

## Стационарные характеристики системы $M_2^X/M/n$ с гистерезисным управлением интенсивностью входящего потока

Ю. В. Жернов, К. Ю. Жернов

*Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина*

Поступила в редколлегию 29.11.2013

**Аннотация**—Рассмотрена многоканальная система обслуживания без ограничений на длину очереди с показательными распределениями времени обслуживания и интервалов времени между моментами поступления групп заявок, в которой применяется гистерезисный механизм управления интенсивностью входящего потока. В систему поступают независимые потоки заявок двух типов, один из которых блокируется в режиме перегрузки. Предложен алгоритм определения стационарного распределения числа заявок и стационарных характеристик (средней длины очереди, среднего времени ожидания в очереди, вероятности потери заявок). Полученные результаты проверены с помощью имитационной модели, построенной с привлечением инструментальных средств GPSS World.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** многоканальная система обслуживания, групповое поступление заявок, гистерезисное управление интенсивностью входящего потока, стационарные характеристики.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

С целью предотвращения перегрузок в информационно-телекоммуникационных системах, моделируемых с помощью систем обслуживания, используется гистерезисное управление нагрузкой с несколькими типами порогов [1]. Управление может осуществляться как входящим потоком и его параметрами, так и процессом обслуживания.

Согласно [1], системы обслуживания с гистерезисным управлением могут служить адекватными моделями для оценки качества функционирования SIP-серверов в условиях перегрузок. Подробное описание применения таких систем обслуживания к моделированию SIP-серверов, работающих в условиях перегрузки, приведено в [1–3].

В силу практической важности, исследованию систем обслуживания с гистерезисным управлением посвящено большое число научных публикаций. В частности, достаточно подробный обзор результатов, полученных в этом направлении, можно найти в [4–7]. В большинстве работ изучаются одноканальные системы с произвольным распределением времени обслуживания.

В настоящей работе рассматривается многоканальная система обслуживания  $M_2^X/M/n$  с независимыми потоками заявок двух типов, в которой управление применяется только к параметрам входящих потоков, причём переключения на режим перегрузки осуществляются не в моменты окончания обслуживания заявок, а в моменты прибытия заявок в систему, что более естественно для практических применений.

При построении случайного процесса, описывающего число заявок в системе, мы разделяем его состояния, соответствующие нормальному режиму работы системы и режиму перегрузки. Это позволяет записать систему уравнений для стационарных вероятностей и построить алгоритм её решения. Для отыскания стационарных характеристик очереди применяется аппарат

производящих функций. С помощью такого же подхода в работе [8] были найдены стационарные характеристики системы  $M^X/M/1$  с гистерезисным управлением интенсивностью обслуживания.

## 2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим  $n$ -канальную систему обслуживания  $M_2^X/M/n$ , в которую поступают независимые потоки групп заявок двух типов. С вероятностью  $a_k$  (соответственно  $b_k$ ) число заявок в группе первого (соответственно второго) потока равно  $k$  ( $k \geq 1$ ), причём

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1; \quad a_{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^s a_k < \infty, \quad b_{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^s b_k < \infty, \quad s = 1, 2.$$

Промежутки времени между моментами поступления групп заявок  $k$ -го потока — независимые случайные величины, распределённые по показательному закону с параметром  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ). В общем потоке, являющемся суперпозицией потоков первого и второго типа, промежутки времени между моментами поступления групп заявок имеют показательное распределение с параметром  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  [9, с. 83]. Время обслуживания заявок каждого типа распределено по показательному закону с параметром  $\mu$ . Будем считать, что группы заявок обслуживаются в порядке их поступления, а внутри группы — в случайном порядке.

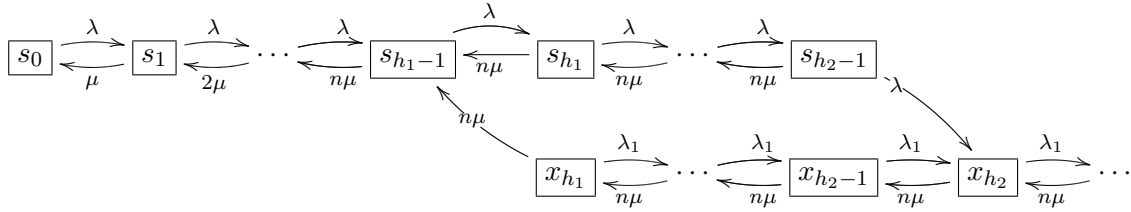
В системе реализован двухпороговый гистерезисный механизм управления поступающей нагрузкой, действующий следующим образом. Зафиксируем два числа  $h_1$  и  $h_2$ , для которых справедливы неравенства  $n < h_1 < h_2$ . С момента поступления в систему первой заявки и до того момента, когда в системе впервые окажется  $h_2$  заявок, система функционирует в нормальном режиме и к обслуживанию принимаются заявки обоих типов. Но как только в системе окажется  $h_2$  заявок, система переходит в режим перегрузки, прекращается приём заявок второго типа и принимаются лишь заявки первого типа. Этот режим продолжается до того момента, когда в системе станет  $(h_1 - 1)$  заявок. В этот момент система переходит в нормальный режим функционирования и снова начинается приём заявок обоих типов. Нормальный режим функционирует до того момента, когда в системе снова окажется  $h_2$  заявок. Тогда система переходит в режим перегрузки, снова прекращается приём заявок второго типа и так далее. Учитывая групповое поступление заявок, внесём в описанный механизм работы системы следующее уточнение: группа заявок второго типа, прибывшая в систему, работающую в нормальном режиме, вся допускается в систему, хотя в результате её присоединения число заявок в системе может и превысить допустимое значение  $h_2$ . В таком случае переключение на режим перегрузки осуществляется сразу после присоединения всей группы.

