треjder* D использует на шаге i только информацию x_i – он покупает (или продает) $D(x_i)$ единиц акции. Стратегия этого типа будет называться *стационарной*.

Для *Трейдера* M данная игра является игрой с полной информацией. Алгоритм *Трейдера* M будет использовать все значения S_{j-1} и x_j при $j \leq i$.

Прошлые цены акции, сигналы и сделанные предсказания также можно закодировать в сигнале x_i , поэтому *Треjder* D может использовать эту информацию. Здесь имеется ограничение – функция D должна быть непрерывной.

Рандомизация. Стратегия *Трайдера* M является рандомизированной. Приведем метод рандомизации. Пусть K – произвольное натуральное число. Разбиваем интервал $[0, 1]$ на K равных подынтервалов длины $\Delta = 1/K$ с помощью рациональных точек $v_i = i\Delta$, где $i = 0, 1, \dots, K$. Пусть V – множество этих точек. Любое число $p \in [0, 1]$ может быть представлено в виде линейной комбинации двух граничных точек подынтервала, содержащего p :

$$p = \sum_{v \in V} w_v(p) v w_{v_{i-1}}(p) v_{i-1} + w_{v_i}(p) v_i, \quad (1)$$

где $p \in [v_{i-1}, v_i]$, $i = \lfloor p^1/\Delta + 1 \rfloor$, $w_{v_{i-1}}(p) = 1 - (p - v_{i-1})/\Delta$ и $w_{v_i}(p) = 1 - (v_i - p)/\Delta$. Определим $w_v(p) = 0$ для всех остальных $v \in V$.

Пусть $\tilde{p}$ равно v_{i-1} с вероятностью $w_{v_{i-1}}(p)$ и равно v_i с вероятностью $w_{v_i}(p)$.

Обозначим $\bar{w}(p) = (w_v(p) : v \in V)$ – вектор этих вероятностей. Говорим, что мы округляем число p до v_{i-1} с вероятностью $w_{v_{i-1}}(p)$ и до v_i с вероятностью $w_{v_i}(p)$.

Для $z, z' \in [0, 1]$ определим скалярное произведение $K(z, z') = (\bar{w}(z) \cdot \bar{w}(z'))$, которое является ядром.

В дальнейшем мы будем рассматривать переменную точность округления, а именно, будет задана последовательность параметров $\Delta_1 > \Delta_2 > \dots \rightarrow 0$. На каждом шаге конструкции мы будем округлять числа вышеуказанным способом с точностью до одного из таких Δ_i . Такой способ случайного округления будет называться *последовательной рандомизацией*.

Полагаем $\mathcal{K}_0^D = 0$ и $\mathcal{K}_0^M = 0$.

FOR $i = 1, 2, \dots$

Рынок анонсирует сигнал $x_i \in [0, 1]$.

Определим точность случайного округления на шаге i : $\Delta = \Delta_s$, где $n_s < i \leq n_{s+1}$ (последовательности n_s и Δ_s , $s = 1, 2, \dots$, определены ниже после неравенства (25) в доказательстве Теоремы 2 далее).

Вычисляем прогноз p_i с помощью алгоритма, приводимого ниже на рис. 2, с входным параметром Δ .

Получаем рандомизированное значение прогноза: $\tilde{p}_i$.

Получаем рандомизированное значение цены: $\tilde{S}_{i-1}$.

Треjder M покупает $\tilde{M}_i$ акций по цене $\tilde{S}_{i-1}$ за каждую, где

$$\tilde{M}_i \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Треjder D покупает $D(x_i)$ акций по цене $\tilde{S}_{i-1}$ за каждую, где D – произвольная непрерывная функция на $[0, 1]$.

Рынок объявляет цену S_i акции.

Треjder M продает $\tilde{M}_i$ акций по цене S_i и обновляет значение своего кумулятивного выигрыша: $\mathcal{K}_i^M = \mathcal{K}_{i-1}^M + \tilde{M}_i(S_i - \tilde{S}_{i-1})$.

Треjder D продает $D(x_i)$ акций по цене S_i и обновляет значение своего кумулятивного выигрыша: $\mathcal{K}_i^D = \mathcal{K}_{i-1}^D + D(x_i)(S_i - \tilde{S}_{i-1})$.

ENDFOR

Рис. 1. Протокол игры

Универсальная торговая стратегия. Определим универсальную торговую стратегию в виде последовательности случайных величин $\tilde{M}_i$, $i = 1, 2, \dots$. Для того, чтобы построить такую

стратегию, на каждом раунде i вычисляем прогноз p_i будущего значения цены согласно алгоритму, который будет приведен на рис. 2 в разделе 3 ниже. Рандомизируем это число, т.е., определим соответствующую случайную величину $\tilde{p}_i$.

Подчеркнем, что в протоколе, представленном на рис. 1, реализация случайной величины $\tilde{M}_i$ скрыта от Рынка, когда он анонсирует цену S_i . Рынок может знать метод рандомизации и вычислять вероятности событий $\tilde{M}_i = 1$ и $\tilde{M}_i = -1$.

Мы также рандомизируем предыдущее (уже известное трейдерам) значение цены S_{i-1} , т.е., определим соответствующую случайную величину $\tilde{S}_{i-1}$.

После всех этих приготовлений, определим $\tilde{M}_i$ согласно протоколу, приведенному на рис. 1.

Говорим, что в случае $\tilde{M}_i > 0$ Трейдер M переходит на длинную позицию; в противном случае он переходит на короткую позицию, . То же самое относится к Трейдеру D .²

Мы допускаем, что трейдеры могут одалживать деньги и акции в неограниченном количестве. По окончании серии раундов игры мы оценим выигрыш (или долг) каждого из трейдеров.

Центральным моментом стратегии $\tilde{M}_i$ является рандомизированный алгоритм для вычисления предсказаний $\tilde{p}_i$. Этот алгоритм будет представлен на рис. 2 в разделе 3.

Трейдер M может покупать или продавать только одну акцию. Поэтому для сравнения эффективности стратегий трейдеров необходимо нормировать стратегию Трейдера D . Рассмотрим норму $\|D\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |D(x)|$, где D – произвольная непрерывная функция, определенная на единичном отрезке $[0, 1]$. Далее мы будем использовать величину $\|D\|_+ = \max\{1, \|D\|_\infty\}$ в качестве нормирующего множителя.

Предполагаем, что значения $S_1, S_2, \dots \in [0, 1]$ и $x_1, x_2, \dots \in [0, 1]$ подаются последовательно в режиме онлайн в рамках протокола, представленного на рис. 1.

Основной результат этого раздела представим в виде теоремы 1, которая утверждает, что, с вероятностью 1, средний выигрыш универсальной торговой стратегии асимптотически не меньше, чем средний выигрыш любой стационарной торговой стратегии, отнесенный на одну акцию:

Теорема 1. *Можно построить такой алгоритм для вычисления предсказаний, что для любой непрерывной функции D асимптотическое соотношение:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D) \geq 0 \quad (2)$$

выполнено почти всюду относительно распределения вероятностей, порожденного методом рандомизации.

Заметим, что требование (2) для всех D эквивалентно требованию выполнения неравенства:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \mathcal{K}_n^D) \geq 0$$

для всех D таких, что $\|D\|_\infty \leq 1$.

Поскольку условие (2) асимптотической оптимальности Трейдера M выполнено и относительно тривиальной стратегии: $D(x) = 0$ для всех x , эта стратегия является также и *асимптотически безрисковой*:

² Длинная позиция (LONG) на финансовом рынке – это приобретение ценных бумаг в начале раунда игры с целью их продажи в конце раунда в расчете на увеличение их стоимости. Короткая позиция (SHORT) – это продажа одолженных (у другого трейдера) акций в начале раунда игры с целью их покупки и возвращения в конце раунда игры. Переходя на короткую позицию, трейдер рассчитывает на уменьшение цены в конце раунда игры.

Следствие 1. *Универсальная стратегия Трейдера M является асимптотически безрисковой.*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{K}_n^M}{n} \geq 0$$

выполнено почти всюду.

Доказательство теоремы 1 приведено в разделе 4, в котором мы рассмотрим соответствующую торговую стратегию, которая, в свою очередь, использует хорошо калибруемые предсказания, определяемые в разделе 3.

3. КАЛИБРУЕМОСТЬ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

В этом разделе мы приведем и изучим алгоритм для вычисления хорошо калибруемых предсказаний, которые будут использоваться для определения торговой стратегии $\tilde{M}_i$.

Мы рассмотрим правила выбора подпоследовательностей более общего вида, чем те, которые рассматривались Дэвидом [3]. Для произвольного подмножества $\mathcal{S} \subseteq [0, 1]^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ определим

$$I_S(p, x) \begin{cases} 1, & \text{если } (p, x) \in \mathcal{S}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $p, x \in [0, 1]$. В разделе 4 мы будем использовать множества типа $\mathcal{S} = \{(p, x) : p > x\}$ и $\mathcal{S} = \{(p, x) : p \leq x\}$.

Гильбертовы пространства, порожденные воспроизводящим ядром - RKHS.³ В качестве первого этапа доказательства теоремы 1 мы покажем в разделе 4, что для произвольного гильбертова пространства RKHS можно определить стратегию $\tilde{M}_i$, которая является универсальной для класса всех стационарных стратегий, задаваемых функциями из этого пространства. После этого, используя универсальное пространство RKHS, мы перенесем свойство универсальности на произвольные стратегии, задаваемые непрерывными функциями.

Напомним, что гильбертово пространство $\mathcal{F}$ функций, определенных на множестве X , называется RKHS на X , если функционал $f \rightarrow f(x)$ является непрерывным для каждого $x \in X$. Обозначаем $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ норму на пространстве $\mathcal{F}$. Также определяется $c_{\mathcal{F}}(x) = \sup_{\|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1} |f(x)|$. Константа вложения пространства $\mathcal{F}$ определяется: $c_{\mathcal{F}} = \sup_x c_{\mathcal{F}}(x)$.

Более подробно о пространствах типа RKHS см. в монографии [7].

Мы будем рассматривать RKHS $\mathcal{F}$ на $X = [0, 1]$ с конечной константой вложения: $c_{\mathcal{F}} < \infty$. Важный пример такого пространства RKHS – соболевское пространство $\mathcal{F} = H^1([0, 1])$, которое состоит из абсолютно непрерывных функций $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ с $\|f\|_{\mathcal{F}} < \infty$, где $\|f\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt + \int_0^1 (f'(t))^2 dt}$. Для такого пространства $c_{\mathcal{F}} = \sqrt{\coth 1} = \sqrt{\frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}}$ (см. [10]).

