Информационные процессы, Том 14, № 2, 2014, стр. 137–150

Вероятностные характеристики системы $M_2^\theta/G/1/m$ с двухпетельным гистерезисным управлением длительностью обслуживания и интенсивностью входящего потока

Ю. В. Жерновый, К. Ю. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
e-mail: yu.zhernovyi@gmail.com

Поступила в редколлегию 03.06.2014

Аннотация—Рассмотрена система обслуживания типа $M_2^\theta/G/1/m$ с групповым поступлением заявок, в которой применяется пороговый механизм управления длительностью обслуживания и интенсивностью входящего потока с двумя гистерезисными петлями. В систему поступают два независимых потока заявок, один из которых блокируется в режиме перегрузки. Переключения режимов функционирования осуществляются в моменты окончания обслуживания заявок, а полная блокировка входящего потока начинается в момент достижения длины очереди числа m. Для определения вероятностных характеристик системы предложен подход, базирующийся на методе потенциала В. С. Королюка. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для стационарного распределения числа заявок в системе, вероятности обслуживания и стационарных характеристик очереди. Полученные результаты проверены с помощью имитационной модели, построенной с привлечением инструментальных средств GPSS World.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система обслуживания, два независимых потока заявок, групповое поступление заявок, гистерезисное управление с двумя петлями, период занятости, распределение числа заявок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для предотвращения перегрузок в информационно-телекоммуникационных системах используется управление как входящим потоком и его параметрами, так и интенсивностью обслуживания. Согласно [1–3] системы обслуживания с гистерезисным управлением могут служить адекватными моделями для оценки качества функционирования SIP-серверов в условиях перегрузок.

Исследованию систем обслуживания с пороговыми стратегиями функционирования посвящено большое число публикаций, в частности статьи [4–9]. Обзор работ по изучению систем с гистерезисным управлением можно найти в [4].

В настоящей работе изучена система обслуживания $M_2^\theta/G/1/m$ с двумя независимыми потоками групп заявок, в которой осуществляется управление не только параметрами этих потоков, а и длительностью обслуживания заявок. Применён гистерезисный механизм управления с двумя петлями.

Аналогичный двухпетельный гистерезисный механизм рассматривался в статье [4] для системы $M_2/G/1/m$ с ординарным входящим потоком. В этой работе переключения режимов функционирования системы осуществлялись в моменты изменения числа заявок в системе, а управление применялось только к интенсивности входящего потока.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Систему обслуживания $\mathrm{M}_2^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, в которую поступают два независимых потока групп заявок, формально опишем следующим образом. Пусть заданы последовательности случайных величин $\{\alpha_{1n}\}$, $\{\alpha_{2n}\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\widetilde{\beta}_n\}$ $(n \geq 1)$, где α_{in} представляет время между поступлением $(n-1)$–ой и n–ой группы i-го потока $(i = 1,\, 2)$, θ_n — число заявок в n–ой группе, а β_n и $\widetilde{\beta}_n$ — время обслуживания n–ой заявки в нормальном режиме обслуживания и в режиме частичной или полной блокировки соответственно. Все перечисленные величины независимы, причём $\mathbf{P}\{\alpha_{in} < x\} = 1 - e^{-\lambda_i x}$ $(\lambda_i > 0;\ i = 1,\, 2)$; $\mathbf{P}\{\theta_n = k\} = a_k$ $(k \geq 1)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 1$; $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ $(x \geq 0)$, $F(0) = 0$ и $\mathbf{P}\{\widetilde{\beta}_n < x\} = \widetilde{F}(x)$ $(x \geq 0)$, $\widetilde{F}(0) = 0$. Если $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то заявки в систему поступают по одной (ординарный входящий поток).

Итак, промежутки времени между моментами поступления групп заявок i-го потока — независимые случайные величины, распределённые по показательному закону с параметром λ_i $(i = 1, 2)$. В общем потоке, являющимся суперпозицией первого и второго потоков, промежутки времени между моментами поступления групп заявок показательно распределены с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ [10, с. 83].

Заявки обслуживаются по одной, обслуженная заявка покидает систему, а обслуживающее устройство немедленно начинает обслуживать заявку из очереди при её наличии или же ждёт поступления очередной группы заявок. Применяется дисциплина обслуживания FIFO. Очередь внутри одной группы заявок может быть организована произвольно, поскольку изучаемые нами характеристики не зависят от способа её организации.

