Информационные процессы, Том 13, № 2, 2013, стр. 76–90

Системы $M^{\theta}/G/1/m$ и $M^{\theta}/G/1$ с временем обслуживания, зависящим от длины очереди

К. Ю. Жерновый, Ю. В. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 10.05.2013, исправленный вариант – 25.06.2013

Аннотация—Изучены системы $M^{\theta}/G/1/m$ и $M^{\theta}/G/1$, в которых время обслуживания зависит от длины очереди и определяется в момент начала обслуживания заявки. С помощью подхода, основанного на идее метода потенциала В. С. Королюка, определена средняя продолжительность периода занятости и стационарное распределение числа заявок в системе. Как частный случай, рассмотрена система $M^{\theta}/G/1$ с одним порогом переключения режимов обслуживания. Полученные результаты проверены с помощью имитационной модели, построенной с привлечением инструментальных средств GPSS World.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система обслуживания, групповое поступление заявок, интенсивность обслуживания, зависящая от длины очереди, стационарное распределение числа заявок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели систем массового обслуживания, в которых заявки прибывают группами, а интенсивность обслуживания целенаправленно изменяется вместе с длиной очереди, часто используются для изучения телекоммуникационных процессов [1–7], в частности процессов передачи данных в сетях ATM с использованием технологий мультиплексирования [5, 8]. Продолжая исследования, начатые в работе [1], мы изучаем системы $M^{\theta}/G/1/m$ и $M^{\theta}/G/1$, в которых длительность обслуживания каждой заявки определяется согласно правилу: если в момент начала обслуживания этой заявки в системе находится n заявок, то её времени обслуживания соответствует функция распределения $F_n(x)$. Аналогичная модель изменения интенсивности обслуживания рассматривалась в статье [5], в которой система $M/D/1/m$ использовалась для моделирования процесса передачи голосовых пакетов с помощью мультиплексора.

В статье [4], самой близкой по постановке задачи к нашим исследованиям, для системы $M^{\theta}/G/1$, в которой функция распределения времени обслуживания $F_n(x)$ определяется в соответствии с числом n заявок в системе в момент начала обслуживания каждой заявки, с использованием марковской теории восстановления записана алгебраическая система уравнений для стационарных вероятностей, соответствующих моментам завершения обслуживания заявок. Решения этой достаточно громоздкой системы, для которых не приведены явные формулы, необходимо пересчитывать при помощи рекуррентных соотношений для получения стационарного распределения, соответствующего произвольным моментам времени ($t \to \infty$). Вместе с тем, как отмечено в статье [5], для изучения процессов передачи данных с использованием мультиплексора важно исследовать систему с ограниченным буфером.

В отличие от работы [4], мы изучаем не только систему $M^{\theta}/G/1$, но и систему $M^{\theta}/G/1/m$ с ограниченным буфером (m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди). Для этих систем определим среднюю продолжительность периода занятости и получим простые и удобные для числовой реализации формулы для стационарного распределения числа заявок в системе. Формулы, полученные в статье [1] для системы

$\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с $(m+1)$-м режимом обслуживания и для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$ с двумя режимами обслуживания и одним порогом переключения h, мы приведём к виду, более удобному для числовой реализации.

С помощью подхода, основанного на идее метода потенциала В. С. Королюка [9], изучались как обычные системы типа $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ и $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1$ [10], так и системы с пороговыми стратегиями функционирования [1, 11–14].

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим систему обслуживания $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, которую формально опишем следующим образом. Пусть заданы последовательности независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{\alpha_i\}$, $\{\theta_i\}$, $\{\beta_{in}\}$ $(\,i,\,n \ge 1\,)$, где α_i — время между поступлением $(i-1)$–ой и i–ой группы заявок, θ_i — число заявок в i–ой группе, а β_{in} — время обслуживания i–ой заявки, при условии, что в момент начала её обслуживания в системе находится n заявок. Считаем, что $\mathbf{P}\{\alpha_i < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ $(\,\lambda > 0\,)$, $\mathbf{P}\{\theta_i = n\} = a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Если $\mathbf{P}\{\theta_i = 1\} = a_1 = 1$, то заявки в систему поступают по одной.

Если $\xi(t)$ — число заявок в системе в момент времени t, и в момент начала обслуживания i–ой заявки $\xi(t) = n$, то $\mathbf{P}\{\beta_{in} < x\} = F_n(x)$ $(\,x \ge 0\,)$, $F_n(0) = 0$ $(n \in \{1, 2, \ldots, m+1\})$.

Заявки обслуживаются по одной, обслуженная заявка покидает систему, и обслуживающее устройство немедленно начинает обслуживать заявку из очереди при её наличии или же ждёт поступления очередной группы заявок. Применяется дисциплина обслуживания FIFO. Очередь внутри одной группы заявок может быть организована произвольно, поскольку изучаемые нами характеристики не зависят от способа её организации. Максимальное количество заявок, которые одновременно могут находиться в очереди, не превышает числа m. Обозначим описанную систему обслуживания через $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_{\mathrm{m}+1}/1/\mathrm{m}$.

Обозначим через $\mathbf{P}_n$ условную вероятность при условии, что в начальный момент времени в системе находится $n \ge 0$ заявок, а через $\mathbf{E}$ $(\mathbf{P})$ условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что система начинает работать в момент прибытия первой группы заявок.

Введём следующие обозначения: $\eta(x)$ — число заявок, прибывающих на промежутке времени $[0;\,x)$; a_n^{k*} — k–кратная свёртка последовательности a_n;

$$f_n(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF_n(x), \qquad M_n = \int\limits_0^\infty x dF_n(x) < \infty, \qquad \overline{F}_n(x) = 1 - F_n(x);$$

$$\alpha(z) = \sum_{k=1}^\infty z^k a_k; \qquad \overline{a}_n = \sum_{k=n}^\infty a_k; \qquad \overline{p}_n = \sum_{k=n}^\infty p_k; \qquad \overline{q}_n = \sum_{k=n}^\infty q_k; \qquad e_a = \sum_{k=1}^\infty k a_k < \infty;$$

$$\begin{aligned} p_{ni}(s) &= \frac{1}{f_n(s)} \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i+1\}\, dF_n(x) \\ &= \frac{1}{f_n(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF_n(x) \qquad (i \ge -1); \end{aligned} \tag{1}$$

$$q_{ni}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i\,\}\, \overline{F}_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}_n(x)\, dx \qquad (i \ge 0);$$

$$p_{ni} = \lim_{s\to+0} p_{ni}(s), \qquad q_{ni} = \lim_{s\to+0} q_{ni}(s). \tag{2}$$