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое пространство RKHS на X со скалярным произведением $(f \cdot g)$ для $f, g \in \mathcal{F}$. По теореме Рисса–Фишера для любого $x \in X$ существует $k_x \in \mathcal{F}$ такое, что $f(x) = (k_x \cdot f)$ для всех $f \in \mathcal{F}$. Тогда воспроизводящее ядро определяется как $K(x, y) = (k_x \cdot k_y)$.

В обратную сторону, любое ядро $K(x, y)$ определяет некоторое каноническое пространство RKHS $\mathcal{F}$, а также отображение $\Phi : X \rightarrow \mathcal{F}$, так что $K(x, y) = (\Phi(x) \cdot \Phi(y))$.

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое гильбертово пространство RKHS на $[0, 1]$ с конечной константой вложения $c_{\mathcal{F}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ – соответствующая норма и $R(x, x')$ – ядро на $[0, 1]$.

³ RKHS – сокращение для названия типа функциональных гильбертовых пространств (Reproducing Kernel Hilbert Space).

Предполагаем, что последовательность $S_1, S_2, \dots \in [0, 1]$ вещественных чисел и последовательность $x_1, x_2, \dots \in [0, 1]$ сигналов поступают последовательно согласно протоколу, представленному на рис. 1.

Теорема 2. Пусть $\epsilon > 0$. Можно построить алгоритм для вычисления прогнозов $p_1, p_2, \dots$ такой, что выполнены следующие условия:

- для любого $\delta > 0$, для любого подмножества $S \subseteq [0, 1]^2$ и для любого n , с вероятностью не менее $1 - \delta$,

$$\left| \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \leq 18n^{3/4+\epsilon}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{1/4} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}} \quad (3)$$

где $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots$ – соответствующие рандомизации $p_1, p_2, \dots$ и $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots$ – рандомизации чисел $z_1, z_2, \dots$, где $z_i = S_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$;

- для любого $D \in \mathcal{F}$

$$\left| \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - p_i) \right| \leq \|D\|_{\mathcal{F}} \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n} \quad (4)$$

для всех n .

- для любого подмножества $S \subseteq [0, 1]^2$, с вероятностью 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) = 0. \quad (5)$$

Доказательство. План доказательства следующий. Сначала по заданному $\Delta > 0$ мы построим рандомизированный алгоритм, прогнозы которого будут калиброваться относительно расширенных правил выбора на последовательности $S_1, S_2, \dots$ с точностью до Δ . После этого, мы применим этот алгоритм в условиях переменной точности округления: $\Delta \rightarrow 0$, так что будут выполнены условия теоремы.

Предложение 1. При предположениях теоремы 2 можно построить алгоритм для вычисления прогнозов такой, что выполнено неравенство (4) для всех D из RKHS $\mathcal{F}$ и для всех n . Также для любого $\delta > 0$, любого $S \subseteq [0, 1]^2$ и любого n , с вероятностью не менее $1 - \delta$, будет выполнено:

$$\left| \sum_{i=1}^n I_S(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \leq \Delta n + 2\sqrt{\frac{n(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)}{\Delta}} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}.$$

Доказательство. Предположим, что детерминированные прогнозы $p_1, \dots, p_{n-1}$ уже определены (полагаем $p_1 = 1/2$). Вычислим теперь детерминированный прогноз p_n и случайно округлим его до $\tilde{p}_n$.

Разбиение $V = \{v_0, \dots, v_K\}$ и вероятности случайного округления были определены по (1). Далее, мы округляем детерминированный прогноз p_n до v_{i-1} с вероятностью $w_{v_{i-1}}(p_n)$ и до

v_i с вероятностью $w_{v_i}(p_n)$. Мы также случайным образом округляем $z_n = S_{n-1}$ до v_{s-1} с вероятностью $w_{v_{s-1}}(z_n)$ и до v_s с вероятностью $w_{v_s}(z_n)$, где $z_n \in [v_{s-1}, v_s]$.

Пусть $W_v(p_n, z_n) = w_{v^1}(p_n)w_{v^2}(z_n)$, где $v = (v^1, v^2)$ and $v^1, v^2 \in V$, и $W(p_n, z_n) = (W_v(p_n, z_n) : v \in V^2)$ – вектор, задающий вероятностное распределение на $V^2 = V \times V$. Определим соответствующее ядро: $K(p, z, p', z') = (W(p, z) \cdot W(p', z'))$.

По определению ядро $R(x, x')$ можно представить в виде скалярного произведения в пространстве признаков: $R(x, x') = (\Phi(x) \cdot \Phi(x'))$. Рассмотрим функцию

$$U_n(p) = \sum_{i=1}^{n-1} (K(p, z_n, p_i, z_i) + R(x_n, x_i))(S_i - p_i). \quad (6)$$

Алгоритм для вычисления детерминированных предсказаний $p_1, p_2, \dots$ представлен на рис. 2 (см. также работу [9]).

Определим $p_1 = 1/2$. Инициализируем параметр Δ .

FOR $n = 1, 2, \dots$

Определим $U_n(p) = \sum_{i=1}^{n-1} (K_1(p, x_n, p_i, x_i) + K_2(z_n, z_i))(S_i - p_i)$.

Если $U_n(p) > 0$ для всех $p \in [0, 1]$, то определим $p_n = 1$;

Если $U_n(p) < 0$ для всех $p \in [0, 1]$, то определим $p_n = 0$.

В противном случае, пусть p_n есть какой-либо корень уравнения $U_n(p) = 0$ (такой корень существует по теореме о промежуточном значении).

ENDFOR

Рис. 2. Алгоритм для вычисления детерминированных предсказаний

Продолжим доказательство предложения 1. Пусть прогнозы $p_1, p_2, \dots$ вычислены с помощью этого алгоритма (см. рис. 2).

По определению прогноза p_n в алгоритме, представленном на рис. 2, для любого n и исхода S_n выполнено $U(p_n)(S_n - p_n) \leq 0$. Тогда, как легко видеть, для любого N :

$$0 \geq \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} (K(p_n, z_n, p_i, z_i) + R(x_n, x_i)) \times \\ &\quad \times (S_i - p_i)(S_n - p_n) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N K(p_n, z_n, p_i, z_i)(S_i - p_i)(S_n - p_n) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (K(p_n, z_n, p_n, z_n)(S_n - p_n))^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^N R(x_n, x_i)(S_i - p_i)(S_n - p_n) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (R(x_n, x_n)(S_n - p_n))^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^N W(p_n, z_n)(S_n - p_n) \right\|^2 - \end{aligned} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \|W(p_n, z_n)\|^2 (S_n - p_n)^2 + \quad (9)$$

$$+\frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^N \Phi(x_n)(S_n - p_n) \right\|_{\mathcal{F}}^2 -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \|\Phi(x_n)\|_{\mathcal{F}}^2 (S_n - p_n)^2. \quad (10)$$

Здесь в строке (9), $\|\cdot\|$ – эвклидова норма, а в строке (10), $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ – норма на $\mathcal{F}$.

Так как $(S_n - p_n)^2 \leq 1$ для всех n и

$$\begin{aligned} \|W(p_n, z_n)\|^2 &= \sum_{v \in V^2} (W_v(p_n, z_n))^2 \leq \\ &\leq \sum_{v \in V^2} W_v(p_n, z_n) = 1, \end{aligned}$$

вычитаемая сумма в строке (9) ограничена сверху числом N .

Так как $\|\Phi(x_n)\|_{\mathcal{F}} = c_{\mathcal{F}}(x_n)$ и $c_{\mathcal{F}}(x) \leq c_{\mathcal{F}}$ для всех x , вычитаемая сумма в строке (10) ограничена сверху величиной $c_{\mathcal{F}}^2 N$. В результате получаем:

$$\left\| \sum_{n=1}^N W(p_n, z_n)(S_n - p_n) \right\| \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N}, \quad (11)$$

$$\left\| \sum_{n=1}^N \Phi(x_n)(S_n - p_n) \right\|_{\mathcal{F}} \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N} \quad (12)$$

для всех N . Обозначим: $\bar{\mu}_n = \sum_{i=1}^n W(p_i, z_i)(S_i - p_i)$. По (11), $\|\bar{\mu}_n\| \leq \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n}$ для всех n .

Пусть $\bar{\mu}_n = (\mu_n(v) : v \in V^2)$. По определению для любого v :

$$\mu_n(v) = \sum_{i=1}^n W_v(p_i, z_i)(S_i - p_i). \quad (13)$$

Вставляем величину $I(v)$ в сумму (13), где I – характеристическая функция произвольного подмножества $S \subseteq [0, 1]^2$, суммируем по $v \in V^2$ и изменяем порядок суммирования. Применяем неравенство Коши–Буняковского для векторов $\bar{I} = (I(v) : v \in V^2)$, $\bar{\mu}_n = (\mu_n(v) : v \in V^2)$ в эвклидовой норме и получаем:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - p_i) \right| = \\ &= \left| \sum_{v \in V^2} I(v) \sum_{i=1}^n W_v(p_i, z_i)(S_i - p_i) \right| = \\ &= |\langle \bar{I}, \bar{\mu}_n \rangle| \leq \|\bar{I}\| \cdot \|\bar{\mu}_n\| \leq \sqrt{|V^2|(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n} \end{aligned} \quad (14)$$

для всех n , где $|V^2| = (1/\Delta + 1)^2 \leq 4/\Delta^2$ – число элементов разбиения.

Пусть $\tilde{p}_i$ – случайная величина, принимающая значения $v \in V$ с вероятностями $w_v(p_i)$. Напомним, что $\tilde{z}_i$ – случайная величина, принимающая значения $v \in V$ с вероятностями $w_v(z_i)$.

Пусть $S \subseteq [0, 1]^2$ и I – характеристическая функция этого множества. Для любого i математическое ожидание случайной величины $I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)$ равно

$$\begin{aligned} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) &= \\ &= \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1), \end{aligned} \quad (15)$$

где $v = (v^1, v^2)$.

Неравенство Хефдинга–Азумы утверждает, что для любого $\gamma > 0$

$$Pr \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \right| > \gamma \right\} \leq 2e^{-2n\gamma^2}$$

для всех n , где V_i – ограниченные мартингал-разности.

Далее мы полагаем $V_i = I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) - E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i))$ и $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\delta}}$, где $\delta > 0$. Имеем для любого $\delta > 0$, S и n , с вероятностью $1 - \delta$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) - \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| &\leq \\ &\leq \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \end{aligned} \quad (16)$$

По определению детерминированного прогноза, суммы:

$$\sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - p_i) \text{ и } \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1)$$

различаются не более чем на Δ для всех i , где $v = (v^1, v^2)$. Суммируя (15) по $i = 1, \dots, n$ и используя неравенство (14), получаем:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V^2} W_v(p_i, z_i) I(v)(S_i - v^1) \right| \leq \\ &\leq \Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2} \end{aligned} \quad (17)$$

для всех n .