Пусть m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Итак, если в систему, в которой уже находится $k \in [0,\, m+1]$ заявок, поступает группа из θ_n заявок, то только $\min\{\theta_n,\, m+1-k\}$ из них присоединяются к очереди, а остальные теряются.

Используются три режима управления интенсивностью входящего потока: нормальный, режим частичной блокировки и режим полной блокировки. В нормальном режиме в систему допускаются заявки первого и второго потоков, а функция распределения длительности обслуживания каждой заявки равна $F(x)$. В режиме частичной блокировки прекращается приём заявок второго потока, то есть принимаются лишь заявки первого потока. В режиме полной блокировки прекращается приём всех заявок. В режимах частичной и полной блокировки длительность обслуживания заявки распределена по закону $\widetilde{F}(x)$.

Опишем механизм переключения режимов. Пусть h_1, h_2 — заданные числа $(1 \leq h_1 < h_2 \leq m-2)$, $\xi(t)$ — число заявок в системе в момент времени t, а t_b — момент начала обслуживания заявки. С момента поступления в систему первой заявки и во время обслуживания всех заявок, для которых выполнено условие $\xi(t_b) \leq h_2$, применяется нормальный режим работы системы. Переключение из нормального режима на режим частичной блокировки осуществляется в момент t_b начала обслуживания той первой заявки, для которой выполняются неравенства $h_2 + 1 \leq \xi(t_b) \leq m$. Режим полной блокировки включается с момента достижения длины очереди числа m и длится до момента t_b начала обслуживания той заявки, для которой выполнится равенство $\xi(t_b) = h_2$. В этот момент происходит переключение на режим частичной блокировки. Из режима частичной блокировки возможно переключение или на нормальный режим, или на режим полной блокировки. Переключение на нормальный режим осуществляется в момент t_b начала обслуживания той заявки, для которой выполняется равенство $\xi(t_b) = h_1$.

Ограничения $h_1 < h_2 \leq m-2$ введены только для того, чтобы не рассматривать случаи, расчётные формулы для которых несколько отличаются от приводимых ниже, и нисколько не умаляют общности полученных результатов. Например, если $h_1 = h_2$, то остаётся только одна петля гистерезиса, и формулы для этого случая можно получить из приводимых ниже, если при вычислении сумм считать, что $\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} c_k = 0$ для $n_2 < n_1$.

Для исследования вероятностных характеристик рассматриваемой системы обслуживания мы применяем подход, базирующийся на методе потенциала В. С. Королюка [11], который ранее использовался нами, в частности, в работах [5, 6, 9]. Этот метод допускает обобщение на семейство гистерезисных петель, расположенных по тому же принципу, что и описанные выше две петли.

3. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\mathbf{P}_{F,\lambda,n}$ ($\mathbf{P}_{\widetilde{F},\lambda_1,n}$) условную вероятность при условии, что в начальный момент времени в системе находится n заявок, начинается обслуживание заявки, время обслуживания которой распределено по закону $F(x)$ $\big(\widetilde{F}(x)\big)$, и во время обслуживания этой заявки промежутки времени между моментами поступления групп заявок показательно распределены с параметром λ (λ_1). Через $\mathbf{E}$ ($\mathbf{P}$) обозначим условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что система начинает работать в момент прибытия первой группы заявок. Будем использовать следующие обозначения: $\eta(x,\lambda)$ — число заявок, поступивших в систему на отрезке времени $[0; x)$ при условии, что промежутки времени между моментами поступления групп заявок показательно распределены с параметром λ; a_i^{k*} — k–кратная свёртка последовательности a_i; $a(s,\,z) = s + \lambda\big(1-\alpha(z)\big)$; $a_1(s,\,z) = s + \lambda_1\big(1-\alpha(z)\big)$. Пусть

$$f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF(x), \qquad \widetilde{f}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d\widetilde{F}(x);$$

$$M = \int\limits_0^\infty x\,dF(x) < \infty; \qquad \widetilde{M} = \int\limits_0^\infty x\,d\widetilde{F}(x) < \infty; \qquad e_a = \sum_{k=1}^\infty k a_k < \infty;$$

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x), \qquad \overline{\widetilde{F}}(x) = 1 - \widetilde{F}(x); \qquad \alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k a_k;$$

$$\overline{a}_n = \sum_{k=n}^\infty a_k, \qquad \overline{p}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty p_k(s), \qquad \overline{q}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty q_k(s).$$