Будем считать, что выполнены неравенства  $h_1 - n \geq 2$  и  $h_2 - h_1 \geq 2$ . Эти предположения вводятся только для того, чтобы не рассматривать случаи, расчётные формулы для которых несколько отличаются от приводимых здесь, и несколько не умаляют общности полученных результатов.

## 3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК

Пусть  $\alpha = \lambda/\mu$ ,  $\alpha_i = \lambda_i/\mu$  ( $i = 1, 2$ ),  $\gamma = \alpha/n$ ,  $\gamma_i = \alpha_i/n$ , ( $i = 1, 2$ ), тогда  $\rho = \gamma_1 a_{(1)} + \gamma_2 b_{(1)}$ ,  $\rho_1 = \gamma_1 a_{(1)}$  — коэффициенты загрузки системы в нормальном режиме и в режиме перегрузки соответственно.

Введём нумерацию состояний системы (см. рис. 1):  $s_0$  — в системе нет ни одной заявки;  $s_i$  ( $1 \leq i \leq h_2 - 1$ ) — в системе, функционирующей в нормальном режиме, находится  $i$  заявок;  $x_i$  ( $i \geq h_1$ ) — в системе, работающей в режиме перегрузки, пребывает  $i$  заявок.

Рис. 1. Диаграмма состояний системы в случае  $a_1 = b_1 = 1$ 

Пусть  $p_i(t)$  и  $q_i(t)$  — вероятности пребывания системы в момент времени  $t$  в состояниях  $s_i$  и  $x_i$  соответственно. Предполагая, что существуют пределы  $p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$  ( $0 \leq i \leq h_2 - 1$ ),  $q_i = \lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t)$  ( $i \geq h_1$ ) (условия их существования мы получим ниже), запишем систему уравнений для определения стационарных вероятностей  $p_i$  и  $q_i$

$$\begin{aligned}
 & -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0; \\
 & -(\lambda + i\mu)p_i + \sum_{k=0}^{i-1} p_k(\lambda_1 a_{i-k} + \lambda_2 b_{i-k}) + (i+1)\mu p_{i+1} = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1); \\
 & -(\lambda + n\mu)p_i + \sum_{k=0}^{i-1} p_k(\lambda_1 a_{i-k} + \lambda_2 b_{i-k}) + n\mu p_{i+1} = 0 \quad (n \leq i \leq h_2 - 2; i \neq h_1 - 1); \\
 & -(\lambda + n\mu)p_{h_1-1} + \sum_{k=0}^{h_1-2} p_k(\lambda_1 a_{h_1-1-k} + \lambda_2 b_{h_1-1-k}) + n\mu(p_{h_1} + q_{h_1}) = 0; \\
 & -(\lambda + n\mu)p_{h_2-1} + \sum_{k=0}^{h_2-2} p_k(\lambda_1 a_{h_2-1-k} + \lambda_2 b_{h_2-1-k}) = 0;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda_1 + n\mu)q_{h_1} + n\mu q_{h_1+1} = 0; \\
 & -(\lambda_1 + n\mu)q_i + \lambda_1 \sum_{k=h_1}^{i-1} q_k a_{i-k} + n\mu q_{i+1} = 0 \quad (h_1 + 1 \leq i \leq h_2 - 1); \\
 & -(\lambda_1 + n\mu)q_i + \lambda_1 \sum_{k=h_1}^{i-1} q_k a_{i-k} + \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k(\lambda_1 a_{i-k} + \lambda_2 b_{i-k}) + n\mu q_{i+1} = 0 \quad (i \geq h_2);
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{h_2-1} p_k + \sum_{k=h_1}^{\infty} q_k = 1. \tag{3}$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}
 A_i &= 1 - \sum_{k=1}^i a_k, \quad B_i = 1 - \sum_{k=1}^i b_k \quad (i \geq 0), \quad A_0 = B_0 = 1; \quad \tilde{p}_k = p_k/p_0 \quad (0 \leq k \leq h_2 - 1); \\
 \tilde{q}_k &= q_k/p_0 \quad (k \geq h_1); \quad P_s = \sum_{k=0}^s \tilde{p}_k; \quad L_n = \sum_{k=1}^n k \tilde{p}_k; \quad Q_{h_2-1} = \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \tilde{q}_k.
 \end{aligned} \tag{4}$$