По (16) и (17) для любых S и n , имеем с вероятностью $1 - \delta$:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq \\ &\leq \Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \end{aligned} \quad (18)$$

По неравенству Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{n=1}^N D(x_n)(S_n - p_n) \right| = \\
 & = \left| \sum_{n=1}^N (S_n - p_n)(D \cdot \Phi(x_n)) \right| = \\
 & = \left| \left(\sum_{n=1}^N (S_n - p_n)\Phi(x_n) \cdot D \right) \right| \leq \\
 & \leq \left\| \sum_{n=1}^N (S_n - p_n)\Phi(x_n) \right\|_{\mathcal{F}} \cdot \|D\|_{\mathcal{F}} \leq \\
 & \leq \|D\|_{\mathcal{F}} \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)N}.
 \end{aligned}$$

Предложение доказано. $\triangle$

Переходим теперь к заключительному этапу доказательства теоремы 2.

Выражение $\Delta n + 2\sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n/\Delta^2}$ из оценок (17) и (18) принимает свое минимальное значение при $\Delta = \sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{1}{4}}$. В этом случае, правая часть неравенства (17) равна

$$\Delta n + 2\sqrt{n(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)/\Delta^2} = 2\Delta n 2\sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}n^{\frac{3}{4}}. \quad (19)$$

Далее, будем использовать верхнюю оценку $2\Delta n$ для (17).

Для получения оценки (3) выберем монотонную последовательность чисел $\Delta_1 > \Delta_2 > \dots$, так что $\Delta_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Также будем использовать возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots$. Для произвольного s на шагах $n_s \leq n < n_{s+1}$ мы будем использовать для рандомизации разбиение интервала $[0, 1]$ на подынтервалы длины Δ_s . Начинаем наши последовательности с $n_1 = 1$ и $\Delta_1 = 1$.

Определим числа $n_2, n_3, \dots$ так, что неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 4(s+1)\Delta_s n \quad (20)$$

выполнено для всех $n_s \leq n \leq n_{s+1}$ и для всех $s \geq 1$.

Мы определим эту последовательность с помощью метода математической индукции по s . Допустим, что n_s ($s \geq 1$) уже определено так, что неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 4s\Delta_{s-1}n \quad (21)$$

выполнено для всех $n_{s-1} \leq n \leq n_s$. Допустим, что также выполнено дополнительное неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 4s\Delta_s n_s. \quad (22)$$

Определим n_{s+1} . Рассмотрим предсказания p_i ($\tilde{p}_i$ – их рандомизированные значения), вычисленные с помощью определенного выше алгоритма при дискретизации $\Delta = \Delta_{s+1}$. Первые n_s

из этих предсказаний не будем использовать (точнее, они появляются только в оценках (23) и (24); обозначим их $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_s}$). Добавим все предсказания p_i для $i > n_s$ к предсказаниям, полученным на предыдущих шагах индукции. Пусть n_{s+1} такое, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{n_{s+1}} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| + \\ & + \left| \sum_{i=n_s+1}^{n_{s+1}} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) + \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\hat{\mathbf{p}}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \hat{\mathbf{p}}_i)) \right| + \\ & + \left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\hat{\mathbf{p}}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \hat{\mathbf{p}}_i)) \right| \leq 4(s+1)\Delta_{s+1}n_{s+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь первая сумма из правой части неравенства (23) ограничена $4s\Delta_s n_s$ по предположению индукции (22). Вторая и третья суммы ограничены величинами $2\Delta_{s+1}n_{s+1}$ и $2\Delta_{s+1}n_s$, соответственно, где $\Delta = \Delta_{s+1}$ определена так, что выполнено (19). Это следует из (17) и выбора n_s .

Тогда предположение индукции (22) выполнено при

$$n_{s+1} \geq \frac{2s\Delta_s + \Delta_{s+1}}{\Delta_{s+1}(2s+1)} n_s.$$

Подобным образом получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| + \\ & + \left| \sum_{i=n_s+1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) + \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\hat{\mathbf{p}}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \hat{\mathbf{p}}_i)) \right| + \\ & + \left| \sum_{i=1}^{n_s} E(I(\hat{\mathbf{p}}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \hat{\mathbf{p}}_i)) \right| \leq 4(s+1)\Delta_s n \end{aligned} \quad (24)$$

при $n_s < n \leq n_{s+1}$. Здесь первая сумма из правой части неравенства также ограничена: $4s\Delta_s n_s \leq 4s\Delta_s n$ по предположению индукции (22). Вторая и третья суммы ограничены $2\Delta_{s+1}n \leq 2\Delta_s n$ и $2\Delta_{s+1}n_s \leq 2\Delta_s n$, соответственно. Это следует из (17) и выбора Δ_s . Индуктивное предположение (21) выполнено.

По (20) для произвольного s выполнено

$$\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 4(s+1)\Delta_s n \quad (25)$$

для всех $n \geq n_s$, если Δ_s удовлетворяет условию $\Delta_{s+1} \leq \Delta_s(1 - \frac{1}{s+2})$ для всех s .

Покажем, что последовательности n_s и Δ_s удовлетворяющие этим условиям, существуют.

Пусть $\epsilon > 0$ и $M = \lceil 2/\epsilon \rceil$, где $\lceil r \rceil$ есть наименьшее целое число большее или равное r . Определим $n_s = (s + M)^M$ и $\Delta_s = \sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n_s^{-\frac{1}{4}}$. Нетрудно проверить, что в этом случае все условия, наложенные на n_s и Δ_s , выполнены для всех достаточно больших s ; пусть они будут выполнены при всех $s \geq s_0$. Переопределим $n_i = n_{s_0}$ для всех $1 \leq i \leq s_0$. Заметим, что неравенства (21) и (22) выполнены для таких n_i тривиальным образом.

В оценке (21) для всех $n_s \leq n < n_{s+1}$ выполнено

$$\begin{aligned} 4(s+1)\Delta_s n &\leq 4(s+M)\Delta_s n_{s+1} = \\ &= 4\sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}(s+M)(s+M+1)^M(s+M)^{-\frac{M}{4}} \leq \\ &\leq 18(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}n_s^{\frac{3}{4}+2/M} \leq \\ &\leq 18(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}n^{\frac{3}{4}+\epsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\left| \sum_{i=1}^n E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i)) \right| \leq 18(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{1/4} n^{3/4+\epsilon} \quad (26)$$

для всех n .

Положим $V_i = I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) - E(I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i))$ и $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\delta}}$, где $\delta > 0$. Здесь E – символ условного математического ожидания относительно $\tilde{p}_1, \dots, p_{i-1}$. Случайные величины V_i образуют мартингал-разность относительно последовательности $\tilde{p}_1, \tilde{z}_1, \tilde{p}_2, \tilde{z}_2, \dots$

Согласно неравенству Хефдинга–Азумы для любого $\gamma > 0$:

$$P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i \right| > \gamma \right\} \leq 2e^{-2n\gamma^2}. \quad (27)$$

Комбинируя (26) с (27), получим, что для любых $\delta > 0$, S и n , с вероятностью $1 - \delta$, выполнено

$$\left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i, \tilde{z}_i)(S_i - \tilde{p}_i) \right| \leq 18(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{1/4} n^{3/4+\epsilon} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}.$$

Соотношение (5) может быть получено из неравенства (3) с помощью леммы Бореля–Кантелли. Доказательство аналогично рассуждению в конце доказательства теоремы 1 (см. раздел 4). Теорема 2 доказана. $\triangle$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

На каждом шаге i вычисляем детерминированный прогноз p_i согласно алгоритму, приведенному в разделе 3, и, после этого, переходим к его рандомизации $\tilde{p}_i$ используя параметры: $\Delta = \Delta_s = \sqrt{2}(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}}(s+M)^{-\frac{1}{4}}$ и $n_s = (s+M)^M$, где $n_s \leq i < n_{s+1}$. Пусть также $\tilde{S}_{i-1}$ – рандомизированная прошлая цена S_{i-1} финансового инструмента. В теореме 2, $z_i = S_{i-1}$ и $\tilde{z}_i = \tilde{S}_{i-1}$.

При данном методе рандомизации имеют место следующие верхние оценки;

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n I(\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1})(\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) \right| &\leq \sum_{t=0}^s (n_{t+1} - n_t) \Delta_t \leq \\ &\leq 4(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n_s^{\frac{3}{4}} \leq 4(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $n_s \leq n < n_{s+1}$.

Пусть $D(x)$ – произвольная функция из RKHS $\mathcal{F}$. Очевидным образом, оценка (28) верна, если мы заменим $I(\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1})$ на $\|D\|_+^{-1} D(\mathbf{x}_i)$. Для простоты, мы приведем оценки для случая, когда $D(x) \geq 0$ для всех x и

$$\tilde{M}_i \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используем обозначения:

$$\nu_1(n) = 4(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}, \quad (29)$$

$$\nu_2(n) 18n^{\frac{3}{4}+\epsilon} (c_{\mathcal{F}}^2 + 1)^{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \quad (30)$$

$$\nu_3(n) = \sqrt{(c_{\mathcal{F}}^2 + 1)n} \quad (31)$$

Далее все суммы предполагаются для $i = 1, \dots, n$. Мы также используем неравенство Хефдинга–Азумы.

Для произвольного $\delta > 0$, с вероятностью $1 - \delta$, имеет место следующая цепь равенств и неравенств:

$$\mathcal{K}_n^M = \sum_{i=1}^n \tilde{M}_i(S_i - S_{i-1}) = \quad (32)$$

$$= \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (S_i - \tilde{p}_i) + \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) + \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) \geq \quad (33)$$

$$\geq \sum_{\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}} (\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) - \nu_1(n) - \nu_2(n) \geq \quad (34)$$

$$\geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{p}_i - \tilde{S}_{i-1}) - \nu_1(n) - \nu_2(n) =$$

$$= \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(p_i - S_{i-1}) + \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{p}_i - p_i) -$$

$$- \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(\tilde{S}_{i-1} - S_{i-1}) - \nu_1(n) - \nu_2(n) \geq \quad (35)$$

$$\geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(p_i - S_{i-1}) - 3\nu_1(n) - \nu_2(n) = \quad (36)$$

$$= \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - S_{i-1}) -$$

$$- \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - p_i) - 3\nu_1(n) - \nu_2(n) \geq \quad (37)$$

$$\geq \|D\|_+^{-1} \sum_{i=1}^n D(x_i)(S_i - S_{i-1}) -$$

$$- 3\nu_1(n) - \nu_2(n) - \|D\|_+^{-1} \|D\|_{\mathcal{F}} \nu_3(n) =$$

$$= \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D - 3\nu_1(n) - \nu_2(n) - \|D\|_+^{-1} \|D\|_{\mathcal{F}} \nu_3(n).$$

При переходе от (33) к (34) были использованы неравенство (3) из теоремы 2 и оценка (28); по этой причине, были вычтены члены (29) и (30). При переходе от (35) к (36) дважды была применена оценка (28); по этой причине член (28) был вычтен дважды. При переходе от (36) к (37) было использовано неравенство (4) из теоремы 2; таким образом, был вычтен член (31).

