

## Вейвлеты и адаптивный трешолдинг

М.В.Обидин\*, А.П.Серебровский\*\*

\*Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия

\*\*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 27.05.2013

**Аннотация**—В работе рассматривается дискретное вейвлет преобразование и его применение для очистки зашумленных сигналов. Статья рассчитана на читателя незнакомого с теорией вейвлетов, поэтому в начале статьи приводятся базовые определения и теоремы, необходимые для понимания дальнейшего материала. Прочитав данную статью читатель познакомится с теорией вейвлетов, и узнает о методе очистки сигналов от шумов основанном на вейвлет преобразовании.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** вейвлеты, трешолдинг, фильтрация, биортогональные вейвлеты, кратномасштабный анализ, критерий Штейна.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В анализе различных зашумленных функций часто возникает желание разделить её на несколько функций, каждая из которых описывает поведение функции в различном масштабе. Подобную операцию можно произвести, используя полосовые фильтры, основанные на преобразовании Фурье. Но у преобразования Фурье есть недостаток – базисные функции периодичны и их носитель – вся числовая ось. Вейвлет преобразование предлагает операцию во многом похожую на Фурье преобразование, но базисные функции в вейвлет преобразовании зависят от двух параметров (а не от одного, как в Фурье преобразовании) и могут иметь компактный носитель, эти параметры – масштаб по оси  $Ox$  и смещение по оси  $Ox$ . Так же вейвлет преобразование можно применять и для “очистки” сигнала от шумов, один из таких методов рассматривает в этой статье.

### 2. КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ

В основе вейвлет преобразования лежит кратномасштабный анализ. Ниже дается его определение:

**Определение 1.** Кратномасштабный анализ  $L^2(\mathbb{R})$  – это последовательность замкнутых подпространств  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $V_j \in L^2(\mathbb{R})$ , таких что:

1.  $V_j \subset V_{j+1}$ ,
2.  $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$ ,
3.  $f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t+1) \in V_0$ ,
4.  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$ ,  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \emptyset$ ,
5.  $\exists \phi(t) \in V_0 : \int \phi(t) dt \neq 0$  и  $\{\phi(t-n) | n \in \mathbb{Z}\}$  – базис Рисса в  $V_0$ .

Из определения кратномасштабного анализа прямо следует, что

$$\{\phi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j} \phi(2^j t - n) | n \in \mathbb{Z}\} \text{ – базис Рисса в } V_j.$$

Функцию  $\phi_{j,n}(t)$  мы будем называть масштабирующей функцией, а  $\phi(t)$  мы будем называть материнской масштабирующей функцией.

Т.к.  $\phi(t) \in V_0 \subset V_1$ , то  $\exists h_n \in l^2(Z): \phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n)$ . Получившуюся последовательность  $\{h_n\}_{n \in Z}$  мы будем называть масштабирующим фильтром.

Рассмотрим последовательность пространств  $\{W_j\}_{j \in Z}$ , где

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Отсюда имеем, что

$$L^2(R) = \overline{V_{j_0} \oplus \left( \bigoplus_{j=j_0}^{+\infty} W_j \right)} \quad (1)$$

и

$$L^2(R) = \overline{\bigoplus_{j \in Z} W_j}.$$

**Определение 2.**  $\psi(t)$  – вейвлет функция, если  $\{\psi(t - n) | n \in Z\}$  – базис Рисса в  $W_0$

Точно так же, как и для масштабирующей функции получим, что

$$\{\psi_{j,n}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - n) | n \in Z\} \text{ – базис Рисса в } W_j.$$

Аналогично масштабирующему фильтру  $h_n$  построим вейвлет фильтр (т.к.  $\psi(t) \in V_1$ ):

$$\exists g_n \in l^2(Z) : \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} g_n \phi(2t - n).$$

Пусть  $W_j^c$  и  $V_j^c$  – дополнения  $W_j$  и  $V_j$  соответственно в  $L^2(R)$ , т.е.