**Теорема 1.** Если  $a_{(1)} < \infty$ ,  $b_{(1)} < \infty$  и  $\rho_1 < 1$ , то стационарные вероятности  $p_i = p_0 \tilde{p}_i$  ( $0 \leq i \leq h_2 - 1$ ) и  $q_i = p_0 \tilde{q}_i$  ( $i \geq h_1$ ) существуют и определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$p_0 = \frac{n - \alpha_1 a_{(1)}}{nP_n + \alpha_2 b_{(1)} P_{h_2-1} - L_n}; \quad (5)$$

$$\tilde{p}_{i+1} = \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^i \tilde{p}_k (\alpha_1 A_{i-k} + \alpha_2 B_{i-k}) \quad (0 \leq i \leq n-1); \quad (6)$$

$$\tilde{p}_{i+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^i \tilde{p}_k (\alpha_1 A_{i-k} + \alpha_2 B_{i-k}) \quad (n \leq i \leq h_1 - 2); \quad (7)$$

$$\tilde{p}_{i+1} = (1 + \gamma) \tilde{p}_i - \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{p}_k (\gamma_1 a_{i-k} + \gamma_2 b_{i-k}) \quad (h_1 \leq i \leq h_2 - 2); \quad (8)$$

$$\tilde{p}_{h_2-1} = \frac{1}{1 + \gamma} \sum_{k=0}^{h_2-2} \tilde{p}_k (\gamma_1 a_{h_2-1-k} + \gamma_2 b_{h_2-1-k}); \quad (9)$$

$$\tilde{q}_{h_1} = \sum_{k=0}^{h_2-1} \tilde{p}_k (\gamma_1 A_{h_2-1-k} + \gamma_2 B_{h_2-1-k}); \quad (10)$$

$$\tilde{q}_{i+1} = \tilde{q}_{h_1} + \gamma_1 \sum_{k=h_1}^i \tilde{q}_k A_{i-k} \quad (h_1 \leq i \leq h_2 - 1); \quad (11)$$

$$\tilde{q}_{i+1} = \gamma_1 \sum_{k=h_1}^i \tilde{q}_k A_{i-k} + \sum_{k=0}^{h_2-1} \tilde{p}_k (\gamma_1 A_{i-k} + \gamma_2 B_{i-k}) \quad (i \geq h_2); \quad (12)$$

при этом  $\tilde{p}_{h_1}$  определяется из уравнения

$$\frac{1}{1 + \gamma} \sum_{k=0}^{h_2-2} \tilde{p}_k (\gamma_1 a_{h_2-1-k} + \gamma_2 b_{h_2-1-k}) = (1 + \gamma) \tilde{p}_{h_2-2} - \sum_{k=0}^{h_2-3} \tilde{p}_k (\gamma_1 a_{h_2-2-k} + \gamma_2 b_{h_2-2-k}). \quad (13)$$

**Доказательство.** Соотношения (6) и (7) получим, последовательно складывая первые  $i$  ( $0 \leq i \leq h_1 - 2$ ) уравнений системы (1). Продолжая этот процесс для  $h_1 - 1 \leq i \leq h_2 - 2$ , получим равенства

$$n\mu(\tilde{p}_{i+1} + \tilde{q}_{h_1}) = \sum_{k=0}^i \tilde{p}_k (\lambda_1 A_{i-k} + \lambda_2 B_{i-k}) \quad (h_1 - 1 \leq i \leq h_2 - 2), \quad (14)$$

приводящие к соотношениям (8). Равенство (9) следует из последнего уравнения системы (1). Уравнение (13) получаем, приравнявая выражения для  $\tilde{p}_{h_2-1}$ , следующие из (8) и (9). Для отыскания  $\tilde{p}_{h_1}$  в этом уравнении необходимо выразить все  $\tilde{p}_k$  для  $h_1 + 1 \leq k \leq h_2 - 2$  через  $\tilde{p}_{h_1}$ .

Складывая последнее из равенств (14) и последнее уравнение системы (1), получим соотношение (10). Равенства (11) получаем путём последовательного сложения уравнений (2) для  $h_1 \leq i \leq h_2 - 1$ .

Последовательно складывая последнее из равенств (11), умноженное на  $n\mu$ , и уравнения (2) для  $i \geq h_2$ , с учётом (10) получим соотношения (12).

Разделим обе части равенств (14) на  $n\mu$  и сложим с (11) для  $h_1 \leq i \leq h_2 - 1$ . Принимая во внимание первое из соотношений (14), приходим к равенствам

$$\tilde{p}_{i+1} + \tilde{q}_{i+1} = \gamma_1 \left( \sum_{k=0}^i \tilde{p}_k A_{i-k} + \sum_{k=h_1}^i \tilde{q}_k A_{i-k} \right) + \gamma_2 \sum_{k=0}^i \tilde{p}_k B_{i-k} \quad (h_1 - 1 \leq i \leq h_2 - 2). \quad (15)$$

Для отыскания  $p_0$  сначала с помощью соотношений (6), (7), (15), (11) (с учётом (10)) и (12) получаем равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k p_k + n \left( \sum_{k=n+1}^{h_2-1} p_k + \sum_{k=h_1}^{\infty} q_k \right) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{h_2-1} \sum_{k=0}^i + \sum_{i=h_2}^{\infty} \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \right) p_k (\alpha_1 A_{i-k} + \alpha_2 B_{i-k}) + \alpha_1 \sum_{i=h_1}^{\infty} \sum_{k=h_1}^i q_k A_{i-k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Затем, учитывая определения  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $a_{(1)}$  и  $b_{(1)}$ , а также условие нормировки (3), вычисляем суммы