Таким образом, существует такая константа $c > 0$, что для любого $\delta > 0$ и для любого n , с вероятностью $1 - \delta$, выполнено

$$\mathcal{K}_n^M \geq \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D - cn^{\frac{3}{4}+\epsilon} - \sqrt{\frac{n}{2} \ln \frac{2}{\delta}}. \quad (38)$$

Неравенство (2) будет следовать из (38). Для доказательства используем лемму Бореля-Кантелли. Эта лемма утверждает, что если для некоторой последовательности событий A_n ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ сходится, то вероятность того, что событие A_n происходит для бесконечно многих n равна 0.

Для того, чтобы применить эту лемму, вернемся к исходной форме неравенства Хефдинга. Обозначим $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{2}{\delta}}$. Тогда $\delta = e^{-2n\gamma^2}$. Перепишем (38) в форме:

$$\frac{1}{n} \mathcal{K}_n^M - \|D\|_+^{-1} \frac{1}{n} \mathcal{K}_n^D \geq -cn^{-\frac{1}{4}+\epsilon} - \gamma. \quad (39)$$

Согласно (38), для любых n и $\gamma > 0$, неравенство (39) не выполнено с вероятностью $2e^{-2n\gamma^2}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\gamma^2}$ сходится при $\gamma > 0$, по лемме Бореля-Кантелли, при фиксированном $\gamma > 0$, неравенство (39) может нарушаться не более чем для конечного числа различных n . Отсюда следует, что событие:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \|D\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^D) \geq 0$$

выполнено почти всюду.

Теорема 1 доказана для произвольной неотрицательной функции $D \in \mathcal{F}$. Доказательство утверждения для произвольной неположительной функции $D \in \mathcal{F}$, а также для функций общего вида, аналогично.

Мы расширим полученные асимптотические оценки для любой непрерывной функции $D(x)$ с помощью универсального ядра и соответствующего канонического RKHS.

Гильбертово пространство RKHS $\mathcal{F}$ на X называется *универсальным*, если X – компактное метрическое пространство и любая непрерывная функция f на X может быть аппроксимирована в метрике $\|\cdot\|_{\infty}$ функцией из $\mathcal{F}$ с произвольной точностью: для любого $\epsilon > 0$ существует $D \in \mathcal{F}$ такая, что

$$\sup_{x \in X} |f(x) - D(x)| \leq \epsilon$$

(см. Стейнварт [8], Определение 4).

Мы будем использовать $X = [0, 1]$. Соболевское пространство $\mathcal{F} = H^1([0, 1])$ является универсальным RKHS (см. работы [8], [10]).

Существование универсального RKHS на $[0, 1]$ позволяет получить полную версию теоремы 1:

Можно построить алгоритм для вычисления детерминированных предсказаний p_i и метод последовательной рандомизации такие, что соответствующая рандомизированная торговая стратегия $\tilde{M}_i$ выигрывает на одну единицу финансового инструмента не меньше, чем любая нетривиальная непрерывная стационарная стратегия f . Точнее неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\mathcal{K}_n^M - \|f\|_+^{-1} \mathcal{K}_n^f) \geq 0 \quad (40)$$

выполнено почти всюду относительно распределения вероятностей, порожденного последовательной рандомизацией.

Этот результат непосредственно следует из неравенства (38) и возможности как угодно точно аппроксимировать любую непрерывную функцию f на $[0, 1]$ с помощью функции D из универсального (соболевского) RKHS $\mathcal{F}$.

Торговая стратегия $\tilde{M}_i$, удовлетворяющая (40), называется *универсально состоятельной*.

Заметим, что свойство универсальной состоятельности (40) является асимптотическим и ничего не утверждает о скорости сходимости в случае произвольной непрерывной функции f . Оценка скорости сходимости (38) была получена для функций из более специальных пространств RKHS.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Исходные данные и технология вычислений.

Численные эксперименты по прогнозированию временных рядов и виртуальной торговле акциями проводили на материале поминутных цен акций нескольких произвольно выбранных российских компаний, представленных на рынке ММВБ (за период с 01.05.2008 по 01.11.2008) и нескольких компаний, представленных на рынках США (за период с 01.11.2012 до 01.03.2013).

Схема расчета, определенная в доказательстве Теоремы 1, была существенно упрощена. Поскольку ядра K и M из доказательства теоремы имеют аналогичный вид в большинстве практических приложений, мы использовали для их приближения гладкую ядерную функцию:

$$\mathcal{K}(p, p_n) = \cos((\pi(p - p_n)/2).$$

Мы не включали “сигналы” непосредственно в ядро. Фактически, воздействие сигналов учитывается, когда мы используем правило принятия решений $\tilde{p}_i > \tilde{S}_{i-1}$.

Для торгового алгоритма, работающего в реальном времени, скорость вычислений имеет решающее значение. Проведенные ранее [2] эксперименты показывают, что для ограничения времени на вычисление очередной точки прогноза до секунд (на персональном компьютере) длина предыстории должна быть не более 5000 точек. Для рядов длины, большей чем 5000 точек, использовали параллельно два или более процессоров, работающих на частично пересекающихся временных отрезках. Из результатов прогнозирования на таких частично перекрывающихся отрезках временного ряда формируется единый суммарный прогноз. При выборе одного из значений прогноза для точек, где имеется два или более прогнозов, предпочтение отдается процессу с наибольшей длиной предыстории.

На каждом из скользящих временных отрезков первые L_{train} точек серии используются только для локальной настройки модели – масштабирования цен на акции, определения размера сетки рандомизации и для начального обучения алгоритма прогнозирования.

Для построения прогноза цены на акции масштабировали так, чтобы нормализованная цена принимала значения в отрезке $[0,1]$. Масштабирование выполняли независимо для каждого из частично пересекающихся временных отрезков.

Для сравнения использовали стратегию “buy-and-hold” (“B&H”), при которой в начале периода приобретается определенное число акций, которые продаются в конце игры.

На рис. 3 приведены графики изменения цен нескольких российских ценных бумаг за период с 01.05.2008 по 01.11.2008 на рынке ММВБ. Для удобства сравнения графики приведены в процентах от начальной цены, которая принимается за 100%.

Как видим, для всех кривых характерно падение, что неудивительно, поскольку выбранный период соответствует развитию экономического кризиса.

На Рис. 4 приведены аналогичные графики для нескольких ценных бумаг на рынках США за период с 01.11.2012 по 01.03.2013. Соответствующих данных по рынкам США за период с 01.05.2008 по 01.11.2008 уже не было в открытом доступе на сайте FINAM.RU к моменту проведения численных экспериментов.

Как видим, для данных бумаг в анализируемом интервале времени характерно разнонаправленное движение цен.

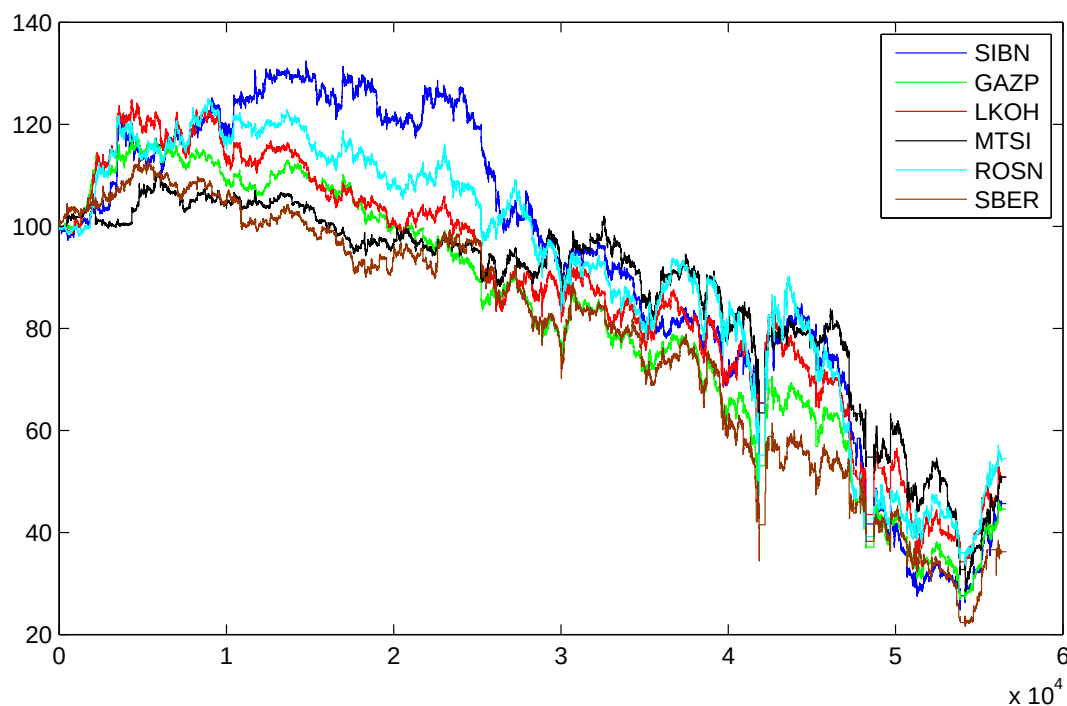


Рис. 3. Графики изменения нормированных цен нескольких российских акций за период с 01.05.2008 по 01.11.2008.