Отметим, что для каждого $n \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ выполняется равенство $\sum\limits_{i=-1}^{\infty} p_{ni} = 1$, поэтому последовательность p_{ni} можно интерпретировать как распределение скачков полунепрерывного снизу случайного блуждания. Потенциал этого блуждания определим с помощью равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_{nk} = \frac{z}{f_n\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) - z}\,, \qquad |z| < \min\{1,\, \nu_n\}\,,$$

где ν_n — единственный корень уравнения $f_n\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) = z$ на промежутке $[0;1]$. Учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k q_{nk} = \frac{1 - f_n\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{\lambda(1-\alpha(z))}\,,$$

получим равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_{nk} = M_n. \tag{3}$$

Последовательности q_{nk} и R_{nk} можно вычислить с помощью рекуррентных соотношений:

$$q_{n0} = \frac{1 - f_n(\lambda)}{\lambda}\,, \qquad q_{nk} = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{n,k-i} - \frac{p_{n,k-1}}{\lambda} \qquad (k \geq 1); \tag{4}$$

$$R_{n1} = \frac{1}{p_{n,-1}}\,, \qquad R_{n,k+1} = \frac{R_{nk} - \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_{ni} R_{n,k-i}}{p_{n,-1}} \qquad (k \geq 1). \tag{5}$$

3. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть $\tau(m) = \inf\{\, t \geq 0 : \xi(t) = 0\,\}$ обозначает первый период занятости для системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}$;

$$\varphi_n^{(m)}(t,\, k) = \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\} \qquad (\, 1 \leq n,\, k \leq m+1\,),$$

$$\Phi_n^{(m)}(s,k) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi_n^{(m)}(t,\, k)\, dt, \qquad \Phi_n^{(m)}(k) = \lim_{s\to+0} \Phi_n^{(m)}(s,k), \qquad \Phi_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{m+1} \Phi_n^{(m)}(k).$$

Очевидно, что $\varphi_0^{(m)}(t,\, k) = 0$. С помощью формулы полной вероятности получим равенства

$$\begin{aligned}\varphi_n^{(m)}(t,\, k) = {} & \sum_{j=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = j\,\}\, \varphi_{n+j-1}^{(m)}(t-x,\, k)\, dF_n(x) \\ & + \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) \geq m+1-n\,\}\, \varphi_m^{(m)}(t-x,\, k)\, dF_n(x) + \big(\mathbf{P}\{\eta(t) = k-n\,\} \\ & + I\{k = m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t) \geq m+2-n\,\}\big)\overline{F}_n(t) \quad (1 \leq n \leq m).\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 или 0, в зависимости от того, состоялось событие A или нет.

Введя обозначение $f_{(n)}(k,m) = q_{n,k-n} + I\{k = m+1\}\overline{q}_{n,m+2-n}$, и учитывая соотношения (1) и (2), из (6) получим систему уравнений для определения функций $\Phi_n^{(m)}(k)$

$$\Phi_n^{(m)}(k) = \sum_{j=0}^{m-n} p_{n,j-1}\Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + \overline{p}_{n,m-n}\Phi_m^{(m)}(k) + f_{(n)}(k,m) \qquad (1 \le n \le m), \tag{7}$$

с граничным условием

$$\Phi_0^{(m)}(k) = 0. \tag{8}$$

Найдём функции $\Phi_n^{(m)}(k)$, решив систему уравнений (7), (8).

Теорема 1. *Для всех* $1 \le k \le m+1$ *функции* $\Phi_n^{(m)}(k)$ *определяются в виде*

$$\Phi_n^{(m)}(k) = \Phi_m^{(m)}(k) - \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} f_{(n+i)}(k,m) \qquad (1 \le n \le m-1), \tag{9}$$

где

$$\Phi_m^{(m)}(k) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i} f_{(i)}(k,m), \tag{10}$$

а для постоянных $\mathcal{R}_{ni}$ *выполняются следующие рекуррентные соотношения:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n,1} = R_{n+1,1}; \qquad \mathcal{R}_{n,j+1} = R_{n+1,1}\Bigg(&\mathcal{R}_{n+1,j} \\ &- \sum_{i=0}^{j-1} p_{n+1,i}\mathcal{R}_{n+1+i,j-i}\Bigg) \qquad (1 \le j \le m-n-1, \;\; 0 \le n \le m-1). \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Равенства (9) и (11) доказаны в [1]. Для получения формулы (10) достаточно положить $n = 0$ в (9) и использовать граничное условие (8). Теорема доказана. □

Если система начинает работать в момент прибытия первой группы заявок, то для всех $1 \le k \le m+1$ с помощью формулы полной вероятности получим равенства:

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n \Phi_n^{(m)}(k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}^{(m)}(k). \tag{12}$$

Учитывая, что

$$\varphi_{m+1}^{(m)}(t,\,k) = \int_0^t \varphi_m^{(m)}(t-x,\,k)\,dF_{m+1}(x) + I\{k = m+1\}\overline{F}_{m+1}(t),$$

$$\Phi_{m+1}^{(m)}(k) = \Phi_m^{(m)}(k) + I\{k = m+1\}M_{m+1},$$

и используя соотношения (9), (10), можем записать правую часть (12) в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i} f_{(i)}(k,m) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} f_{(n+i)}(k,m) \\ + \overline{a}_{m+1} I\{k = m+1\} M_{m+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Для отыскания $\int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m) > t\,\}\,dt = \mathbf{E}\,\tau(m)$ необходимо сложить равенства (13) для всех k от 1 до $m+1$. Учитывая (3), нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{m+1} f_{(n)}(k,m) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{nk} = M_n \qquad (1 \le n \le m).$$

Итак, из (13) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}$ *средняя продолжительность периода занятости определяется в виде*

$$\mathbf{E}\,\tau(m) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i} M_i - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} M_{n+i} + \overline{a}_{m+1} M_{m+1}. \tag{14}$$