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=0}^{h_2-1} \sum_{k=0}^i + \sum_{i=h_2}^{\infty} \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \right) p_k (A_{i-k} + B_{i-k}) = \sum_{i=0}^{h_2-1} p_i \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_k + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \right) = (a_{(1)} + b_{(1)}) \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k; \\ & \sum_{i=h_1}^{\infty} \sum_{k=h_1}^i q_k A_{i-k} = \sum_{i=h_1}^{\infty} q_i \sum_{k=0}^{\infty} A_k = a_{(1)} \left( 1 - \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k \right). \end{aligned} \quad (17)$$

С учётом (17) перепишем равенство (16) в виде

$$\alpha_1 a_{(1)} + \alpha_2 b_{(1)} \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k = \sum_{k=1}^n k p_k + n \left( \sum_{k=n+1}^{h_2-1} p_k + 1 - \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k \right) = \sum_{k=1}^n k p_k + n \left( 1 - \sum_{k=0}^n p_k \right).$$

Принимая во внимание определения  $P_s$  и  $L_n$  (см. (4)), преобразуем полученное уравнение к виду

$$\alpha_1 a_{(1)} + \alpha_2 b_{(1)} p_0 P_{h_2-1} = n + p_0 (L_n - n P_n). \quad (18)$$

Из (18) следует формула (5), которая даёт положительные значения  $p_0$  только при выполнении условия  $\alpha_1 a_{(1)} < n$ , то есть при  $\rho_1 < 1$ .

Итак, при выполнении условий  $a_{(1)} < \infty$ ,  $b_{(1)} < \infty$  и  $\rho_1 < 1$  система уравнений равновесия (1), (2) имеет нетривиальное решение, для которого выполняется равенство (3). Пусть  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  — случайный процесс с дискретными состояниями  $s_i$  ( $0 \leq i \leq h_2 - 1$ ) и  $x_i$  ( $i \geq h_1$ ). Поскольку все состояния этого неприводимого марковского процесса сообщаются, то из критерия регулярности [9, с. 40] следует его регулярность, а из эргодической теоремы Фостера [9, с. 48] вытекает, что условия теоремы 1 являются достаточными для существования стационарных вероятностей  $p_i$  ( $0 \leq i \leq h_2 - 1$ ) и  $q_i$  ( $i \geq h_1$ ). Теорема доказана.  $\square$

## 4. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРОИЗВОДНАЯ

Обозначим через  $N(F)(z)$  и  $D(F)(z)$  соответственно числитель и знаменатель в выражении для некоторой функции  $F(z)$ . Рассмотрим производящие функции

$$P(z) = \sum_{i=0}^{h_2-1} p_i z^i; \quad Q(z) = \sum_{i=h_1}^{\infty} q_i z^i; \quad A(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i; \quad B(z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z^i.$$

**Теорема 2.** Производящая функция  $Q(z)$  определяется в виде

$$Q(z) = \frac{N(Q)(z)}{D(Q)(z)}; \quad D(Q)(z) = n\mu(1-z) - \lambda_1 z(1-A(z));$$

$$N(Q)(z) = n\mu q_{h_1} z^{h_1} - zP(z)(\lambda_1 A(z) + \lambda_2 B(z)) + \sum_{k=0}^{h_2-2} p_k \sum_{i=1}^{h_2-1-k} (\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i) z^{k+i+1}. \quad (19)$$

**Доказательство.** Умножая  $i$ -е уравнение системы (2) на  $z^i$  ( $i \geq h_1$ ) и суммируя, получаем

$$-(\lambda_1 + n\mu)Q(z) + n\mu \frac{Q(z)}{z} - n\mu q_{h_1} z^{h_1-1} + \lambda_1 \sum_{i=h_1+1}^{\infty} z^i \sum_{k=h_1}^{i-1} q_k a_{i-k}$$

$$+ \sum_{i=h_2}^{\infty} z^i \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k (\lambda_1 a_{i-k} + \lambda_2 b_{i-k})$$

$$= -(\lambda_1 + n\mu)Q(z) + n\mu \frac{Q(z)}{z} - n\mu q_{h_1} z^{h_1-1} + \lambda_1 Q(z)A(z) + P(z)(\lambda_1 A(z) + \lambda_2 B(z))$$

$$- \sum_{k=0}^{h_2-2} p_k \sum_{i=1}^{h_2-1-k} (\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i) z^{k+i} = 0.$$

Отсюда находим  $Q(z)$  в виде (19). Теорема доказана.  $\square$

Упростим процесс вычисления производной функции  $Q(z)$ .