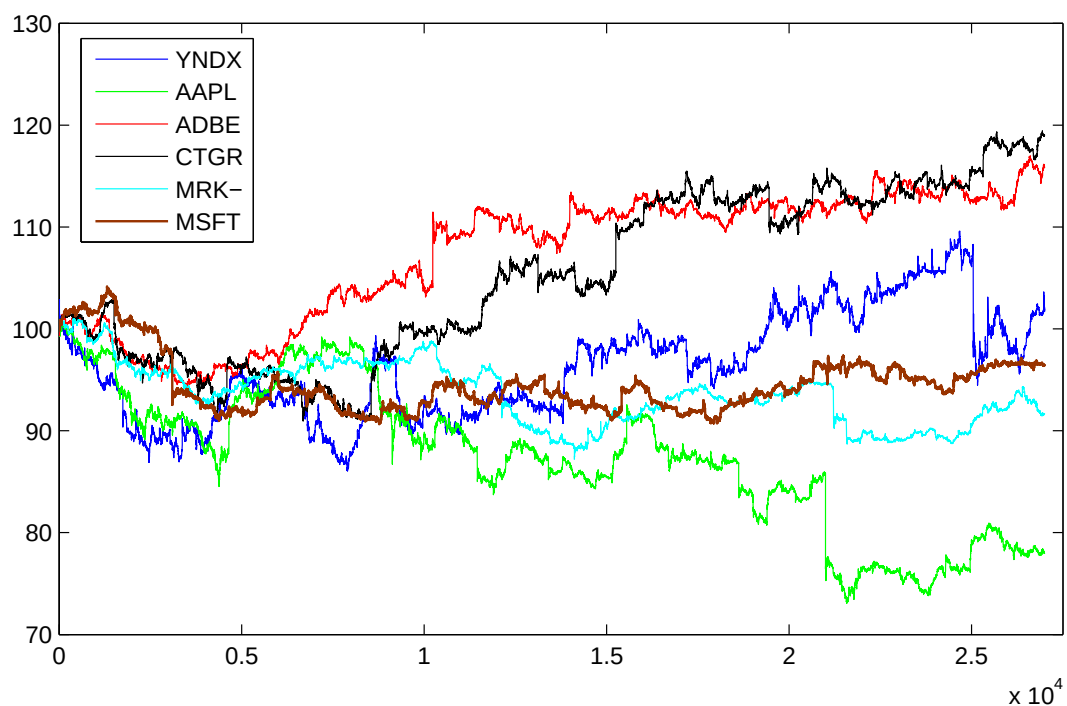


Рис. 4. Графики изменения нормированных цен нескольких акций на рынках США за период с 01.11.2012 по 01.03.2013.

Результаты экспериментов по виртуальной торговле.

Численные эксперименты по прогнозированию временных рядов и виртуальной торговле акциями проводили на материале поминутных цен акций.

Виртуальную торговлю проводили с использованием рандомизированной стратегии, описанной в разделе 2. Число акций K , продаваемых или приобретаемых на каждом шаге торговли, принималось постоянным (напр., $K=10$). На каждом шаге t на основе сравнения рандомизированной текущей цены и рандомизированного прогноза на шаг $t+1$ принимали решение о том, “пойдет ли рынок” вверх или вниз. В первом случае покупали K акций по цене $Y(t)$, а во втором (прогноз “вниз”) продавали K акций. На шаге $t+1$ сначала восстанавливали *status quo*, т.е. продавали K акций по цене $Y(t+1)$, если предыдущий прогноз был “вверх” или покупали K “недостающих” акций по цене $Y(t+1)$. Затем делали прогноз на следующий шаг и так далее. Комиссия за транзакции не взималась.

Поскольку значения цены и прогноза рандомизированы, то результат виртуальной торговли является случайным процессом. Для каждой акции проводили 100 сеансов виртуальной торговли, полученные реализации случайных процессов усредняли и оценивали их среднее значение и стандартное отклонение.

На рисунках, вынесенных в Приложение, представлены результаты виртуальной торговли для нескольких российских и иностранных компаний, котируемых на рынках ценных бумаг. Показаны усредненные значения доходности при игре на “повышение” (LONG), “понижение” (SHORT), а также результаты стратегии “B&H”. По оси ординат отложены номера последовательных точек ряда, а по оси абсцисс значения “дохода” в процентах от начального капитала.

В последующих таблицах приведены усредненные результаты виртуальной торговли за указанные периоды времени для двух групп ценных бумаг. В столбцах таблицы приведены следующие параметры:

ТИКЕР – название ценной бумаги;

В столбцах LONG, SHORT, B&H – значения доходности (в процентах) на конец интервала наблюдения.

В столбцах E(LONG), E(SHORT), E(B&H) – средние значения доходности по всему интервалу наблюдения.

Для округления при рандомизации использовали сетку с размером ячейки в 0.1 от локального значения волатильности.

Таблица 1. Суммарные результаты торговли на площадке MMBB за период с 01.05.2008 до 01.11.2008. Для трех стратегий торговли (‘LONG’, ‘SHORT’ и ‘B & H’) приведены значения доходности в процентах от начальной суммы.

ТИКЕР	LONG	SHORT	'B & H'	E(LONG)	E(SHORT)	E(B&H)
GAZP	-31.14	37.96	-69.01	4.50	25.78	-21.17
LKOH	28.85	91.62	-62.60	24.78	40.44	-15.49
MTSI	463.85	515.88	-52.04	212.61	225.49	-12.88
ROSN	114.14	173.45	-59.27	67.56	76.88	-9.28
SBER	25.91	95.20	-69.09	33.17	55.00	-21.64
SIBN	628.75	699.13	-70.20	302.66	308.37	-5.52

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен универсальный алгоритм для проведения торговли акциями на финансовом рынке. Универсальность алгоритма заключается в том, что он позволяет получить

Таблица 2. Суммарные результаты виртуальной торговли на рынках США за период с 01.11.2012 по 01.03.2013. Для трех стратегий торговли ('LONG', 'SHORT' и 'B & H') приведены значения доходности в процентах от начальной суммы.

ТИКЕР	LONG	SHORT	'B & H'	E(LONG)	E(SHORT)	E(B&H)
AAPL	10.96	24.46	-13.50	4.04	8.94	-4.91
ADBE	15.55	-0.84	16.42	11.47	1.10	10.40
CTGR	5.90	-14.19	20.09	2.63	-5.16	7.79
MRK	9.46	15.87	-6.43	5.32	8.01	-2.71
MSFT	16.41	20.51	-4.16	5.98	12.84	-6.92
YNDX	66.33	48.37	17.91	36.21	29.49	6.67

доход от торговли асимптотически не меньший, чем любая торговая стратегия, представленная произвольной непрерывной функцией от входной информации. Свойство асимптотической оптимальности сохраняется для любой последовательности цен акций независимо от характера их поведения.

Впервые идея универсальности в финансовой математике была предложена Ковером [1], который разработал алгоритм построения динамического универсального портфеля акций. Ковер также не использовал никаких предположений о стохастическом характере изменения цен акций.

Основа нашей универсальной стратегии – рандомизированный алгоритм для вычисления хорошо калибруемых предсказаний.

В этой статье мы рассматривали процесс торговли с одной акцией. Следующая задача заключается в расширении этого алгоритма для торговли несколькими акциями, т.е. для управления портфелем акций.

Предложенные алгоритмы были реализованы в виде компьютерных программ и соответствующей компьютерной технологии их использования. Были проведены экспериментальные расчеты на реальных исторических данных.

Результаты проведенных расчетов показывают, что предложенный универсальный алгоритм в большинстве случаев позволяет получать доход, превышающий доход стандартных торговых стратегий при отсутствии комиссии за игру на финансовом рынке. Причем универсальный алгоритм одновременно получает положительный доход как при игре на повышение, так и при игре на понижение независимо от характера изменения цены финансового инструмента. Характерный пример – результаты игры в условиях кризиса 2008 г., приведенные в таблице 2 и на соответствующих графиках.

Данные расчеты показывают высокую степень неэффективности финансового рынка (в особенности российского). Регулярное их проведение может дать полезную информацию для технического анализа финансового рынка.

Приведенные экспериментальные расчеты служат для иллюстрации предлагаемого подхода и обосновывающих его теоретических результатов.

Недостатком предложенной системы игры является высокая частота транзакций, которая ведет к недопустимо большим расходам для оплаты комиссии. Тем не менее, алгоритм может быть оптимизирован для построения реальных торговых стратегий. Более подробный анализ финансовых возможностей алгоритма приведен в работе [11].

В данном разделе приведены иллюстрации к основному тексту. На первых двух рисунках приведены пучки графиков доходности для 100 случайных траекторий торговли на повышение с акциями GAZP и CTGR.

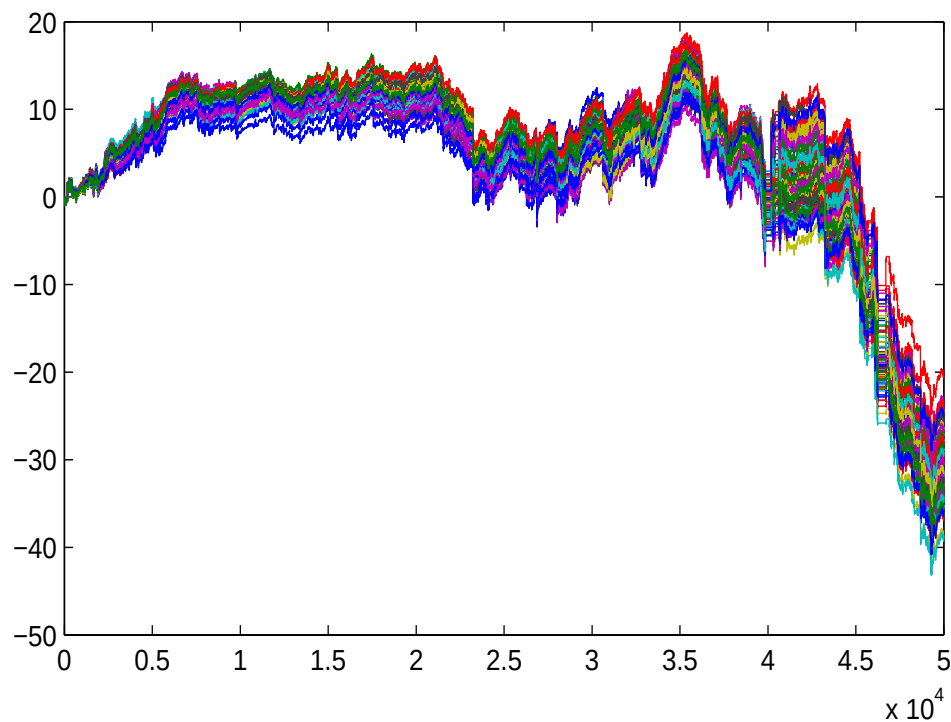


Рис. 5. Графики игры на повышение для акций GAZP.

На последующих рисунках показаны графики доходности трех сравниваемых стратегий торговли.