Для отыскания стационарного распределения числа заявок в системе $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}$ обозначим через $\tau_i(m)$ $(i = 0,\,1,\,2,\,\ldots)$, $\tau_0(m) = 0$, последовательные моменты времени освобождения системы от заявок. Очевидно, что $\tau_1(m) = \tau(m)$. Пусть ξ_i $(i = 0,\,1,\,2,\,\ldots)$, $\xi_0 = 0$ — последовательные интервалы простоя системы после моментов $\tau_i(m)$ до прибытия очередной группы заявок. Очевидно, что ξ_i — показательно распределённые случайные величины с параметром λ, и моменты $\xi_i + \tau_i(m)$ $(i = 0,\,1,\,2,\,\ldots)$ образуют процесс востановления. Используя функцию восстановления, соответствующую этому процессу, и узловую теорему восстановления (см. доказательство теоремы 2 статьи [11]), вычислим пределы

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k\,\} = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)} \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(u) = k,\;\; \tau(m) \ge u\,\}\,du \quad (1 \le k \le m+1);\\
&\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = 0\,\} = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)} \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m) < u,\;\; \tau(m)+\xi_1 \ge u\,\}\,du = \frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Введём обозначения: $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k\,\} = \pi_k(m)$, $1 \le k \le m+1$. Из (15) и (13) после несложных преобразований получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Стационарное распределение числа заявок в системе* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}$ *определяется по формулам*

$$\begin{aligned}
&\pi_0(m) = \frac{1}{1+\lambda\mathbf{E}\,\tau(m)}\,;\\
&\pi_k(m) = \lambda\pi_0(m)\left(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{0i} q_{i,k-i} - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} \mathcal{R}_{ni} q_{n+i,k-n-i}\right) \quad (1 \le k \le m);\\
&\pi_{m+1}(m) = \lambda\pi_0(m)\left(\sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i} \overline{q}_{i,m+1-i} - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} \overline{q}_{n+i,m+1-n-i} + \overline{a}_{m+1} M_{m+1}\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Рассуждая так же, как в статье [1], и учитывая (14), получим формулу для стационарной вероятности обслуживания для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_{\mathrm{m+1}}/1/\mathrm{m}$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) = \frac{1}{e_a\bigl(1+\lambda\mathbf{E}\,\tau(m)\bigr)} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{0i} - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} + \overline{a}_{m+1}\right).$$

Стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{E}\,Q(m)$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}\,w(m)$ находим по формулам

$$\mathbf{E}\,Q(m) = \sum_{k=1}^{m} k\pi_{k+1}(m); \qquad \mathbf{E}\,w(m) = \frac{\mathbf{E}\,Q(m)}{\lambda e_a \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)}\,.$$

4. СИСТЕМА $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1$

Предположим, что $P\{\beta_{in} < x\} = F_n(x)$ для $n \in \{1, 2, \ldots, h-1\}$ и $P\{\beta_{in} < x\} = \widetilde{F}(x)$, $M_n = \widetilde{M}$, $R_{ni} = \widetilde{R}_i$ $(i \geq 1)$, $p_{ni} = \widetilde{p}_i$ $(i \geq -1)$, $q_{ni} = \widetilde{q}_i$ $(i \geq 0)$ для $n \in \{h, h+1, \ldots, m+1\}$, где h — фиксированное число из множества $\{2, 3, \ldots, m+1\}$. Обозначим такую систему обслуживания через $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1/\mathrm{m}$.

Используя соотношения (11) и (5), для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1/\mathrm{m}$ получаем равенства

$$\mathcal{R}_{ni} = \widetilde{R}_i, \qquad n \in \{h-1, h, h+1, \ldots, m+1\}, \quad i \geq 1,$$

с учётом которых формула (14) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,\tau(m) = {} & \sum_{i=1}^{h-1} \mathcal{R}_{0i} M_i - \sum_{n=1}^{h-2} a_n \sum_{i=1}^{h-1-n} \mathcal{R}_{ni} M_{n+i} \\ & + \widetilde{M}\Bigg(\sum_{i=h}^{m} \mathcal{R}_{0i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=h-n}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} - \sum_{n=h}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i + \overline{a}_{m+1} \Bigg). \end{aligned} \tag{17}$$

Далее будем изучать соответствующую систему обслуживания без ограничений на длину очереди ($m = \infty$), которую обозначим через $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1$.

Для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1$ введём следующие обозначения: $\xi_\infty(t)$ — число заявок в системе в момент времени t, $\tau(\infty) = \inf\{\, t \geq 0 : \xi_\infty(t) = 0 \,\}$ — первый период занятости, $\widetilde{f}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d\widetilde{F}(x)$, $\rho_i = \lambda M_i e_a$ $(1 \leq i \leq h-1)$, $\widetilde{\rho} = \lambda \widetilde{M} e_a$,

$$\varphi_n^\infty(t,\, k) = \mathbf{P}_n\{\, \xi_\infty(t) = k,\ \tau(\infty) > t \,\} \qquad (\, n,\, k \geq 1\,),$$

$$\Phi_n^\infty(s, k) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \varphi_n^\infty(t,\, k)\, dt, \qquad \Phi_n^\infty(k) = \lim_{s \to +0} \Phi_n^\infty(s, k), \qquad \Phi_n^\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_n^\infty(k).$$

Дальнейшие рассуждения будем строить в предположении, что выполняется условие Крамера [9], которое накладывает определённые ограничения на распределения a_n $(n \geq 1)$ и $\widetilde{F}(x)$: пусть

$$z_0 = \sup\bigl\{ z > 0 : \widetilde{f}\bigl(\lambda(1 - \alpha(z)\bigr) < \infty \bigr\} > 1$$

и, если $\widetilde{\rho} < 1$, то $\widetilde{f}\bigl(\lambda(1 - \alpha(z_0 - 0)\bigr) - z_0 > 0$.

Будем использовать вспомогательное утверждение из [14].

Лемма 1. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{R}_n = \frac{1}{1 - \widetilde{\rho}}\,. \tag{18}$$

Теорема 4. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\,\tau(m) = \sum_{i=1}^{h-1} \mathcal{R}_{0i} M_i - \sum_{n=1}^{h-2} a_n \sum_{i=1}^{h-1-n} \mathcal{R}_{ni} M_{n+i} + \frac{\widetilde{M}}{1-\widetilde{\rho}} \Big(e_a + \mathcal{R}_{01}(\rho_1 - 1) + \sum_{i=2}^{h-1} \Big(\mathcal{R}_{0i} - \sum_{n=1}^{i-1} a_n \mathcal{R}_{n,i-n} \Big) (\rho_i - 1) \Big), \tag{19}$$

где $\mathbf{E}\,\tau(m)$ — *средняя продолжительность периода занятости системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1/\mathrm{m}$.