**Лемма 1.** Производная функции  $Q(z)$  при  $z = 1$  вычисляется по формуле:

$$Q'(1) = \frac{N''(Q')(1)}{D''(Q')(1)} = -\frac{(n\mu - \lambda_1 a_{(1)})N''(Q)(1) + \lambda_1(a_{(1)} + a_{(2)})N'(Q)(1)}{2(n\mu - \lambda_1 a_{(1)})^2}, \quad (20)$$

где

$$N'(Q)(1) = n\mu h_1 q_{h_1} - (\lambda_1 a_{(1)} + \lambda_2 b_{(1)}) \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k$$

$$+ \sum_{k=0}^{h_2-2} p_k \sum_{i=1}^{h_2-1-k} (k+i+1)(\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i) - \lambda \sum_{k=0}^{h_2-1} (k+1)p_k;$$

$$N''(Q)(1) = n\mu h_1(h_1-1)q_{h_1} - 2(\lambda_1 a_{(1)} + \lambda_2 b_{(1)}) \sum_{k=1}^{h_2-1} k p_k - \lambda \sum_{k=1}^{h_2-1} k(k+1)p_k - (\lambda_1(a_{(1)}$$

$$+ a_{(2)}) + \lambda_2(b_{(1)} + b_{(2)})) \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k + \sum_{k=0}^{h_2-2} p_k \sum_{i=1}^{h_2-1-k} (k+i)(k+i+1)(\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i).$$

**Доказательство.** При вычислении производной  $Q'(1)$  будем учитывать равенства

$$\begin{aligned} A'(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = a_{(1)}; & A''(1) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k = a_{(2)} - a_{(1)}; \\ B'(1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k b_k = b_{(1)}; & B''(1) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k = b_{(2)} - b_{(1)}. \end{aligned}$$

Поскольку  $A(1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$  и  $B(1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$ , то в результате сложения уравнений системы (1), убеждаемся, что  $N(Q)(1) = 0$ .

Итак, для функции  $Q(z)$ , определяемой формулами (19), выполняются равенства

$$\begin{aligned} N(Q)(1) &= D(Q)(1) = N(Q')(1) = D(Q')(1) = N'(Q')(1) = D'(Q')(1) = 0; \\ D''(Q')(1) &\neq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует первая часть формулы (20). Поскольку

$$\begin{aligned} N(Q')(z) &= N'(Q)(z) \cdot D(Q)(z) - N(Q)(z) \cdot D'(Q)(z); \\ N'(Q')(z) &= N''(Q)(z) \cdot D(Q)(z) - N(Q)(z) \cdot D''(Q)(z); \\ N''(Q')(z) &= N'''(Q)(z) \cdot D(Q)(z) + N''(Q)(z) \cdot D'(Q)(z) \\ &\quad - N'(Q)(z) \cdot D''(Q)(z) - N(Q)(z) \cdot D'''(Q)(z), \end{aligned}$$

то с учётом (21) получим равенство

$$\begin{aligned} N''(Q')(1) &= N''(Q)(1) \cdot D'(Q)(1) - N'(Q)(1) \cdot D''(Q)(1) \\ &= -(n\mu - \lambda_1 a_{(1)}) N''(Q)(1) - \lambda_1 (a_{(1)} + a_{(2)}) N'(Q)(1). \end{aligned}$$

Таким образом, лемма доказана.  $\square$

## 5. СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Используя стационарное распределение числа заявок и производную  $Q'(1)$ , можно получить простые формулы для основных стационарных характеристик системы.

Учитывая, что

$$Q'(1) = \sum_{k=h_1}^{\infty} k q_k,$$

формулы для стационарной средней длины очереди в системе и стационарного среднего числа заявок в системе

$$\mathbf{E}(Q) = \sum_{k=n+1}^{h_2-1} (k-n) p_k + \sum_{k=h_1}^{\infty} (k-n) q_k, \quad \mathbf{E}(N) = \sum_{k=1}^{h_2-1} k p_k + \sum_{k=h_1}^{\infty} k q_k$$

приводим к виду

$$\mathbf{E}(Q) = Q'(1) + \sum_{k=n+1}^{h_2-1} k p_k - n \left( 1 - \sum_{k=0}^n p_k \right), \quad \mathbf{E}(N) = \sum_{k=1}^{h_2-1} k p_k + Q'(1).$$

Формула для стационарного среднего числа обслуженных заявок за единицу времени

$$\bar{N}_{sv} = \mu \left( \sum_{k=1}^{n-1} k p_k + n \left( \sum_{k=n}^{h_2-1} p_k + \sum_{k=h_1}^{\infty} q_k \right) \right)$$

после использования условия нормировки (3) принимает вид

$$\bar{N}_{sv} = \mu \left( n(1 - p_0) - \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) p_k \right). \quad (22)$$

С другой стороны, обслуженная нагрузка определяется формулой

$$\bar{N}_{sv} = \lambda_1 a_{(1)} + \lambda_2 b_{(1)} \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k. \quad (23)$$

Приравняв выражения (22) и (23), снова приходим к уравнению баланса (18), с помощью которого определяется стационарная вероятность  $p_0$  свободной от заявок системы.

Стационарное среднее время ожидания начала обслуживания заявки равно

$$\mathbf{E}(W) = \frac{\mathbf{E}(Q)}{\bar{N}_{sv}},$$

а стационарные вероятности  $\pi$  потери заявок и  $\pi_2$  потери заявок второго типа имеют вид

$$\pi = 1 - \frac{\bar{N}_{sv}}{\lambda_1 a_{(1)} + \lambda_2 b_{(1)}}, \quad \pi_2 = 1 - \sum_{k=0}^{h_2-1} p_k.$$

Напомним, что заявки первого типа не теряются.