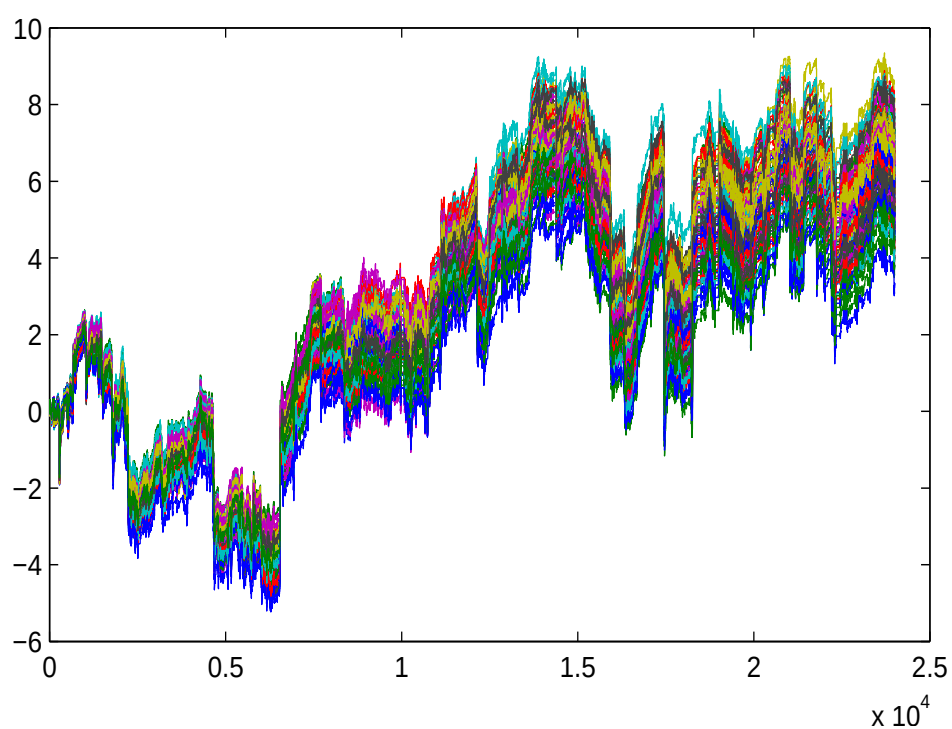


Рис. 6. Графики игры на повышение для акций CTGR.

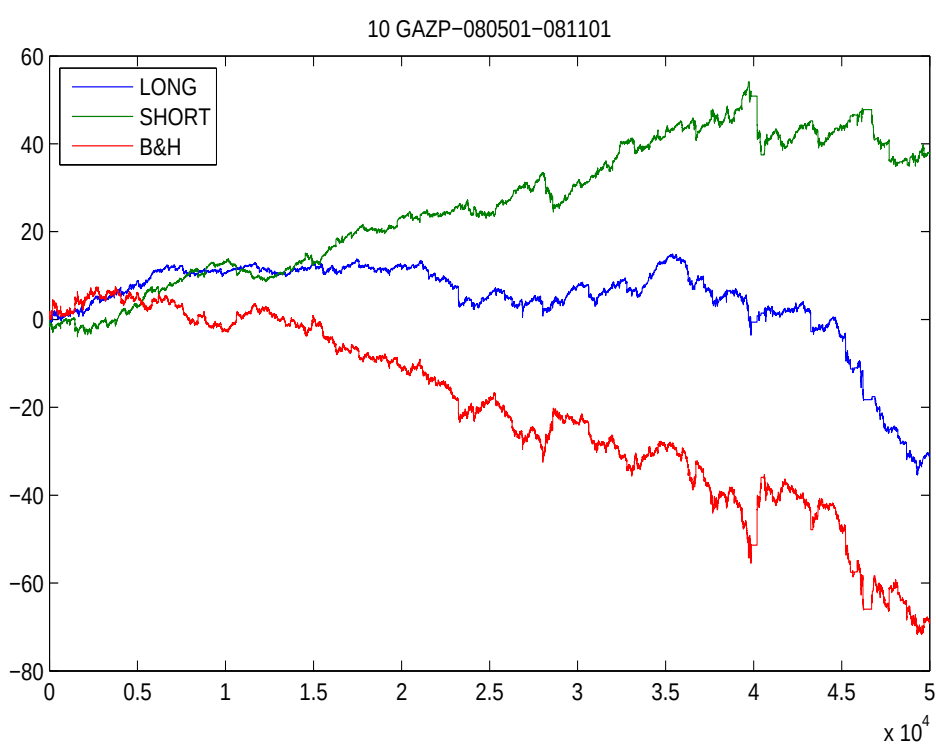


Рис. 7. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях GAZP.

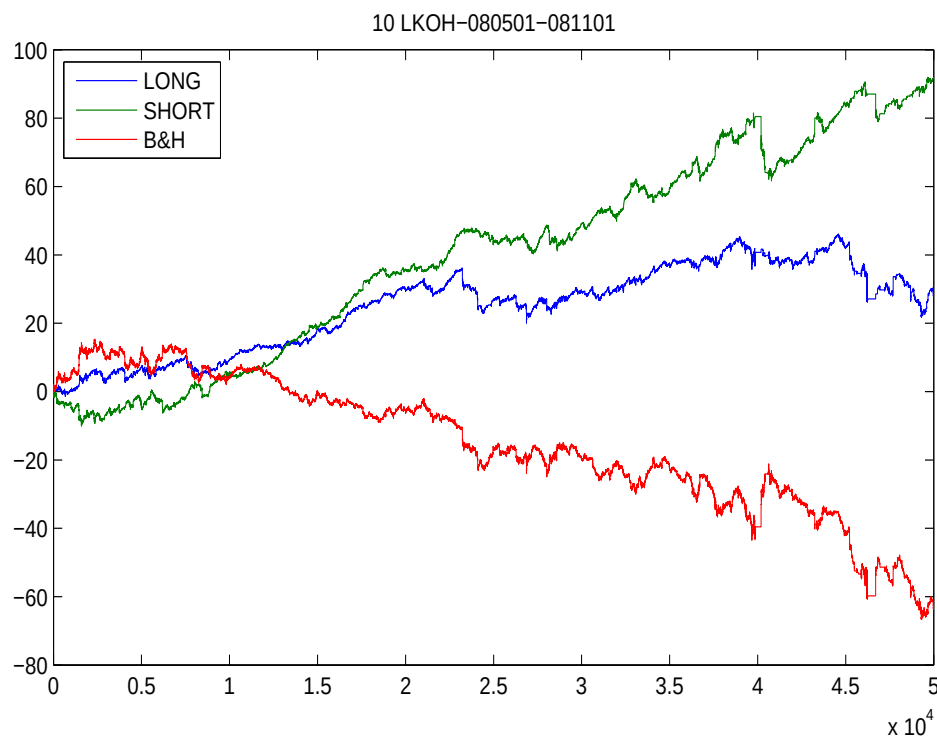


Рис. 8. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях LKOH.

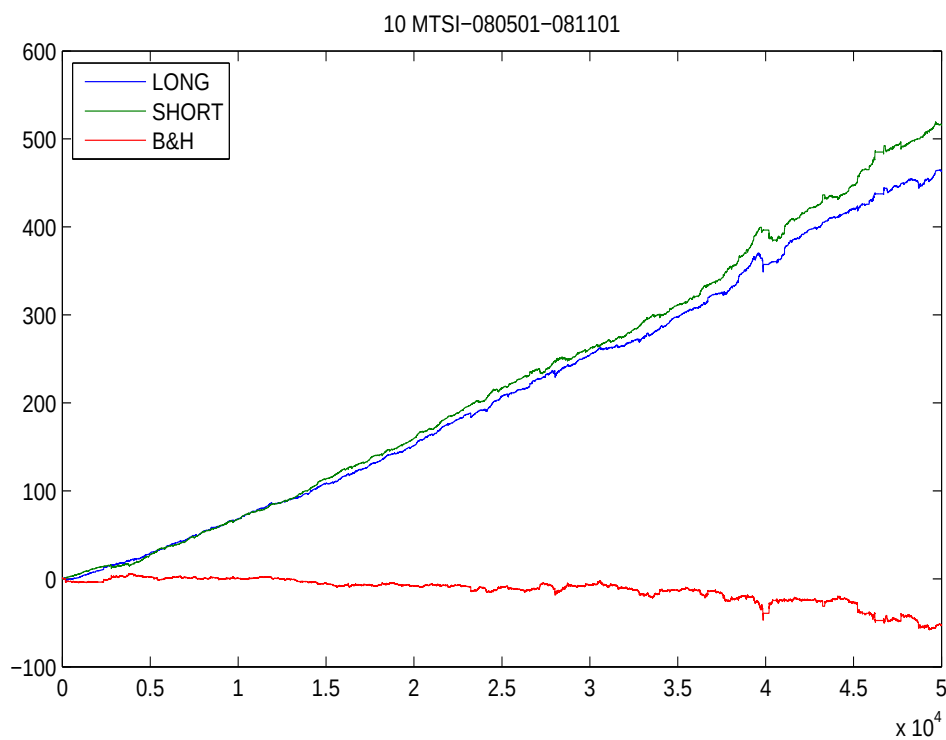


Рис. 9. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях MTSI.

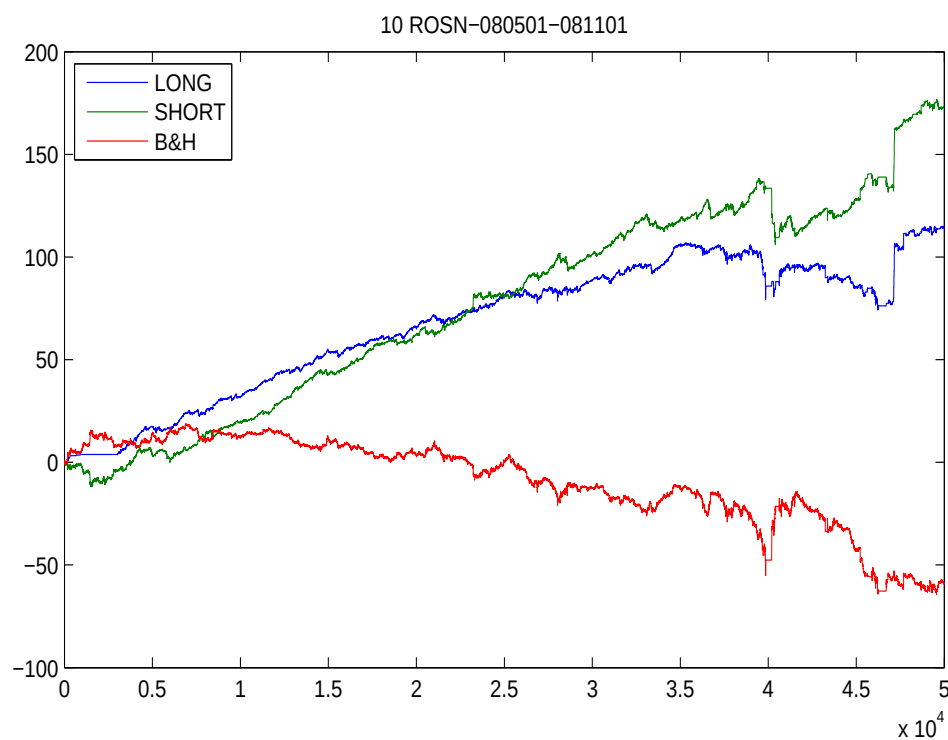


Рис. 10. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях ROSN.