Доказательство. Из (17) следует, что достаточно доказать предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} S(m,h) = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}} \Big(e_a + \mathcal{R}_{01}(\rho_1 - 1) + \sum_{i=2}^{h-1} \Big(\mathcal{R}_{0i} - \sum_{n=1}^{i-1} a_n \mathcal{R}_{n,i-n} \Big) (\rho_i - 1) \Big), \tag{20}$$

где

$$S(m,h) = \sum_{i=h}^{m} \mathcal{R}_{0i} - \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=h-n}^{m-n} \mathcal{R}_{ni} - \sum_{n=h}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i.$$

Ограничимся рассмотрением случая $h = 4$. Тогда

$$S(m,4) = \sum_{i=4}^{m} \mathcal{R}_{0i} - a_1 \sum_{i=3}^{m-1} \mathcal{R}_{1i} - a_2 \sum_{i=2}^{m-2} \mathcal{R}_{2i} - \sum_{n=3}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i. \tag{21}$$

Преобразуем последнюю сумму в (21):

$$\sum_{n=3}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i = \sum_{i=1}^{m-3} \widetilde{R}_i \sum_{n=3}^{m-i} a_n = \sum_{i=3}^{m-1} \widetilde{R}_{m-i} \sum_{n=3}^{i} a_n.$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (11), находим

$$\mathcal{R}_{2,i+1} = R_{3,1} \Big(\widetilde{R}_i - \sum_{k=0}^{i-1} p_{3,k} \widetilde{R}_{i-k} \Big); \qquad \mathcal{R}_{1,i+1} = R_{2,1} \Big(\mathcal{R}_{2i}(1 - p_{2,0}) - \sum_{k=1}^{i-1} p_{2,k} \widetilde{R}_{i-k} \Big);$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{0,i+1} &= R_{1,1} \Big(R_{2,1}(1-p_{1,0}) \Big(\mathcal{R}_{2,i-1}(1-p_{2,0}) - \sum_{k=1}^{i-2} p_{2,k} \widetilde{R}_{i-1-k} \Big) - p_{1,1} \mathcal{R}_{2,i-1} - \sum_{k=2}^{i-1} p_{1,k} \widetilde{R}_{i-k} \Big) \\
&= R_{1,1} \Big(\Big(R_{2,1}(1-p_{1,0})(1-p_{2,0}) - p_{1,1} \Big) \mathcal{R}_{2,i-1} - R_{2,1}(1-p_{1,0}) \sum_{k=1}^{i-2} p_{2,k} \widetilde{R}_{i-1-k} - \sum_{k=2}^{i-1} p_{1,k} \widetilde{R}_{i-k} \Big).
\end{aligned}$$

Полученные равенства используем для преобразования каждой из оставшихся сумм в (21):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{m-2} \mathcal{R}_{2i} &= R_{3,1} \sum_{i=1}^{m-3} \Big(\widetilde{R}_i - \sum_{k=0}^{i-1} p_{3,k} \widetilde{R}_{i-k} \Big) = R_{3,1} \sum_{i=1}^{m-3} \widetilde{R}_i \Big(1 - \sum_{k=0}^{m-3-i} p_{3,k} \Big) \\
&= R_{3,1} \sum_{i=3}^{m-1} \widetilde{R}_{m-i} \Big(1 - \sum_{k=0}^{i-3} p_{3,k} \Big); \qquad \sum_{i=3}^{m-1} \mathcal{R}_{1i} = R_{2,1} \Big((1-p_{2,0}) \sum_{i=2}^{m-2} \mathcal{R}_{2i} - \sum_{i=2}^{m-2} \sum_{k=1}^{i-1} p_{2,k} \widetilde{R}_{i-k} \Big);
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=4}^{m} \mathcal{R}_{0i} - a_1 \sum_{i=3}^{m-1} \mathcal{R}_{1i} = \big(R_{1,1}(1-p_{1,0}) - a_1 \big) \sum_{i=3}^{m-1} \mathcal{R}_{1i} - R_{3,1} R_{1,1} p_{1,1} \sum_{i=1}^{m-3} \widetilde{R}_i \Big(1 - \sum_{k=0}^{m-3-i} p_{3,k} \Big)$$

$$- R_{1,1}\sum_{i=1}^{m-3}\widetilde{R}_i\sum_{k=2}^{m-1-i}p_{1,k} = \sum_{i=3}^{m-1}\widetilde{R}_{m-i}\Bigg(R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)\Big(R_{3,1}(1-p_{2,0})\Big(1-\sum_{k=0}^{i-3}p_{3,k}\Big)$$

$$-\sum_{k=1}^{i-2}p_{2,k}\Big) - R_{1,1}\Big(R_{3,1}p_{1,1}\Big(1-\sum_{k=0}^{i-3}p_{3,k}\Big)+\sum_{k=2}^{i-1}p_{1,k}\Big)\Bigg).$$

Предельный переход в (21) и последующие преобразования осуществляются с использованием предельного соотношения (18), соотношений (5), (11) и равенств $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)p_{i,k} = \rho_i$ $(1 \le i \le h-1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n = e_a$:

$$\lim_{m\to\infty} S(m,4) = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=3}^{m-1}\widetilde{R}_{m-i}\Bigg(R_{3,1}\Big(R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)(1-p_{2,0}) - R_{1,1}p_{1,1} - a_2\Big)$$

$$\times\Big(1-\sum_{k=0}^{i-3}p_{3,k}\Big) - R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)\sum_{k=1}^{i-2}p_{2,k} - R_{1,1}\sum_{k=2}^{i-1}p_{1,k} - \sum_{n=3}^{i}a_n\Bigg)$$

$$= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\sum_{i=3}^{\infty}\Bigg(R_{3,1}\Big(R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)(1-p_{2,0}) - R_{1,1}p_{1,1} - a_2\Big)(p_{3,-1}+\overline{p}_{3,i-2})$$