Зададим последовательности $p_i(s)$, $\widetilde{p}_i(s)$ ($\mathrm{Re}\ s \geq 0$) в виде

$$\begin{aligned} p_i(s) =& \frac{1}{f(s)} \int\limits_0^\infty e^{-sx}\,\mathbf{P}\{\eta(x,\lambda) = i+1\}\,dF(x) = \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\,dF(x); \\ \widetilde{p}_i(s) =& \frac{1}{\widetilde{f}(s)} \int\limits_0^\infty e^{-sx}\,\mathbf{P}\{\eta(x,\lambda_1) = i+1\}\,d\widetilde{F}(x) \\ =& \frac{1}{\widetilde{f}(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+s)x} \frac{(\lambda_1 x)^k}{k!}\,d\widetilde{F}(x), \qquad i \geq -1. \end{aligned} \tag{1}$$

Последовательности функций $R_k(s)$ и $\widetilde{R}_k(s)$ ($k \geq 1$) определим равенствами

$$\sum_{k=1}^\infty z^k R_k(s) = \frac{z}{f\big(a(s,z)\big) - z}, \quad |z| < \nu(s); \qquad \sum_{k=1}^\infty z^k \widetilde{R}_k(s) = \frac{z}{\widetilde{f}\big(a_1(s,z)\big) - z}, \quad |z| < \widetilde{\nu}(s), \tag{2}$$

где $\nu(s)$ и $\widetilde{\nu}(s)$ — единственные на промежутке $[0;1]$ корни уравнений $f\big(a(s,z)\big) = z$ и $\widetilde{f}\big(a_1(s,z)\big) = z$ соответственно.

Последовательности $q_i(s)$, $\widetilde{q}_i(s)$ $(i \geq 0)$ зададим в виде

$$
\begin{aligned}
q_i(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\,\mathbf{P}\{\eta(x,\lambda)=i\,\}\,\overline{F}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\,\overline{F}(x)\,dx;\\
\widetilde{q}_i(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\,\mathbf{P}\{\eta(x,\lambda_1)=i\,\}\,\overline{\widetilde{F}}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+s)x}\frac{(\lambda_1 x)^k}{k!}\,\overline{\widetilde{F}}(x)\,dx.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Введя обозначения

$$
\begin{aligned}
p_i &= \lim_{s\to+0} p_i(s), \qquad R_i = \lim_{s\to+0} R_i(s), \qquad q_i = \lim_{s\to+0} q_i(s),\\
\widetilde{p}_i &= \lim_{s\to+0} \widetilde{p}_i(s), \qquad \widetilde{R}_i = \lim_{s\to+0} \widetilde{R}_i(s), \qquad \widetilde{q}_i = \lim_{s\to+0} \widetilde{q}_i(s),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

с помощью равенств (1)–(4) получим соотношения:

$$
\begin{aligned}
&p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\,dF(x), \quad \widetilde{p}_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\frac{(\lambda_1 x)^k}{k!}\,d\widetilde{F}(x), \quad i \geq -1;\\
&R_1 = \frac{1}{p_{-1}}\,, \qquad R_{k+1} = \frac{1}{p_{-1}}\Big(R_k - \sum_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}\Big), \qquad k \geq 1;\\
&\widetilde{R}_1 = \frac{1}{\widetilde{p}_{-1}}\,, \qquad \widetilde{R}_{k+1} = \frac{1}{\widetilde{p}_{-1}}\Big(\widetilde{R}_k - \sum_{i=0}^{k-1} \widetilde{p}_i \widetilde{R}_{k-i}\Big), \qquad k \geq 1;\\
&q_0 = \frac{1-f(\lambda)}{\lambda}\,, \qquad q_k = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda}\,, \qquad k \geq 1;\\
&\widetilde{q}_0 = \frac{1-\widetilde{f}(\lambda_1)}{\lambda_1}\,, \qquad \widetilde{q}_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \widetilde{q}_{k-i} - \frac{\widetilde{p}_{k-1}}{\lambda_1}\,, \qquad k \geq 1.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ НА ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ

Пусть $\tau(m) = \inf\{\,t \geq 0 :\ \xi(t) = 0\,\}$ обозначает первый период занятости для рассматриваемой системы обслуживания и

$$
\begin{aligned}
&\phi_n(t,\,k) = \mathbf{P}_{F,\lambda,n}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\} \qquad (\,1 \leq n \leq h_2;\ 1 \leq k \leq m+1\,);\\
&\psi_n(t,\,k) = \mathbf{P}_{\widetilde{F},\lambda_1,n}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\} \qquad (h_1+1 \leq n \leq m+1;\ 1 \leq k \leq m+1\,);\\
&\varphi_n(t,\,k) = \begin{cases} \phi_n(t,\,k), & 1 \leq n \leq h_2;\\ \psi_n(t,\,k), & h_2+1 \leq n \leq m+1;\end{cases}\\
&\Phi_n(s,\,k) = \int_0^\infty e^{-st}\varphi_n(t,\,k)\,dt, \qquad \widetilde{\Phi}_n(s,\,k) = \int_0^\infty e^{-st}\psi_n(t,\,k)\,dt, \qquad \mathrm{Re}\ s > 0.
\end{aligned}
$$

Введём обозначения:

$$g_n(s,k) = g(s,k)\overline{p}_{m-n}(s) + q_{k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{q}_{m-n+2}(s),$$
$$\widetilde{g}_n(s,k) = \widetilde{g}(s,k)\overline{\overline{p}}_{m-n}(s) + \widetilde{q}_{k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{\overline{q}}_{m-n+2}(s),$$
$$g(s,k) = I\{h_2+1 \le k \le m\} f(s)\widetilde{f}^{m-k}(s)\,\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,;$$
$$\widetilde{g}(s,k) = I\{h_2+1 \le k \le m\} \widetilde{f}^{m+1-k}(s)\,\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,.$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 либо 0, в зависимости от того, состоялось событие A или нет. Пусть также

$$A_n(s,k) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)\Big(f(s)\sum_{j=h_2+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j(s)\sum_{l=1}^{m-n-i-j}\widetilde{R}_l(s)\widetilde{g}_{n+i+j+l}(s,k) - g_{n+i}(s,k)\Big);$$

$$B_n(s) = f(s)\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)\sum_{j=h_2+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j(s)\widetilde{R}_{m-n-i-j}(s); \quad \widetilde{C}_n(s) = f(s)\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)L_{n+i}(s);$$

$$C_n(s) = R_{h_2-n}(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)p_{h_2-n-i}(s); \qquad D_n(s,k) = \sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)\widetilde{g}_{n+i}(s,k);$$

$$L_n(s) = \widetilde{f}^{m-h_2}(s)\overline{p}_{m-n}(s) - \widetilde{f}^{m+1-h_2}(s)\sum_{i=h_2+1-n}^{m-1-n} p_i(s)\sum_{j=1}^{m-n-i}\widetilde{R}_j(s)\overline{\overline{p}}_{m-n-i-j}(s);$$

$$M_n(s) = \widetilde{f}^{m+1-h_2}(s)\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)\overline{\overline{p}}_{m-n-i}(s); \qquad M(s) = 1 + M_{h_2}(s);$$

$$\Delta(s) = M(s)\Big(C_0(s)\big(\widetilde{R}_{m-h_1}(s) + B_{h_1}(s)\big) - C_{h_1}(s)B_0(s)\Big) - \widetilde{R}_{m-h_2}(s)\Big(C_0(s)\big(M_{h_1}(s) - \widetilde{C}_{h_1}(s)\big) + C_{h_1}(s)\widetilde{C}_0(s)\Big).$$

Теорема 1. *Для* $1 \le k \le m+1$ *и* $\mathrm{Re}\ s > 0$ *выполнены равенства*

$$\Phi_n(s,k) = C_n(s)\Phi_{h_2}(s,k) - \widetilde{C}_n(s)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,k) - B_n(s)\Phi_m(s,k) + A_n(s,k), \quad 1 \le n \le h_2-1; \tag{6}$$

$$\widetilde{\Phi}_n(s,k) = \widetilde{R}_{m-n}(s)\Phi_m(s,k) - M_n(s)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,k) - D_n(s,k), \quad h_1+1 \le n \le m-1; \tag{7}$$

$$\Phi_n(s,k) = \widetilde{\Phi}_n(s,k) = \widetilde{R}_{m-n}(s)\Phi_m(s,k) - M_n(s)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,k) - D_n(s,k), \quad h_2+1 \le n \le m-1, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_{h_2}(s,k) = \frac{1}{M(s)C_0(s)}\Big(\big(M(s)B_0(s) + \widetilde{R}_{m-h_2}(s)\widetilde{C}_0(s)\big)\Phi_m(s,k) - M(s)A_0(s,k) - \widetilde{C}_0(s)D_{h_2}(s,k)\Big), \\ \widetilde{\Phi}_{h_2}(s,k) = \frac{1}{M(s)}\Big(\widetilde{R}_{m-h_2}(s)\Phi_m(s,k) - D_{h_2}(s,k)\Big), \\ \Phi_m(s,k) = \frac{1}{\Delta(s)}\Big(M(s)\Big(C_0(s)\big(A_{h_1}(s,k) + D_{h_1}(s,k)\big) - C_{h_1}(s)A_0(s,k)\Big) - D_{h_2}(s,k)\Big(C_0(s)\big(M_{h_1}(s) - \widetilde{C}_{h_1}(s)\big) + C_{h_1}(s)\widetilde{C}_0(s)\Big)\Big).\end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство. Используя формулу полной вероятности, получим соотношения [8]