$$W_j^c = \bigoplus_{i \in Z, i \neq j} W_i$$

и

$$V_j^c = \bigoplus_{i=j}^{+\infty} W_i.$$

Обозначим за  $Q_j$  и  $P_j$  операторы проектирования на  $W_j$  и  $V_j$  параллельно  $W_j^c$  и  $V_j^c$  соответственно, тогда

$$f(t) = \sum_{j \in Z} Q_j f(t) = \sum_{j,n} \psi_{j,n}(t) \alpha_{j,n}$$

или

$$f(t) = P_{j_0} f(t) + \sum_{j=j_0}^{+\infty} Q_j f(t) = \sum_{n \in Z} \beta_{j_0,n} \phi_{j_0,n} + \sum_{j=j_0}^{+\infty} \sum_{n \in Z} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}(t). \quad (2)$$

Кратномасштабный анализ дал нам последовательность вложенных подпространств  $V_j$ , в которых заданы базисные функции. При этом базисные функции в двух различных пространствах отличаются только масштабом! Более того, мы построили последовательность подпространств  $W_j$ , которые являются разницей между  $V_j$  и  $V_{j+1}$ , и базисы в этих подпространствах также не различаются ничем кроме масштаба. Так же, мы получили очень важное равенство (1), из него следует, что мы можем представить любую функцию из  $L^2(R)$  с помощью её проекций на одно подпространство  $V_{j_0}$  и на последовательность подпространств  $W_j$ . Другими словами, мы получили разложение функции  $f(t) \in L^2(R)$  по системе функций  $\phi_{j_0,n}, n \in Z; \psi_{j,n}, n \in Z, j \in Z$ .

### 3. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ БАЗИС ВЕЙВЛЕТОВ

**Определение 3.** Ортогональный кратномасштабный анализ  $L^2(R)$  – это такой кратномасштабный анализ  $L^2(R)$ , что

$$W_j \perp V_j.$$

Достаточными условиями являются

$$V_0 \perp W_0$$

или

$$(\psi(t), \phi(t-n)) = 0, \forall n \in Z.$$

Если  $\psi_{j,n}$  и  $\phi_{j,n}$  – ортонормированные базисы, то

$$P_j f(t) = \sum_{n \in Z} (f, \phi_{j,n}) \phi_{j,n}(t),$$

$$Q_j f(t) = \sum_{n \in Z} (f, \psi_{j,n}) \psi_{j,n}(t).$$

Таким образом:

$$\alpha_{j,n} = (f, \psi_{j,n}), \tag{3}$$

$$\beta_{j,n} = (f, \phi_{j,n}). \tag{4}$$

Эти две формулы дают нам возможность посчитать коэффициенты в разложении (2).

### 4. ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ОРТОНОРМИРОВАННОМ БАЗИСЕ

Распишем подробнее формулы (3) и (4)

$$\begin{aligned} \beta_{j,n} &= (f, \phi_{j,n}) = (f, \sqrt{2} \sum_{m \in Z} h_m \phi_j(2t - m - 2n)) = \\ &= (f, \sum_{m \in Z} h_m \phi_{j+1}(t - m - 2n)) = \sum_{m \in Z} h_m (f, \phi_{j+1}(t - m - 2n)) = \\ &= \sum_{m \in Z} h_m \beta_{j+1, m+2n} \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\alpha_{j,n} &= (f, \psi_{j,n}) = (f, \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \phi_j(2t - m - 2n)) = \\ &= (f, \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \phi_{j+1}(t - m - 2n)) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m (f, \phi_{j+1}(t - m - 2n)) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \beta_{j+1, m+2n}\end{aligned}$$

Или же, если пропустить промежуточные вычисления:

$$\beta_{j,n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \beta_{j+1, m+2n} \quad (5)$$

$$\alpha_{j,n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \beta_{j+1, m+2n}. \quad (6)$$

Получившиеся две формулы носят название прямого дискретного вейвлет преобразования, и являются формулами перехода от коэффициентов  $\beta$  (так называемые коэффициенты аппроксимации) более высокого уровня к коэффициентам  $\alpha$  (коэффициенты детализации) и  $\beta$  более низкого уровня.