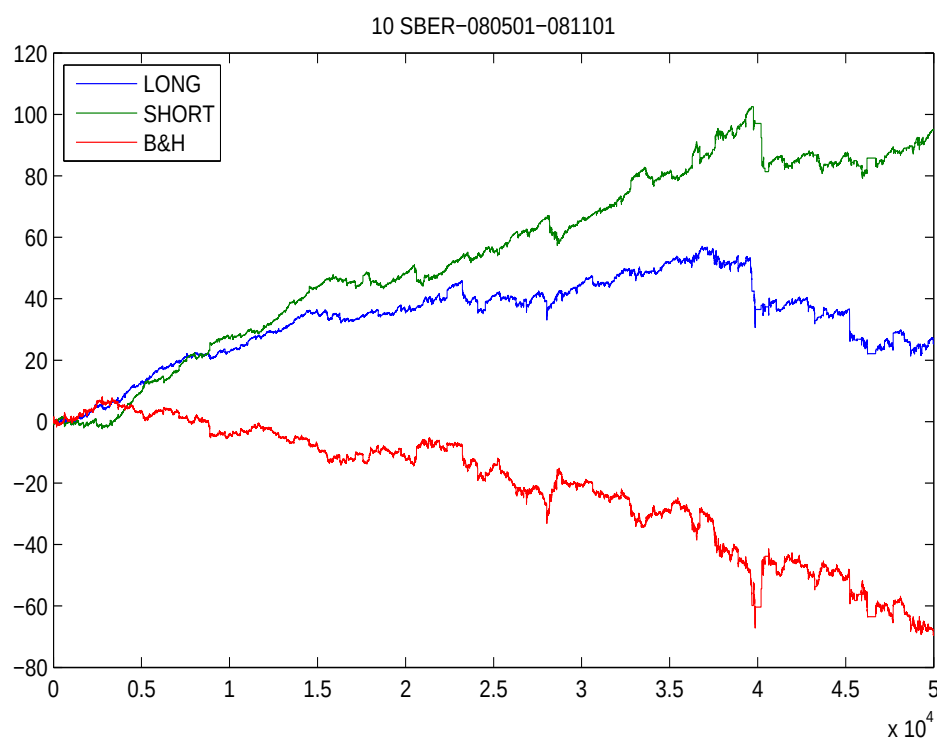


Рис. 11. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях SBER.

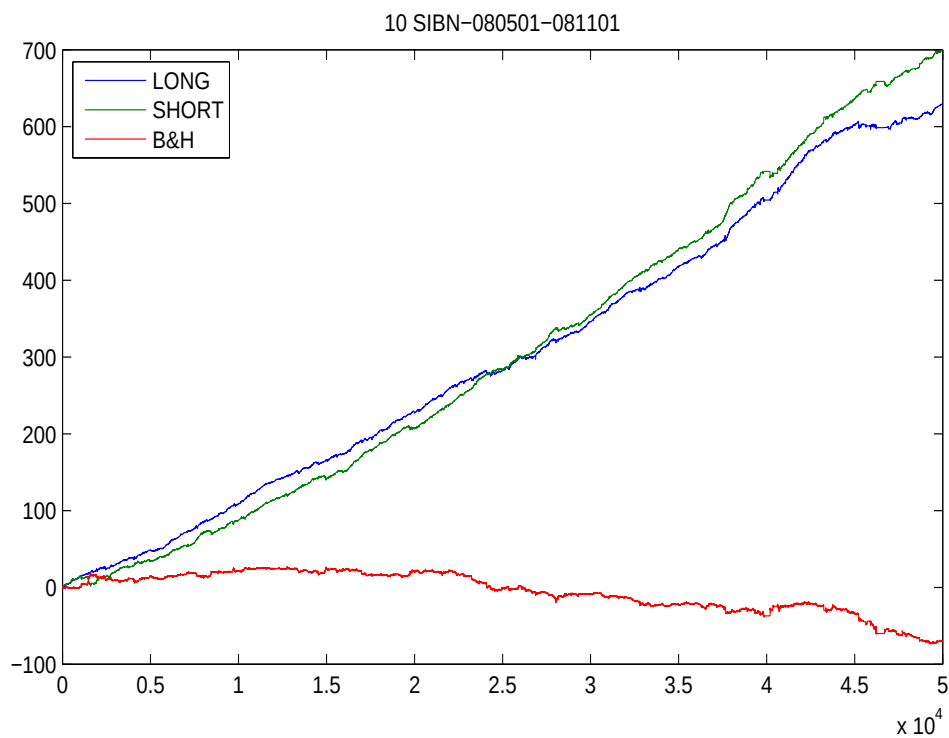


Рис. 12. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях SIBN.

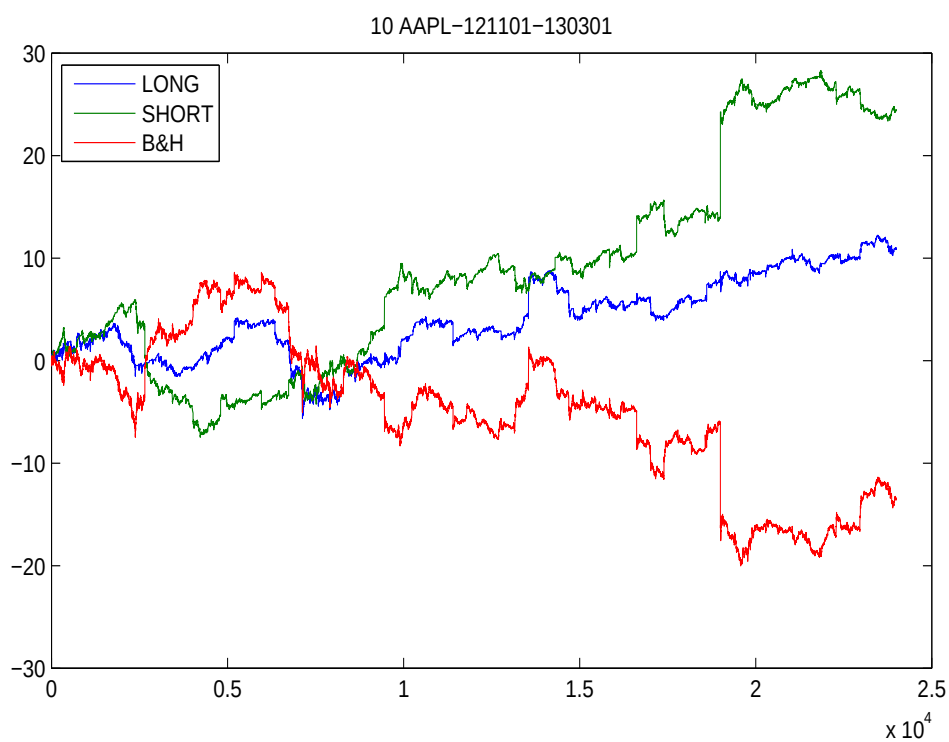


Рис. 13. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях AAPL.

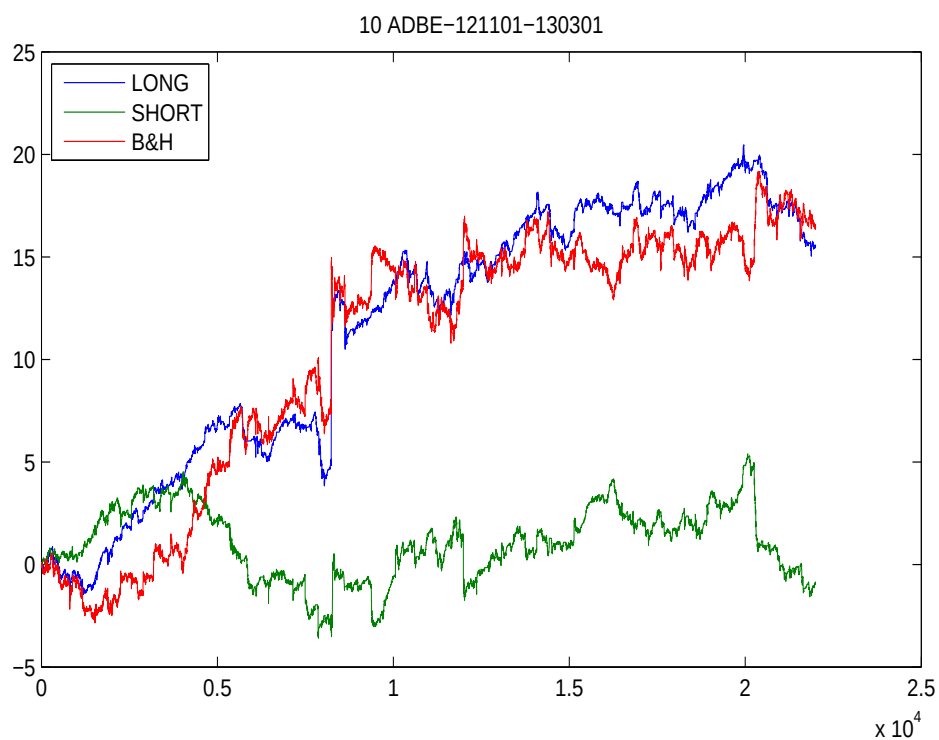


Рис. 14. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях ADBE.