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(t,k) &= \sum_{i=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda)=i\}\,\varphi_{n+i-1}(t-x,\,k)\,dF(x)\\
&+\int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda)\geq m+1-n\}\int_0^{t-x}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-h_2}\widetilde{\beta}_i\in dv\Big\}\psi_{h_2}(t-x-v,\,k)\,dF(x)\\
&+I\{h_2+1\leq k\leq m\}\int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda)\geq m+1-n\}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-k}\widetilde{\beta}_i<t-x\leq\sum_{i=1}^{m+1-k}\widetilde{\beta}_i\Big\}\,dF(x)\\
&+\big(\mathbf{P}\{\eta(t,\lambda)=k-n\}+I\{k=m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t,\lambda)\geq m+2-n\}\big)\overline{F}(t),\quad 1\leq n\leq h_2;\\
\psi_n(t,k) &= \sum_{i=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda_1)=i\}\,\psi_{n+i-1}(t-x,\,k)\,d\widetilde{F}(x)\\
&+\int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda_1)\geq m+1-n\}\int_0^{t-x}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-h_2}\widetilde{\beta}_i\in dv\Big\}\psi_{h_2}(t-x-v,\,k)\,d\widetilde{F}(x)\\
&+I\{h_2+1\leq k\leq m\}\int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda_1)\geq m+1-n\}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-k}\widetilde{\beta}_i<t-x\leq\sum_{i=1}^{m+1-k}\widetilde{\beta}_i\Big\}\,d\widetilde{F}(x)\\
&+\big(\mathbf{P}\{\eta(t,\lambda_1)=k-n\}+I\{k=m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t,\lambda_1)\geq m+2-n\}\big)\overline{\widetilde{F}}(t),\ h_1+1\leq n\leq m.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Очевидно, что

$$\varphi_0(t,\,k)=0,\qquad \psi_{h_1}(t,\,k)=\varphi_{h_1}(t,\,k). \tag{11}$$

Перейдя в равенствах (10), (11) к преобразованиям Лапласа, с помощью соотношений (1)–(3) получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(s,\,k) &= f(s)\sum_{i=-1}^{m-n-1} p_i(s)\Phi_{n+i}(s,\,k)\\
&\quad + f(s)\widetilde{f}^{m-h_2}(s)\overline{p}_{m-n}(s)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,\,k)+g_n(s,\,k),\qquad 1\leq n\leq h_2;
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_n(s,\,k) &= \widetilde{f}(s)\sum_{i=-1}^{m-n-1} \widetilde{p}_i(s)\widetilde{\Phi}_{n+i}(s,\,k)\\
&\quad + \widetilde{f}^{m+1-h_2}(s)\overline{\widetilde{p}}_{m-n}(s)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,\,k)+\widetilde{g}_n(s,\,k),\qquad h_1+1\leq n\leq m
\end{aligned}
\tag{13}
$$

с граничными условиями

$$\Phi_0(s,\,k)=0,\qquad \widetilde{\Phi}_{h_1}(s,\,k)=\Phi_{h_1}(s,\,k). \tag{14}$$

Используя лемму 1 работы [6], решения системы уравнений (13) представим в виде

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_n(s,\,k) &= \widetilde{R}_{m-n}(s)\Phi_m(s,\,k)-\widetilde{f}^{m+1-h_2}(s)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,\,k)\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)\overline{\widetilde{p}}_{m-n-i}(s)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)\widetilde{g}_{n+i}(s,k),\qquad h_1\leq n\leq m-1.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Итак, равенства (7) и (8) получены. С помощью (15) уравнения (12) приводим к виду

$$\Phi_n(s,\,k) = f(s)\sum_{i=-1}^{h_2-n-1} p_i(s)\Phi_{n+i}(s,\,k) + f(s)L_n(s)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,\,k) + f(s)p_{h_2-n}(s)\Phi_{h_2}(s,\,k)$$
$$+\, f(s)\sum_{i=h_2+1-n}^{m-1-n} p_i(s)\left(\Phi_m(s,\,k)\widetilde{R}_{m-n-i}(s) - \sum_{j=1}^{m-n-i}\widetilde{R}_j(s)\widetilde{g}_{n+i+j}(s,k)\right) + g_n(s,k), \quad 1 \le n \le h_2,$$

позволяющему снова применить лемму 1 из [6] и найти решения системы (12) в виде (6).