## 6. СЛУЧАЙ ОРДИНАРНОГО ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

Поскольку для ординарного потока заявок выполняются равенства

$$a_1 = b_1 = 1; \quad a_k = b_k = 0 \quad (k \geq 2); \quad A_k = B_k = 0 \quad (k \geq 1),$$

то рекуррентные соотношения (6)–(12) упрощаются, что позволяет получить выражения для  $\tilde{p}_k$  ( $1 \leq k \leq h_2 - 1$ ) и  $\tilde{q}_k$  ( $k \geq h_1$ ) в явном виде

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k &= \frac{\alpha^k}{k!} \quad (1 \leq k \leq n); \quad \tilde{p}_k = \frac{\alpha^k}{n! n^{k-n}} \quad (n+1 \leq k \leq h_1 - 1); \\ \tilde{p}_k &= \frac{\sum_{i=k+1-h_1}^{h_2-h_1} \gamma^i}{\sum_{i=0}^{h_2-h_1} \gamma^i} \tilde{p}_{h_1-1} \quad (h_1 \leq k \leq h_2 - 1); \quad \tilde{q}_k = \frac{\gamma(1 - \gamma_1^{k-h_1+1})}{1 - \gamma_1} \tilde{p}_{h_2-1} \quad (h_1 \leq k \leq h_2); \\ \tilde{q}_k &= \frac{\gamma \gamma_1^{k-h_2} (1 - \gamma_1^{h_2-h_1+1})}{1 - \gamma_1} \tilde{p}_{h_2-1} \quad (k \geq h_2 + 1). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=h_2}^{\infty} \tilde{q}_k = \frac{\tilde{q}_{h_2}}{1 - \gamma_1},$$

с помощью условия нормировки (3) приходим к формуле для вычисления  $p_0$

$$p_0 = \frac{1}{P_{h_2-1} + Q_{h_2-1} + \frac{\tilde{q}_{h_2}}{1-\gamma_1}}.$$

Условие существования стационарных вероятностей в случае ординарного входящего потока принимает вид  $\gamma_1 < 1$ .

Поскольку

$$\frac{1}{q_{h_2}} \sum_{k=h_2}^{\infty} k q_k = \sum_{k=h_2}^{\infty} (k - h_2) \gamma_1^{k-h_2} + h_2 \sum_{k=h_2}^{\infty} \gamma_1^{k-h_2} = \sum_{k=0}^{\infty} k \gamma_1^k + \frac{h_2}{1-\gamma_1} = \frac{\gamma_1 + h_2(1-\gamma_1)}{(1-\gamma_1)^2},$$

то для стационарной средней длины очереди в системе получаем выражение

$$\mathbf{E}(Q) = \sum_{k=n+1}^{h_2-1} (k-n) p_k + \sum_{k=h_1}^{h_2-1} (k-n) q_k + \frac{\gamma_1 + (1-\gamma_1)(h_2-n)}{(1-\gamma_1)^2} q_{h_2}.$$

## 7. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Приведём результаты расчётов стационарных характеристик системы, выполненных с помощью полученных аналитических соотношений.

Вычисления проводились для трёхканальной системы обслуживания ( $n = 3$ ) для значений порогов  $h_1 = 7$ ,  $h_2 = 12$  и следующих значений параметров, характеризующих интенсивности обслуживания и потоков заявок:  $\mu = 1$ ;  $\lambda = 4, 5$ ;  $a_1 = 0, 5$ ,  $a_2 = 0, 3$ ,  $a_3 = 0, 2$ ;  $b_1 = 0, 2$ ,  $b_2 = 0, 3$ ,  $b_3 = 0, 5$ ;  $a_k = b_k = 0$  ( $k \geq 4$ ). Итак, заявки прибывают группами численностью от одной до трёх с разными распределениями вероятностей числа заявок в группе для каждого потока. Среднее число заявок первого типа в группе равно  $a_{(1)} = 1, 7$ , а второго типа —  $b_{(1)} = 2, 3$ .

При неизменном значении  $\lambda = 4, 5$  параметра показательного распределения интервалов времени между моментами поступления групп заявок общего потока рассмотрены следующие пары значений параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для потоков первого и второго типа:

- 1)  $\lambda_1 = 0, 5$ ;  $\lambda_2 = 4$ ;  $\bar{N}_\lambda = 10, 05$ ;
- 2)  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = 3, 5$ ;  $\bar{N}_\lambda = 9, 75$ ;
- 3)  $\lambda_1 = 1, 5$ ;  $\lambda_2 = 3$ ;  $\bar{N}_\lambda = 9, 45$ .

Здесь  $\bar{N}_\lambda = \lambda_1 a_{(1)} + \lambda_2 b_{(1)}$  — интенсивность общего потока заявок в нормальном режиме работы системы.