$$- R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)\sum_{k=1}^{i-2}p_{2,k} - R_{1,1}\sum_{k=2}^{i-1}p_{1,k} - \sum_{n=3}^{i}a_n\Bigg)$$

$$= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\sum_{i=3}^{\infty}\Bigg(R_{3,1}\Big(R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)(1-p_{2,0}) - R_{1,1}p_{1,1} - a_2\Big)\overline{p}_{3,i-2}$$

$$+ R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)(p_{2,-1}+\overline{p}_{2,i-1}) - R_{1,1}\sum_{k=1}^{i-1}p_{1,k} - \sum_{n=3}^{i}a_n\Bigg)$$

$$= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\sum_{i=3}^{\infty}\Bigg(R_{1,1}(p_{1,-1}+\overline{p}_{1,i}) + R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)\big(\overline{p}_{2,i-1}$$

$$+ R_{3,1}(1-p_{2,0})\overline{p}_{3,i-2}\big) - R_{3,1}(R_{1,1}p_{1,1}+a_2)\overline{p}_{3,i-2} - \sum_{n=3}^{i}a_n\Bigg)$$

$$= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\Bigg(R_{1,1}(\rho_1 - 1 + p_{1,-1} - \overline{p}_{1,1} - \overline{p}_{1,2}) + R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)(\rho_2 - 1 + p_{2,-1} - \overline{p}_{2,1})$$

$$+ R_{3,1}\Big(R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)(1-p_{2,0}) - R_{1,1}p_{1,1} - a_2\Big)(\rho_3 - 1 + p_{3,-1}) + \sum_{i=3}^{\infty}\overline{a}_{i+1}\Bigg)$$

$$= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\Bigg(3 - 2a_1 - a_2 + \sum_{n=4}^{\infty}(n-3)a_n + R_{1,1}(\rho_1-1) + R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)(\rho_2-1)$$

$$+ R_{3,1}\Big(R_{2,1}\big(R_{1,1}(1-p_{1,0})-a_1\big)(1-p_{2,0}) - R_{1,1}p_{1,1} - a_2\Big)(\rho_3-1)\Bigg)$$

$$= \frac{1}{1-\widetilde{\rho}}\Big(e_a + \mathcal{R}_{01}(\rho_1-1) + (\mathcal{R}_{02} - a_1\mathcal{R}_{1,1})(\rho_2-1) + (\mathcal{R}_{03} - a_1\mathcal{R}_{1,2} - a_2\mathcal{R}_{2,1})(\rho_3-1)\Big).$$

Итак, для $h = 4$ предельное соотношение (20) доказано. Аналогичные рассуждения для других значений h приводят к результатам, подтверждающим справедливость (20). Теорема доказана. □

Лемма 2. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k) = \Phi_n^{\infty}(k) \qquad (n,\, k \ge 1), \tag{22}$$

причём

$$\begin{aligned} \Phi_n^{\infty}(k) &= \Phi_m(k) - D_n(k) \qquad (1 \le n \le h-1); \\ \Phi_n^{\infty}(k) &= \Phi_m(k) - \sum_{i=1}^{k-n} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-n-i} \qquad (n \ge h), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} &\Phi_m(k) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{0i} q_{i,k-i} \quad (1 \le k \le h-1); \quad \Phi_m(k) = \sum_{i=1}^{h-1} \mathcal{R}_{0i} q_{i,k-i} + \sum_{i=h}^{k} \mathcal{R}_{0i} \widetilde{q}_{k-i} \quad (k \ge h); \\ &D_n(k) = \sum_{i=1}^{k-n} \mathcal{R}_{ni} q_{n+i,k-n-i} \qquad (1 \le k \le h-1); \\ &D_n(k) = \sum_{i=1}^{h-n-1} \mathcal{R}_{ni} q_{n+i,k-n-i} + \sum_{i=h-n}^{k-n} \mathcal{R}_{ni} \widetilde{q}_{k-n-i} \qquad (k \ge h). \end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство. Для системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1/\mathrm{m}$ уравнения (7) знисываются в виде

$$\begin{aligned} &\Phi_n^{(m)}(k) = \sum_{j=0}^{m-n} p_{n,j-1} \Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + \overline{p}_{n,m-n} \Phi_m^{(m)}(k) + f_{(n)}(k,m) \qquad (1 \le n \le h-1); \\ &\Phi_n^{(m)}(k) = \sum_{j=0}^{m-n} \widetilde{p}_{j-1} \Phi_{n+j-1}^{(m)}(k) + \overline{\overline{p}}_{m-n} \Phi_m^{(m)}(k) + \widetilde{f}_n(k,m) \quad (h \le n \le m); \qquad \Phi_0^{(m)}(k) = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\widetilde{f}_n(k,m) = \widetilde{q}_{k-n} + I\{k = m+1\} \overline{\overline{q}}_{m+2-n}$. Решения этой системы можно найти с помощью (9) и (10). После перехода к пределу при $m \to \infty$ в выражениях для этих решений получим значения $\lim\limits_{m\to\infty} \Phi_n^{(m)}(k)$ в виде правых частей равенств (23), (24).

Для системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1$ с помощью формулы полной вероятности получаем равенства

$$\begin{aligned} \varphi_n^{\infty}(t,\, k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = j\}\, \varphi_{n+j-1}^{\infty}(t-x,\, k)\, dF_n(x) \\ &\quad + \mathbf{P}\{\eta(t) = k-n\} \overline{F}_n(t) \quad (1 \le n \le h-1); \\ \varphi_n^{\infty}(t,\, k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = j\}\, \varphi_{n+j-1}^{\infty}(t-x,\, k)\, d\widetilde{F}(x) \\ &\quad + \mathbf{P}\{\eta(t) = k-n\} \overline{\overline{F}}(t) \quad (n \ge h); \qquad \varphi_0^{\infty}(t,\, k) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