Обратное дискретное вейвлет преобразование имеет вид

$$\beta_{j,n} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{n-2l} \alpha_{j-1, l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{n-2l} \beta_{j-1, l}.$$

Пусть для некоторой функции  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  нам известны коэффициенты  $\{\beta_{j_1, n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , тогда, т.к.

$$V_{j_1} = V_{j_0} \oplus \left( \bigoplus_{j=j_0}^{j_1-1} W_j \right)$$

мы можем получить набор коэффициентов  $(\{\beta_{j_0, b}\}_{b \in \mathbb{Z}}; \{\alpha_{j, n}\}_{n \in \mathbb{Z}}, j = \overline{j_0, j_1 - 1})$ .

Теперь, если нам дан набор равноотстоящих отсчетов функции  $f(t)$   $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ :  $f_n = f(nt_0)$  и  $\phi(t)$  имеет компактный носитель, то взяв  $j_1$  такое, что  $\text{supp}(\phi_{j_1}) = [0, t_0]$  мы получим, что  $\beta_{j_1, n} = f_n$ . Если же носитель  $\phi(t)$  – не ограничен, но для некоторого  $j_1$  выполняется  $|\int_0^{t_0} \phi_{j_1}^2(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{j_1}^2(t) dt| < \varepsilon$ , то  $|\beta_{j_1, n} - f_n| < \varepsilon$

Другими словами мы получили, что для набора равноотстоящих отсчетов функции  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  мы можем подобрать такое  $j_1$ , что коэффициенты аппроксимации на этом уровне будут равны отсчетам функции с любой заданной точность! И имея формулу дискретного преобразование, мы можем найти все остальные коэффициенты.

## 5. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ

Теперь попробуем несколько расширить выбор различных вейвлет функций. Пусть теперь  $\psi_{j,n}$  и  $\phi_{j,n}$  – не ортогональные базисы. Из линейной алгебры известно, что для таких базисов всегда можно построить единственные базисы  $\psi_{j,n}^*$  и  $\phi_{j,n}^*$  такие, что:

$$(\psi_{j,n}, \psi_{j,k}^*) = \delta_n^k,$$

$$(\phi_{j,n}, \phi_{j,k}^*) = \delta_n^k.$$

Такие базисы называют взаимными или биортогональными. Одно из свойств таких базисов заключается в следующем:

$$f(t) = \sum_n \alpha_{j,n} \psi_{j,n}(t) \Leftrightarrow \alpha_{j,n} = (f, \psi_{j,n}^*),$$

$$f(t) = \sum_n \beta_{j,n} \phi_{j,n}(t) \Leftrightarrow \beta_{j,n} = (f, \phi_{j,n}^*).$$

Отсюда следует, что для не ортогонального базиса мы можем воспользоваться формулами ДВП просто заменив  $\psi_{j,n}$  и  $\phi_{j,n}$  на  $\psi_{j,n}^*$  и  $\phi_{j,n}^*$  соответственно в формуле для вычисления коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  (что повлечет за собой замену  $h$  и  $g$  фильтров).

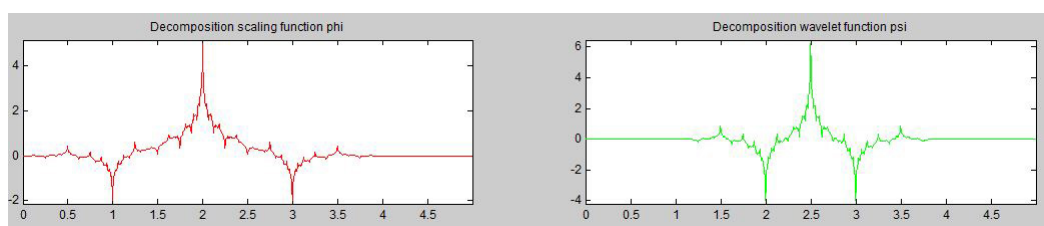


Рис. 1. Функции  $\psi_{j,n}^*$  и  $\phi_{j,n}^*$  для биортогонального вейвлета.