Стационарные вероятности  $\mathbf{p}_k$  ( $k \geq 0$ ) наличия в системе  $k$  заявок, вычисленные для каждой из пар 1)–3) значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , приведены в табл. 1. Жирным шрифтом выделены максимальные значения  $\mathbf{p}_k$ , которые достигаются для  $k = 9$ ,  $k = 11$  и  $k = 12$  соответственно. На рис. 2 представлены графики функций распределения числа заявок в системе  $F_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) для случаев 1)–3), где  $F_i(x)$  соответствует  $i$ -ой паре значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

В табл. 2 приведены значения стационарных характеристик, вычисленные для тех же пар значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Здесь же для сравнения записаны значения этих характеристик, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [10, 11] для значения времени моделирования  $t = 10^5$ . Программа GPSS World приведена в приложении.

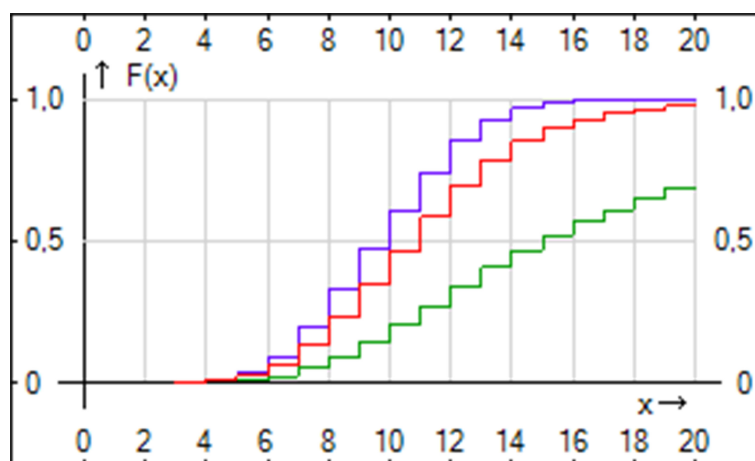
Анализ полученных результатов показывает, что, несмотря на близкие значения интенсивности общего потока  $\bar{N}_\lambda$  для случаев 1)–3), характеристики очереди системы для рассмотренных входных данных значительно ухудшаются при возрастании интенсивности  $\lambda_1 a_{(1)}$  потока заявок первого типа.

Таблица 1. Стационарные распределения числа заявок в системе для различных пар значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ 

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $P_0$    | $P_1$         | $P_2$         | $P_3$    | $P_4$    | $P_5$    | $P_6$    | $P_7$    | $P_8$    | $P_9$         |
|-------------|-------------|----------|---------------|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------------|
| 0,5         | 4           | 0,0002   | 0,0009        | 0,0024        | 0,0048   | 0,0107   | 0,0233   | 0,0506   | 0,1102   | 0,1296   | <b>0,1398</b> |
| 1           | 3,5         | 0,0001   | 0,0007        | 0,0017        | 0,0034   | 0,0075   | 0,0161   | 0,0345   | 0,0743   | 0,0960   | 0,1117        |
| 1,5         | 3           | 0,0001   | 0,0003        | 0,0007        | 0,0014   | 0,0030   | 0,0065   | 0,0138   | 0,0293   | 0,0410   | 0,0518        |
| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $P_{10}$ | $P_{11}$      | $P_{12}$      | $P_{13}$ | $P_{14}$ | $P_{15}$ | $P_{16}$ | $P_{17}$ | $P_{18}$ | ...           |
| 0,5         | 4           | 0,1372   | 0,1323        | 0,1143        | 0,0724   | 0,0387   | 0,0163   | 0,0084   | 0,0040   | 0,0019   | ...           |
| 1           | 3,5         | 0,1182   | <b>0,1208</b> | 0,1133        | 0,0886   | 0,0641   | 0,0437   | 0,0311   | 0,0219   | 0,0154   | ...           |
| 1,5         | 3           | 0,0598   | 0,0664        | <b>0,0692</b> | 0,0650   | 0,0591   | 0,0527   | 0,0476   | 0,0429   | 0,0386   | ...           |

Таблица 2. Стационарные характеристики системы для различных пар значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в сравнении с результатами имитационного моделирования

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $E(Q)$ | $E(Q)$ (GPSS) | $E(W)$ | $E(W)$ (GPSS) | $\pi$ | $\pi$ (GPSS) | $\pi_2$ | $\pi_2$ (GPSS) |
|-------------|-------------|--------|---------------|--------|---------------|-------|--------------|---------|----------------|
| 0,5         | 4           | 6,755  | 6,773         | 2,255  | 2,268         | 0,702 | 0,702        | 0,767   | 0,768          |
| 1           | 3,5         | 8,103  | 8,184         | 2,704  | 2,739         | 0,693 | 0,694        | 0,839   | 0,841          |
| 1,5         | 3           | 15,673 | 15,488        | 5,227  | 5,180         | 0,683 | 0,684        | 0,935   | 0,938          |

Рис. 2. Функции распределения числа заявок в системе для различных пар значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (расположение графиков сверху вниз соответствует функциям  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  и  $F_3(x)$ )

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей статье предложен простой алгоритм определения стационарного распределения числа заявок и стационарных характеристик многоканальной системы обслуживания  $M_2^X/M/n$ , принимающей независимые неординарные потоки заявок двух типов, в которой применяется гистерезисная стратегия управления интенсивностью входящего потока. Представлены результаты тестовых расчётов. Полученные соотношения могут быть использованы для решения оптимизационных задач, связанных с гистерезисным механизмом управления.