После перехода в равенствах (26) к преобразованиям Лапласа и предельного перехода при $s \to +0$, получим систему уравнений для определения функций $\Phi_n^{\infty}(k)$

$$\begin{aligned} \Phi_n^{\infty}(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{n,j-1} \Phi_{n+j-1}^{\infty}(k) + q_{n,k-n} \qquad (1 \le n \le h-1), \\ \Phi_n^{\infty}(k) &= \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{p}_{j-1} \Phi_{n+j-1}^{\infty}(k) + \widetilde{q}_{k-n} \qquad (n \ge h); \qquad \Phi_0^{\infty}(k) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя в уравнения (27) выражения (23) для $\Phi_n^\infty(k)$, убеждаемся, что они являются решениями системы (27). Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то*

$$\Phi_n^\infty = \sum_{i=1}^{h-1} \mathcal{R}_{0i} M_i - \sum_{i=1}^{h-1-n} \mathcal{R}_{ni} M_{n+i} + \widetilde{M}\Biggl(n + \sum_{i=1}^{h-1} \mathcal{R}_{0i}(\rho_i - 1) - \sum_{i=1}^{h-1-n} \mathcal{R}_{ni}(\rho_{n+i} - 1)\Biggr) \qquad (1 \le n \le h-2); \tag{28}$$

$$\Phi_n^\infty = \sum_{i=1}^{h-1} \mathcal{R}_{0i} M_i + \widetilde{M}\Biggl(n + \sum_{i=1}^{h-1} \mathcal{R}_{0i}(\rho_i - 1)\Biggr) \qquad (n \ge h-1).$$

Доказательство. Вычислив сумму по k от 1 до ∞ в выражениях (23), (24) для функций $\Phi_n^\infty(k)$, получим формулы (28). Лемма доказана. □

Теорема 5. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то средняя продолжительность периода занятости системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1$ *ограничена и выполняется предельное соотношение*

$$\mathbf{E}\,\tau(\infty) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\,\tau(m),$$

то есть $\mathbf{E}\,\tau(\infty)$ *определяется в виде* (19).

Доказательство. Согласно (12) для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1/\mathrm{m}$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}\,\tau(m) = \sum_{n=1}^{m} a_n \Phi_n^{(m)} + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}^{(m)},$$

где $\Phi_{m+1}^{(m)} = \Phi_m^{(m)} + \widetilde{M}$. С помощью аналогичных рассуждений можно доказать, что для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1$

$$\mathbf{E}\,\tau(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n^\infty. \tag{29}$$

Используя выражения (28) для Φ_n^∞, вычисляем сумму ряда в правой части (29) и видим, что полученное выражение для $\mathbf{E}\,\tau(\infty)$ совпадает с правой часью равенства (19). Теорема доказана. □

Введём обозначения: $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi_\infty(t) = k\,\} = \pi_k(\infty)$, $k \ge 0$.

Теорема 6. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то для системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1$ *стационарное распределение числа заявок определяется по формулам*

$$\begin{aligned} \pi_0(\infty) &= \frac{1}{1 + \lambda \mathbf{E}\,\tau(\infty)}; \\ \pi_k(\infty) &= \lambda \pi_0(\infty) \left(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{0i} q_{i,k-i} - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} \mathcal{R}_{ni} q_{n+i,k-n-i} \right) \quad (k \ge 1). \end{aligned} \tag{30}$$

Доказательство. Согласно (15), (16) для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1/\mathrm{m}$

$$\pi_0(m) = \frac{1}{1 + \lambda \mathbf{E}\, \tau(m)}\,;$$

$$\pi_k(m) = \lambda \pi_0(m) \left(\sum_{n=1}^{m} a_n \Phi_n^{(m)}(k) + \overline{a}_{m+1} \Phi_{m+1}^{(m)}(k) \right) \qquad (1 \le k \le m+1).$$

Если $\widetilde{\rho} < 1$, то с помощью аналогичных рассуждений для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1$ можно доказать равенства

$$\pi_0(\infty) = \frac{1}{1 + \lambda \mathbf{E}\, \tau(\infty)}\,; \qquad \pi_k(\infty) = \lambda \pi_0(\infty) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n^{\infty}(k) \qquad (k \ge 1). \tag{31}$$

Используя выражения (23), (24) для $\Phi_n^\infty(k)$, вычисляем суммы рядов в правой части (31) и приходим к формулам (30). Теорема доказана. □

5. СИСТЕМА $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$

Через $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ обозначим систему $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1$, в которой $F_n(x) = F(x)$, $1 \le n \le h-1$ и $F_n(x) = \widetilde{F}(x)$, $n \ge h$, то есть систему с двумя режимами обслуживания и одним порогом переключения этих режимов.

Выражение для $\mathbf{E}\, \tau(\infty)$ и формулы для стационарного распределения числа заявок в системе $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ получены в статье [1], но рассматривая эту систему как частный случай системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_\mathrm{h}/1$, удаётся значительно упростить выражение для $\mathbf{E}\, \tau(\infty)$.

Введём обозначения: $M_n = M$, $R_{ni} = R_i$ $(i \ge 1)$, $p_{ni} = p_i$ $(i \ge -1)$, $\rho_n = \rho$ для $n \in \{1, 2, \ldots, h-1\}$.

Теорема 7. *Если* $\widetilde{\rho} < 1$, *то для системы* $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ *средняя продолжительность периода занятости определяется в виде*

$$\mathbf{E}\, \tau(\infty) = M \sum_{i=1}^{h-1} R_i \overline{a}_{h-i} + \frac{\widetilde{M}}{1 - \widetilde{\rho}} \left(e_a + (\rho - 1) \sum_{i=1}^{h-1} R_i \overline{a}_{h-i} \right). \tag{32}$$

Доказательство. Формула (32) следует из (19), если учесть, что для системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}, \widetilde{\mathrm{G}}/1$ выполняются равенства

$$\mathcal{R}_{0i} = R_i, \quad 1 \le i \le h-1; \qquad \mathcal{R}_{1i} = R_i, \quad 1 \le i \le h-2. \tag{33}$$

В самом деле, из (11) следует, что $\mathcal{R}_{1,h-2}$ выражается через $\mathcal{R}_{2,h-3}$, $\mathcal{R}_{3,h-4}$, $\ldots$, $\mathcal{R}_{h-3,2}$, $\mathcal{R}_{h-2,1}$. Снова используя соотношения (11) и (5), получаем

$$\mathcal{R}_{h-2,1} = R_{h-1,1} = R_1; \quad \mathcal{R}_{h-3,2} = R_{h-2,1} \mathcal{R}_{h-2,1}(1 - p_{h-2,0}) = R_1^2(1 - p_0) = R_2;$$
$$\mathcal{R}_{h-4,3} = R_{h-3,1}\big(\mathcal{R}_{h-3,2}(1 - p_{h-3,0}) - \mathcal{R}_{h-2,1} p_{h-3,1}\big) = R_1\big(R_2(1 - p_0) - R_1 p_1\big) = R_3.$$

Продолжая этот процесс, видим, что $\mathcal{R}_{h-5,4}$ выражается через $\mathcal{R}_{h-4,3}$, $\mathcal{R}_{h-3,2}$ и $\mathcal{R}_{h-2,1}$, поэтому $\mathcal{R}_{h-5,4} = R_4$. Далее становится очевидным, что $\mathcal{R}_{h-6,5} = R_5$, $\mathcal{R}_{h-7,6} = R_6$, $\ldots$, $\mathcal{R}_{2,h-3} = R_{h-3}$, поэтому $\mathcal{R}_{1,h-2} = R_{h-2}$.