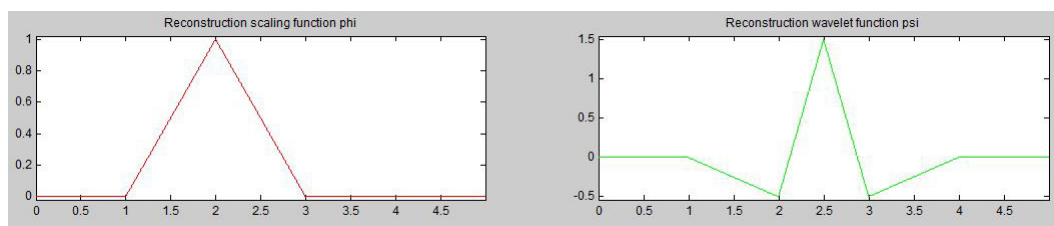


Рис. 2. Функции  $\psi_{j,n}$  и  $\phi_{j,n}$  для биортогонального вейвлета.

К сожалению, построение биортогональных вейвлетов – задача достаточно сложная и трудоемкая и зачастую получившиеся функции не имеют прямого выражения, но могут быть вычислены с помощью численных методов. Описание нахождения биортогональных вейвлетов выходит за рамки данной статьи, но подробнее о них можно узнать в [2], стр. 154.

Подбор материнской масштабирующей функции (и материнского вейвлета) – достаточно творческая задача. Сложно заранее предсказать какие функции лучше подойдут для конкретных задач. И класс биортогональных вейвлетов значительно расширяет набор доступных вейвлетов. Например, среди биортогональных вейвлетов есть такие функции, с помощью которых можно разложить сигнал на ломаные линии!

## 6. НЕСМЕЩЕННАЯ ОЦЕНКА РИСКА ШТЕЙНА

Несмещенная оценка риска Штейна (SURE) [3] не имеет прямого отношения к вейвлетам, но она используется в трешолдинге – операции очистки сигнала от шумов с помощью вейвлетов. Поэтому в данной части статьи рассмотрена эта оценка для простого случая: Пусть нам

задана наблюдаемая случайная величина  $\xi_k = \theta_k + \sigma \varepsilon_k$  ( $k \in [1, M]$ ), где  $\theta_k$  – ненаблюдаемая величина,  $\varepsilon_k$  – гауссовский шум. Будем искать оценку  $\hat{\theta}_k$  в виде  $\hat{\theta}_k = \xi_k + H_\tau(\xi_k)$ , где  $H_\tau$  – слабо дифференцируемая функция, зависящая от константы  $\tau$ . Введем среднеквадратический риск как

$$R = \sum_{k=1}^M E(\hat{\theta}_k - \theta_k)^2. \quad (7)$$

Наша задача найти такую  $\tau^*$ , при которой значение  $R$  будет минимально. Пусть  $R_k = E(\hat{\theta}_k - \theta_k)^2$

$$\begin{aligned} R_k &= E(\xi_k + H_\tau(\xi_k) - \xi_k + \sigma \varepsilon_k)^2 = \\ &= E(H_\tau^2(\xi_k)) + \sigma^2 E(\varepsilon_k^2) + 2\sigma E(\varepsilon_k H_\tau(\xi_k)) \\ R_k &= \sigma^2 + 2\sigma E(\varepsilon_k H_\tau(\xi_k)) + E(H_\tau^2(\xi_k)). \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} R_k^{(1)} &= E(H_\tau^2(\xi_k)) \\ R_k^{(2)} &= E(\varepsilon_k H_\tau(\xi_k)) \\ R_k &= \sigma^2 + R_k^{(1)} + 2\sigma R_k^{(2)}. \end{aligned}$$

Распишем  $R_k^{(2)}$ :

$$R_k^{(2)} = E(H_\tau(\xi_k) \varepsilon_k) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\tau(\theta_k + \sigma \varepsilon) \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon.$$

Введем замену  $\eta_k = \theta_k + \sigma \varepsilon$ :

$$R_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\tau(\eta_k) \frac{\eta_k - \theta_k}{\sigma^2} e^{-\frac{(\eta_k - \theta_k)^2}{2\sigma^2}} d\eta_k = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\tau(\eta_k) d e^{-\frac{(\eta_k - \theta_k)^2}{2\sigma^2}}.$$

По определению слабой производной:

$$R_k^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\eta_k} H_\tau(\eta_k) e^{-\frac{(\eta_k - \theta_k)^2}{2\sigma^2}} d\eta_k = \sigma E\left(\frac{d}{d\eta_k} H_\tau(\eta_k) \Big|_{\eta_k = \xi_k}\right).$$