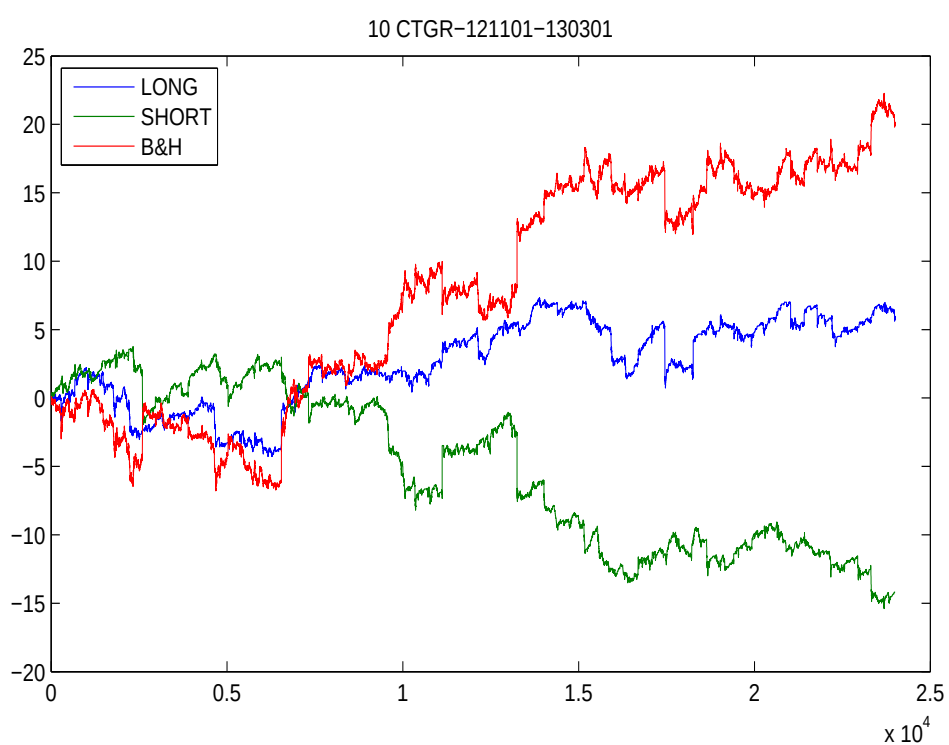


Рис. 15. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях CTGR.

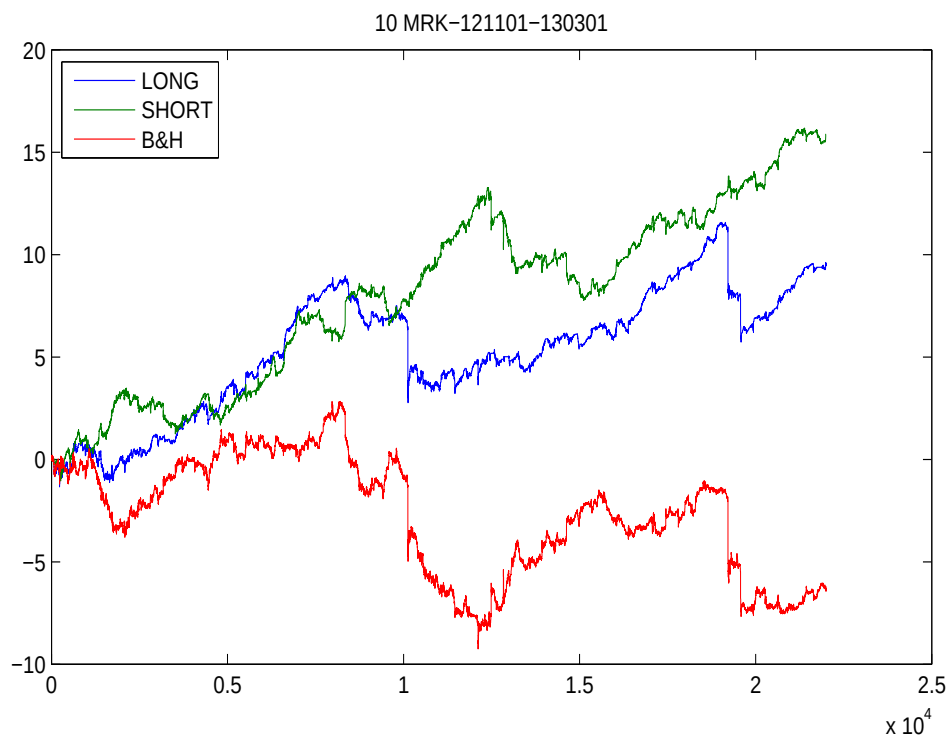


Рис. 16. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях MRK.

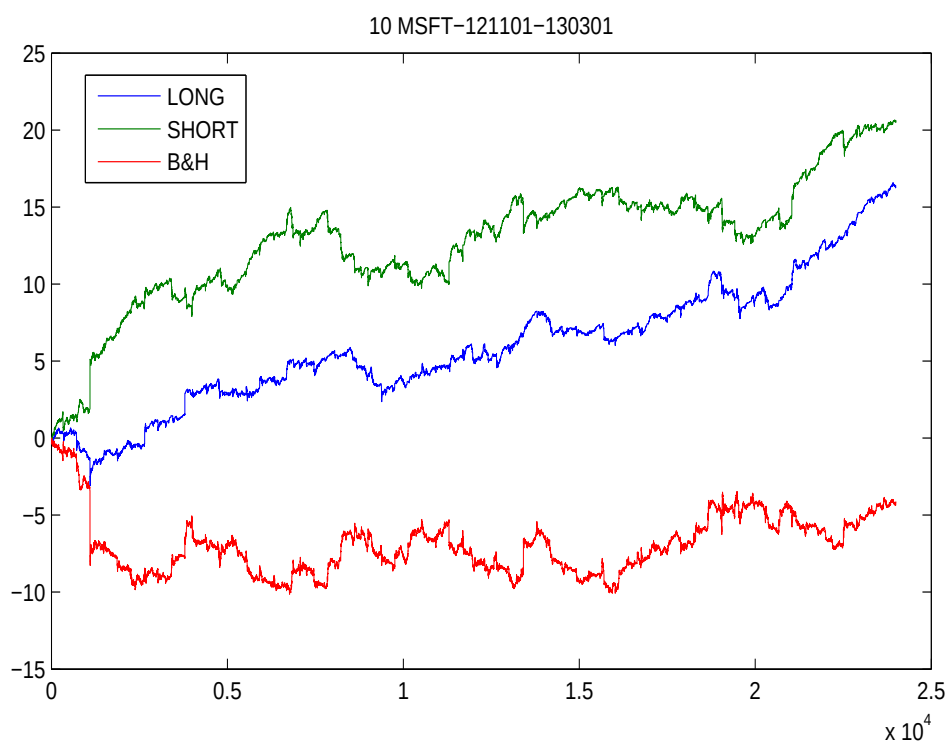


Рис. 17. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях MSFT.

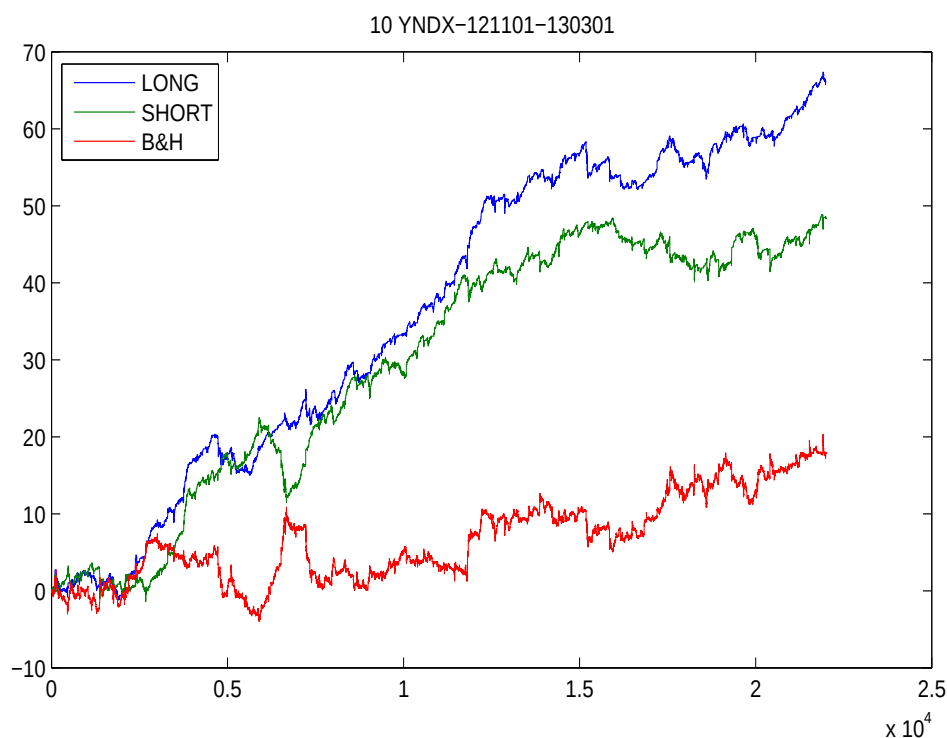


Рис. 18. Усредненные результаты виртуальной торговли на акциях YNDX.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cover T., Ordentlich E. Universal portfolio with side information // IEEE Transaction on Information Theory – 1996. – V. 42. – P. 348–363.
2. Вьюгин В.В., Трунов В.Г., Адаптивное прогнозирование и его применение для технического анализа финансовых инструментов // Информационные процессы. 2011.Т. 11, № 1, С.46-75.
3. Dawid A.P. Calibration-based empirical probability [with discussion] // Ann. Statist. – 1985. – V. 13. – P. 1251–1285.
4. Foster D.P., Vohra R. Asymptotic calibration // Biometrika. – 1998. – V. 85. – P. 379–390.
5. Jyh-Ying Peng J.A.D. Aston. The State Space Models Toolbox for MATLAB. Journal of Statistical Software, 41, Issue 6, 2011
6. Kakade, S.M., Foster, D.P. Deterministic calibration and Nash equilibrium // Lecture Notes in Computer Science – Berlin: Springer, 2004. – V. 3120. – P. 33–48.
7. Scholkopf B. and Smola A. Learning with Kernels. MIT Press, Cambridge, MA, 2002.
8. Steinwart I. On the influence of the kernel on the consistency of support vector machines // Journal of Machine Learning Research, 2, 67-1193, 2001
9. Vovk V., Takemura A., Shafer G. Defensive forecasting // Proceedings of the 10th International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics (ed. by R. G. Cowell and Z. Ghahramani) – Cambridge UK: Society for Artificial Intelligence and Statistics, 2005. – P. 365–372.
10. Vovk V. On-line regression competitive with reproducing kernel Hilbert spaces (extended abstract) // Lecture Notes in Computer Science – Berlin: Springer, 2006. – V. 3959. – P. 452–463.
11. V'yugin V., Trunov V. Universal algorithmic trading // Journal of Investment Strategies – V.2(1) – 2012/13 – P.63–88.

Adaptive Universal Trading Strategy

V'yugin V.V., Trunov V.G.

In the first part of the article, a universal method of algorithmic trading in stock markets is proposed. It is asymptotically as profitable (good) as any trading strategy that is not excessively complex. This strategy is compared with strategies computing the investment at each step using a fixed continuous function of the side information. The universal strategy makes decisions basing on predictions of future stock prices computed by the randomized algorithm of well-calibrated forecasting based on Dawid's notion of calibration. This algorithm is a modification of Kakade and Foster's randomized algorithm combined with a similar forecasting method proposed by V.G. Vovk. In the second part, the results of numerical experiments with historical data are presented.

KEYWORDS: algorithmic trading; stock prices; well-calibrated forecasting.