$\mathcal{R}_{1,h-3}$ выражается через $\mathcal{R}_{2,h-4}$, $\mathcal{R}_{3,h-5}$, $\ldots$, $\mathcal{R}_{h-4,2}$, $\mathcal{R}_{h-3,1}$, то есть — через R_{h-4}, R_{h-5}, $\ldots$, R_2 и R_1. Поэтому $\mathcal{R}_{1,h-3} = R_{h-3}$.

Далее становится очевидным, что $\mathcal{R}_{1i} = R_i$ для $1 \le i \le h-2$.

Поскольку $\mathcal{R}_{0,h-1}$ выражается через $\mathcal{R}_{1,h-2}$, $\mathcal{R}_{2,h-3}$, $\mathcal{R}_{3,h-4}$, $\ldots$, $\mathcal{R}_{h-3,2}$, $\mathcal{R}_{h-2,1}$, найденные выше, то не составляет труда доказать, что $\mathcal{R}_{0,h-1} = R_{h-1}$ и, следовательно, $\mathcal{R}_{0i} = R_i$ для $1 \le i \le h-2$. Итак, равенства (33) доказаны и теорема доказана. □

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1$

Зная стационарное распределение $\pi_k(\infty)$ $(k \geq 0)$, стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{E}\,Q(\infty)$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}\,w(\infty)$ — найдём по формулам

$$\mathbf{E}\,Q(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_{k+1}(\infty);$$

$$\mathbf{E}\,w(\infty) = \frac{\mathbf{E}\,Q(\infty)}{\lambda e_a}\,. \tag{34}$$

Оценку снизу для $\mathbf{E}\,Q(\infty)$ можно получить по формуле

$$\mathbf{E}\,Q_{(N)_-} = \sum_{k=1}^{N-1} k\pi_{k+1}(\infty) + N\overline{\pi}_{N+1}(\infty) < \mathbf{E}\,Q(\infty),$$

где

$$\overline{\pi}_{N+1}(\infty) = 1 - \sum_{k=0}^{N} \pi_k(\infty).$$

$\mathbf{E}\,Q_{(N)_-}$ даёт хорошие приближения для $\mathbf{E}\,Q(\infty)$ при больших значениях N, или в случаях, когда вероятности π_k быстро стремятся к нулю при возрастании k, поэтому в других случаях лучше воспользоваться уточнённой формулой

$$\mathbf{E}\,Q(\infty) \approx \mathbf{E}\,Q_{(N)} = \sum_{k=1}^{N-1} k\pi_{k+1}(\infty) + \Big(N - 1 + \frac{\overline{\pi}_{N+1}(\infty)}{\pi_N(\infty)}\Big)\overline{\pi}_{N+1}(\infty). \tag{35}$$

Предположим, что $\lambda = 2$, заявки прибывают группами в количестве от одной до пяти с вероятностями $a_i = 0,2$ $(1 \leq i \leq 5)$, а время обслуживания определяется в соответствии с числом заявок n в системе на момент начала обслуживания заявки и распределено равномерно на промежутках $[0,\,2]$ $(n = 1)$; $[0,\,1]$ $(n = 2)$; $[0;\,0,5]$ $(n = 3)$; $[0;\,0,25]$ $(n = 4)$; $[0;\,0,125]$ $(n \geq 5)$ соответственно. Итак, $M_1 = 1$; $M_2 = 0,5$; $M_3 = 0,25$; $M_4 = 0,125$; $M_5 = 0,0625$; $e_a = 3$; $h = 5$. Введя обозначения

$$S_{ni} = \frac{1}{2\lambda M_n}\bigg(1 - \sum_{k=0}^{i} \frac{(2\lambda M_n)^k}{k!}\, e^{-2\lambda M_n}\bigg), \qquad n \geq 1, \quad i \geq 0,$$

по формулам (1), (2) получаем

$$p_{n,-1} = S_{n0}, \qquad p_{n0} = a_1 S_{n1}, \qquad p_{n1} = a_1^2 S_{n2} + a_2 S_{n1}, \qquad p_{n2} = a_1^3 S_{n3} + 2a_1a_2S_{n2} + a_3S_{n1},$$
$$p_{n3} = a_1^4 S_{n4} + 3a_1^2a_2S_{n3} + (2a_1a_3 + a_2^2)S_{n2} + a_4S_{n1},$$
$$p_{n4} = a_1^5S_{n5} + 4a_1^3a_2S_{n4} + 3(a_1^2a_3 + a_1a_2^2)S_{n3} + 2(a_2a_3 + a_1a_4)S_{n2} + a_5S_{n1}.$$

Теперь можно воспользоваться равенствами (4), (5) и (11) для вычисления q_{ni}, R_{ni} и $\mathcal{R}_{ni}$.

Средняя продолжительность периода занятости $\mathbf{E}\,\tau(\infty)$, найденная по формуле (19), составляет 17,318.

В строке "$\pi_k(\infty)$" табл. 1 записаны стационарные вероятности $\pi_k(\infty)$, вычисленные по формулам (30), а в нижней строке этой таблицы для сравнения приведены значения соответствующих вероятностей, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [15, 16] для значения времени $t = 10^5$. Значения стационарных характеристик системы, найденные по формулам (34) и (35) (при $N = 6$), а также при помощи GPSS World, приведены в табл. 2. Программа для GPSS World приведена в Приложении.