В итоге получаем, что

$$R_k(\sigma, \xi_k, \tau) = \sigma^2 + E(H_\tau^2(\xi_k)) + 2\sigma^2 E\left(\frac{d}{d\eta_k} H_\tau(\eta_k) \Big|_{\eta_k = \xi_k}\right)$$

и

$$SURE = \sum_{k=1}^M R_k(\sigma, \xi_k, \tau).$$

Критерий Штейна заключается в следующем:

$$\hat{\tau} = \arg \min \sum_{k=1}^M R_k(\sigma, \xi_k, \tau).$$

## 7. ТРЕШОЛДИНГ

Пусть нам дан зашумленный сигнал  $f(t)$  и мы получили его вейвлет коэффициенты  $(\{\beta_{j_0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}; \{\alpha_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}, j = \overline{j_0, j_1 - 1}})$ . Предположим, что  $f(t) = f^*(t) + w(t)$ . Пусть шум  $w(t)$  – такой, что его коэффициенты детализации равны  $\sigma_j \xi_{j,n}$ , где  $\sigma_j > 0$  и  $\xi_{j,n}$  – нормально распределенная случайная величина, тогда  $\alpha_{j,n} = \alpha_{j,n}^* + \sigma_j \xi_{j,n}$ .

Наша задача – это построить оценку  $\hat{f}(t)$  ‘истинного’ незашумленного сигнала  $f^*(t)$ . Для этого мы построим оценки  $\hat{\alpha}_{j,n}$  коэффициентов детализации незашумленного сигнала  $\alpha_{j,n}^*$ , и выполним обратное ДВП. Мы будем искать  $\hat{\alpha}_{j,n}$  в виде:

$$\hat{\alpha}_{j,n} = \alpha_{j,n} + H_{\tau_j}(\alpha_{j,n}) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\alpha_{j,n}| \leq \tau_j \\ \alpha_{j,n} - \tau_j, & \text{если } \alpha_{j,n} > \tau_j \\ \alpha_{j,n} + \tau_j, & \text{если } \alpha_{j,n} < -\tau_j. \end{cases}$$

Другими словами  $H_{\tau}(t) = -\tau I(|t| < \tau) - \tau I(|t| \geq \tau) \text{sign}(t)$ , где  $I$  – функция-индикатор:

$$I(t \in T) = \begin{cases} 1, & t \in T \\ 0, & t \notin T. \end{cases}$$

Полученная процедура носит название мягкого трешолдинга. Основная проблема заключается в поиске  $\tau_j$ . Для одновременного оценивания и параметра  $\tau_j$  и коэффициентов  $\hat{\alpha}_{j,n}$  используется метод адаптивного трешолдинга основанный на несмещенной оценке риска Штейна (*SURE*) для  $R = E \sum (\hat{\alpha}_{j,n} - \alpha_{j,n}^*)^2$ .

При таких предположениях несмещенная оценка риска Штейна примет вид:

$$SURE_j(\sigma, \alpha_{j,n}, \tau_j) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n(\sigma, \alpha_{j,n}, \tau_j),$$

$$R_n(\sigma, \alpha_{j,n}, \tau_j) = \sigma^2 + E(H_{\tau}^2(\alpha_{j,n})) + 2\sigma^2 E\left(\frac{d}{d\eta_k} H_{\tau}(\eta) \Big|_{\eta=\alpha_{j,n}}\right),$$

$$\begin{aligned} R_n(\sigma, \alpha_{j,n}, \tau_j) &= \sigma^2 + \alpha_{j,n}^2 I(|\alpha_{j,n}| < \tau_j) + \tau_j^2 I(|\alpha_{j,n}| \geq \tau_j) - 2\sigma^2 I(|\alpha_{j,n}| < \tau_j) = \\ &= \sigma^2 I(|\alpha_{j,n}| \geq \tau_j) - \sigma^2 I(|\alpha_{j,n}| < \tau_j) + \alpha_{j,n}^2 I(|\alpha_{j,n}| < \tau_j) + \tau_j^2 I(|\alpha_{j,n}| \geq \tau_j) = \\ &= (\tau_j^2 + \sigma^2) I(|\alpha_{j,n}| \geq \tau_j) + (\alpha_{j,n}^2 - \sigma^2) I(|\alpha_{j,n}| < \tau_j) = \\ &= (\alpha_{j,n}^2 - \sigma^2) + (2\sigma^2 + \tau_j^2 - \alpha_{j,n}^2) I(|\alpha_{j,n}| \geq \tau_j). \end{aligned}$$