## 9. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММА ДЛЯ GPSS WORLD

Lam1 EQU 1.5 ; значение  $\lambda_1$

Lam2 EQU 3 ; значение  $\lambda_2$

```

Myu EQU 1 ; значение  $\mu$ 
AH1 EQU 7 ; значение  $h_1$ 
AH2 EQU 12 ; значение  $h_2$ 
TIME EQU 100000 ; время моделирования
DISTR TABLE (Q$QUEUE+S$SYS) 0,1,1500 ; параметры распределения числа заявок
Prob VARIABLE N$LB/(N$F11+(2.3#N$GET2)) ; вероятность  $\pi$ 
Prob2 VARIABLE N$F12/(2.3#N$GET2) ; вероятность  $\pi_2$ 
SYS STORAGE 3 ; трёхканальная система
GENERATE 1
TABULATE DISTR ; вычислить распределение числа заявок
TERMINATE
GENERATE (Exponential(11,0,(1/Lam1))) ; поток заявок первого типа
TRANSFER 500,F11
TRANSFER 400,,SP3
SPLIT 2,F11
TRANSFER ,OUT
SP3 SPLIT 3,F11
TRANSFER ,OUT
SP32 SPLIT 3,F12
TRANSFER ,OUT
GENERATE (Exponential(21,0,(1/Lam2))) ; поток заявок второго типа
GET2 GATE LS KLU,OUT ; проверить наличие блокировки
TRANSFER 500,,SP32
TRANSFER 400,F12
SPLIT 2,F12
TRANSFER ,OUT
F11 TRANSFER ,F1
F12 TRANSFER ,F1
F1 QUEUE QUE
TEST E (Q$QUEUE+S$SYS),AH2,Ent ; проверить условие переключения на режим перегрузки
LOGIC R KLU ; включить блокировку
TRANSFER ,Ent
Ent ENTER SYS
DEPART QUE
ADVANCE (Exponential(31,0,(1/Myu))) ; задержка на обслуживание
TEST E (Q$QUEUE+S$SYS),AH1,LB ; проверить условие переключения на нормальный режим
LOGIC S KLU ; выключить блокировку
LB LEAVE SYS
OUT TERMINATE
GENERATE ,,1
LOGIC S KLU ; выключить блокировку
TERMINATE ;
GENERATE TIME

```

SAVEVALUE Prob,V\$Prob  
 SAVEVALUE Prob2,V\$Prob2  
 TERMINATE 1  
 START 1

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абаев П. О., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е. Гистерезисное управление сигнальной нагрузкой в сети SIP-серверов. *Вестник Российского университета дружбы народов. Математика. Информатика. Физика*, 2011, № 4, стр. 54–71.
2. Abaev P., Gaidamaka Yu., Samouylov K. Queuing Model for Loss-Based Overload Control in a SIP Server Using a Hysteretic Technique. In: *Lecture Notes in Computer Science*, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012, vol. 7469, pp. 371–378.
3. Abaev P., Gaidamaka Yu., Samouylov K. Modeling of Hysteretic Signaling Load Control in Next Generation Networks. In: *Lecture Notes in Computer Science*, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012, vol. 7469, pp. 440–452.
4. Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Стационарные характеристики системы  $M_2|G|1|r$  с гистерезисной политикой управления интенсивностью входящего потока. *Информационные процессы*, 2013, т. 13, № 3, стр. 125–140.
5. Dshalalow J. H. Queueing systems with state dependent parameters. In: *Frontiers in Queueing: Models and Applications in Science and Engineering*, 1997, pp. 61–116.
6. Kitaev M. Yu., Rykov V. V. *Controlled Queueing Systems*. New York: CRC-Press, 1995.
7. Жерновий К. Ю., Жерновий Ю. В. Система  $M^0/G/1/m$  с двухпороговой гистерезисной стратегией переключения интенсивности обслуживания. *Информационные процессы*, 2012, т. 12, № 2, стр. 127–140.
8. Zhernovyi Yu. V. Stationary Characteristics of  $M^X/M/1$  Systems with Hysteretic Switching of the Service Intensity. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2013, vol. 58, № 6, pp. 613–627.
9. Бочаров П. П., Печинкин А. В. *Теория массового обслуживания*. М.: РУДН, 1995.
10. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.
11. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування*. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.

## Stationary characteristics of the $M_2^X/M/n$ queue with hysteretic control of the input flow intensity

Zhernovyi Yu. V., Zhernovyi K. Yu.

We consider a multi-channel queueing system with unlimited queue and with exponentially distributed service time and the intervals between the arrival of customers batches, which uses a hysteretic control mechanism of the input flow intensity. The system receives two independent flows of customers, one of which is blocked in an overload mode. An algorithm for finding of the stationary distribution of the number of customers and stationary characteristics (the mean queue length, the mean waiting time in the queue, the probability of customers loss) is proposed. The obtained results are verified with the help of simulation model constructed with the assistance of GPSS World tools.

**KEYWORDS:** multi-channel queueing system, batch arrival of customers, hysteretic control of the input flow intensity, stationary characteristics.