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок в системе $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1$ ($h=5$)

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\pi_k(\infty)$	0,02806	0,08628	0,14800	0,15086	0,11527	0,08206	0,08177	$\cdots$
$\pi_k(\infty)$ (GPSS World, $t=10^5$)	0,02800	0,08642	0,14907	0,15059	0,11616	0,08209	0,08206	$\cdots$

Таблица 2. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1$ ($h=5$)

Характеристика	$\mathbf{E}\,Q(\infty)$	$\mathbf{E}\,w(\infty)$
Аналитическое значение	4,229	0,705
Значение согласно GPSS World, $t=10^5$	4,427	0,738

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для систем $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1/\mathrm{m}$, $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}_1,\ldots,\mathrm{G}_\mathrm{h}/1$ и $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G},\widetilde{\mathrm{G}}/1$ получены простые и удобные для числовой реализации формулы для средней продолжительности периода занятости и стационарного распределения числа заявок в системе. Сравнение с результатами имитационного моделирования показывает, что формула (35) даёт хорошие приближения для $\mathbf{E}\,Q(\infty)$ не только при больших значениях N.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММА ДЛЯ GPSS WORLD

```
Lam EQU 2        ; значение λ
TMOD EQU 100000        ; время моделирования
QQQ TABLE Q1,0,1,17        ; распределение длины очереди
GENERATE 1
TABULATE QQQ
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))     ; входной поток
TRANSFER 200,,LB0
TRANSFER 250,,LB2
TRANSFER (1/3),,LB3
TRANSFER 500,,LB4
SPLIT 5,LB0        ; поступление заявок по 5
TRANSFER ,OUT
LB2 SPLIT 2,LB0        ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
LB3 SPLIT 3,LB0        ; поступление заявок по 3
TRANSFER ,OUT
LB4 SPLIT 4,LB0        ; поступление заявок по 4
TRANSFER ,OUT
LB0 QUEUE 1
SEIZE KAN
DEPART 1
ADVANCE 0.0000001
TEST E Q1,0,LBB1
ADVANCE (Uniform(5,0,2))        ; обслуживание (режим 1)
TRANSFER ,LBR
LBB1 TEST E Q1,1,LBB2
```

```
ADVANCE (Uniform(5,0,1))        ; обслуживание (режим 2)
TRANSFER ,LBR
LBB2 TEST E Q1,2,LBB3
ADVANCE (Uniform(5,0,0.5))        ; обслуживание (режим 3)
TRANSFER ,LBR
LBB3 TEST E Q1,3,LBB4
ADVANCE (Uniform(5,0,0.25))        ; обслуживание (режим 4)
TRANSFER ,LBR
LBB4 ADVANCE (Uniform(5,0,0.125))        ; обслуживание (режим 5)
LBR RELEASE KAN
TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE TMOD
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жерновий К. Ю. Системи типу $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з часом обслуговування, залежним від довжини черги. *Математичні студії*, 2012, т. 38, № 1, стр. 93–105.
2. Choi B. D., Choi D. I. Queueing system with queue length dependent service time and its application to cell discarding scheme in ATM networks. *IEEE Proc.–Commun.*, 1996, vol. 143, № 1, pp. 5–11.
3. Choi D., Knessl C., Tier C. A queueing system with queue length dependent service times with applications to cell discarding in ATM networks. *J. of Appl. Math. and Stoch. Anal.*, 1999, vol. 12, № 1, pp. 35–62.
4. Choi B. D., Kim Y. Ch., Shin Y., Pearce Ch. E. M. The $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{G}/1$ queue with length dependent service times. *J. of Appl. Math. and Stoch. Anal.*, 2001, vol. 14, № 4, pp. 399–419.
5. Sriram K., Lucantoni D. M. Traffic smoothing effects of bit dropping in a packet voice multiplexer. *IEEE Trans. Commun.*, 1989, vol. 37, № 7, pp. 703–712.
6. Sriram K., McKinney R. S., Sherif M. H. Voice packetization and compression in broadband ATM networks. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 1991, vol. 9, № 3, pp. 294–304.
7. Sriram K. Methodologies for bandwidth allocation, transmission scheduling and congestion avoidance in broadband ATM networks. *Computer Networks and ISDN Systems*, 1993, vol. 26, № 1, pp. 43–69.
8. Финнеран М. Вопросы качественной передачи голоса по IP-сетям: сжатие, задержка и эхо. Часть 1. *Электронные компоненты*, 2008, № 11, стр. 83–85.
9. Королюк В. С. *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.* Киев: Наукова думка, 1975.
10. Bratiychuk M. S., Borowska B. Explicit formulae and convergence rate for the system $\mathrm{M}^{\alpha}/\mathrm{G}/1/\mathrm{N}$ as $N \to \infty$. *Stochastic Models*, 2002, vol. 18, № 1, pp. 71–84.
11. Zhernovyi K. Yu. Investigation of the $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ System with Service Regime Switchings and Threshold Blocking of the Input Flow. *Journ. of Communic. Technology and Electronics*, 2011, vol. 56, № 12, pp. 1570–1584.
12. Zhernovyi K. Yu. Stationary Characteristics of the $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ System with the Threshold Functioning Strategy. *Journ. of Communic. Technology and Electronics*, 2011, vol. 56, № 12, pp. 1585–1596.
13. Zhernovyi K. Yu., Zhernovyi Yu. V. An $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ System with Two-Threshold Hysteresis Strategy of Service Intensity Switching. *Journ. of Communic. Technology and Electronics*, 2012, vol. 57, № 12, pp. 1340–1349.

14. Жерновый К. Ю., Жерновый Ю. В. Система $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$ с гистерезисным переключением интенсивности обслуживания. *Информационные процессы*, 2012, т. 12, № 3, стр. 176–190.

15. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.

16. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.

The $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ and $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$ queues with service times depending on the queue length

Zhernovyi K. Yu., Zhernovyi Yu. V.

We consider the $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ and $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$ queues in which the service time depends on the queue length and is determined at the start of service of the customer. With the help of an approach based on the idea of V. S. Korolyuk's potential method we determine the mean duration of the busy time and the stationary distribution of the number of customers in the system. As a special case, we consider the $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1$ queue with a single threshold for switching service. The results are verified using simulation model constructed with the assistance of tools GPSS World.

KEYWORDS: queueing system, batch arrival of customers, service rate depending on the queue length, the stationary distribution of the number of customers.