Лучшая оценка достигается при  $\tau_j$  равном

$$\hat{\tau}_j = \arg \min_{n \in \mathbb{Z}} \sum (2\sigma^2 + \tau_j^2 - \alpha_{j,n}) I(|\alpha_{j,n}| \geq \tau_j).$$

## 8. ПРИМЕРЫ

В качестве примера, адаптивный мягкий трешолдинг был применен к графику цен на нефть за несколько лет<sup>1</sup>. Делалось это следующим образом: для начала нужно задаться числом  $N$ .

<sup>1</sup> Данные были любезно предоставлены Жолковым С.Ю.

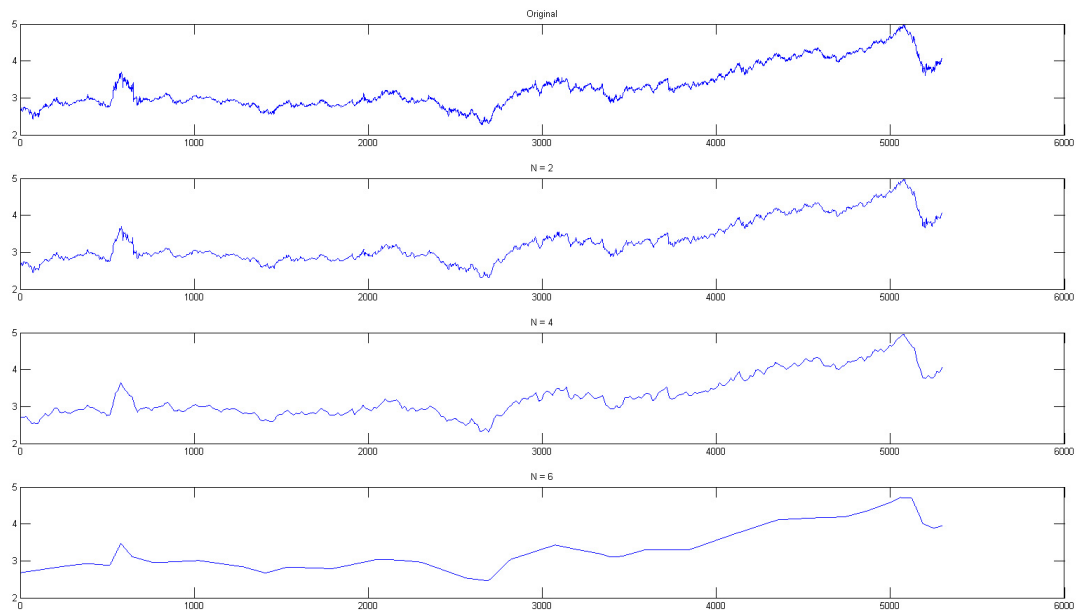


Рис. 3. Трешолдинг графика цен на нефть.

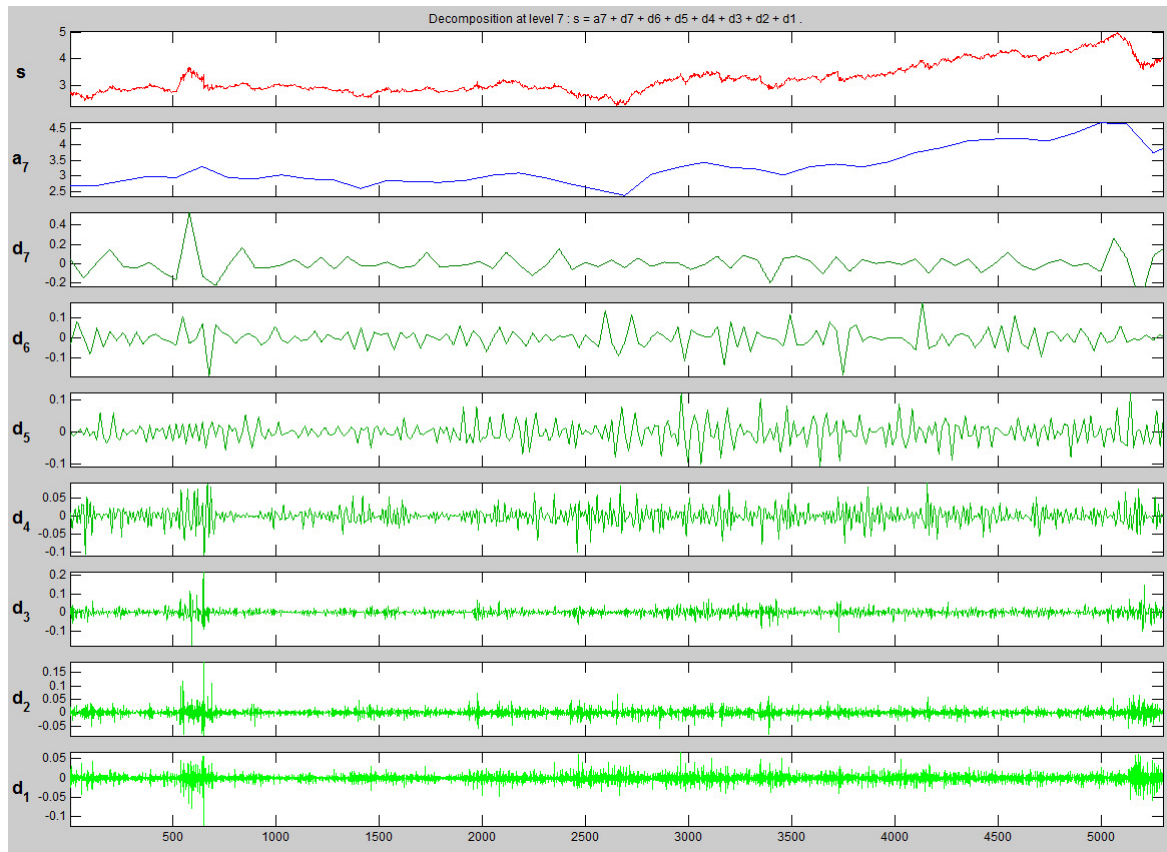


Рис. 4. Разложение графика цен на нефть.

Затем выполнить вейвлет разложение на  $N$  уровней, после этого применяется мягкий адаптивный трешолдинг и сигнал восстанавливается из получившихся коэффициентов.



На первом графике рисунка 3 изображен реальный график цен, на последующих – обработанный с помощью адаптивного трешолдинга с различными  $N$ . Как видно, чем больше  $N$ , тем грубее оценка. Другими словами, изменяя  $N$  мы можем управлять порогом очистки сигнала.

Можно рассмотреть разложение сигнала более подробно. На рисунке 4 приведено разложение с  $N = 7$  уже рассмотренного графика цен на нефть. На первом графике изображен исходный сигнал, на втором – сигнал восстановленный только из коэффициентов аппроксимации. На последующих графиках изображен сигнал восстановленный только из одного набора коэффициентов детализации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам*. - Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001, 464 стр.
2. Смоленцев Н.К. *Вейвлет-анализ в MATLAB*. - М.: ДМК Пресс. 2010. - 448 стр.: ил.
3. Donoho, David L.; Iain M. Johnstone Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage, *J. Am. Stat. Ass.*, 1995 Vol. 90, No. 432, pp. 1200–1224

### Wavelets and adaptive thresholding

Obidin M.V., Serebroski A.P.

The paper deals with the discrete wavelet transform and its application in cleaning signals with noise. The article is intended to reader unfamiliar with the theory of wavelets, so the basic definitions and theorems needed to understand the material are presented at the beginning of the paper. After reading this article the reader will acquaint with the theory of wavelets, and learn about the method of denoising of signals based on the wavelet transform.

**KEYWORDS:** wavelets, thresholding, filtering, biorthogonal wavelets, multiresolution analysis, Stein’s unbiased risk estimate.