С помощью равенства (7) получаем выражение (9) для $\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,\,k)$. Положив $n = 0$ в (6) и $n = h_1$ — в равенствах (6) и (7), с учётом условий (14) приходим к системе двух линейных уравнений, решив которую получаем выражения (9) для $\Phi_{h_2}(s,\,k)$ и $\Phi_m(s,\,k)$. Теорема доказана. $\square$

5. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если система начинает работать в момент поступления первой группы заявок, то

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n\Phi_n(s,\,k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}(s,\,k). \tag{16}$$

Спомощью формулы полной вероятности получаем:

$$\varphi_{m+1}(t,k) = \int_0^t\int_0^{t-x}\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m-h_2}\widetilde{\beta}_i \in dv\right\}\psi_{h_2}(t-x-v,\,k)\,d\widetilde{F}(x)$$
$$+I\{h_2+1 \le k \le m\}\int_0^t \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m-k}\widetilde{\beta}_i < t-x \le \sum_{i=1}^{m+1-k}\widetilde{\beta}_i\right\}d\widetilde{F}(x) + I\{k = m+1\}\overline{\widetilde{F}}(t).$$

Преобразование Лапласа от $\varphi_{m+1}(t,\,k)$ представляется в виде

$$\Phi_{m+1}(s,\,k) = \widetilde{f}^{m-h_2+1}(s)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,\,k) + I\{h_2+1 \le k \le m+1\}\widetilde{f}^{m-k+1}(s)\,\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,. \tag{17}$$

Используя соотношения (6), (8) и (17), можем подробно расписать равенство (16)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt &= \left(\sum_{n=1}^{h_2-1} a_nC_n(s) + a_{h_2}\right)\Phi_{h_2}(s,\,k)\\ &- \left(\sum_{n=1}^{h_2-1} a_nB_n(s) - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_n\widetilde{R}_{m-n}(s) - a_m\right)\Phi_m(s,\,k) - \left(\sum_{n=1}^{h_2-1} a_n\widetilde{C}_n(s)\right.\\ &\left. + \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_nM_n(s) - \overline{a}_{m+1}\widetilde{f}^{m+1-h_2}(s)\right)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,\,k) + \sum_{n=1}^{h_2-1} a_nA_n(s,\,k)\\ &- \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_nD_n(s,\,k) + \overline{a}_{m+1}I\{h_2+1 \le k \le m+1\}\widetilde{f}^{m-k+1}(s)\,\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Для определения $\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt$ необходимо перейти в равенстве (18) к суммированию по k от 1 до $m+1$. Убедившись, что

$$g_n(s)=\sum_{k=1}^{m+1} g_n(s,\,k)=f(s)\,\frac{1-\widetilde{f}^{m-h_2}(s)}{s}\,\overline{p}_{m-n}(s)+\frac{1-f(s)}{s}\,;$$

$$\widetilde{g}_n(s)=\sum_{k=1}^{m+1} \widetilde{g}_n(s,\,k)=\widetilde{f}(s)\,\frac{1-\widetilde{f}^{m-h_2}(s)}{s}\,\overline{\overline{p}}_{m-n}(s)+\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,;$$

$$A_n(s)=\sum_{k=1}^{m+1} A_n(s,\,k)=\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s)\biggl(f(s)\sum_{j=h_2+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j(s)\sum_{l=1}^{m-n-i-j}\widetilde{R}_l(s)\widetilde{g}_{n+i+j+l}(s)-g_{n+i}(s)\biggr);$$

$$D_n(s)=\sum_{k=1}^{m+1} D_n(s,k)=\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i(s)\widetilde{g}_{n+i}(s);\qquad \Phi_{h_2}(s)=\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_{h_2}(s,\,k)$$

$$=\frac{1}{M(s)C_0(s)}\Bigl(\bigl(M(s)B_0(s)+\widetilde{R}_{m-h_2}(s)\widetilde{C}_0(s)\bigr)\Phi_m(s)-M(s)A_0(s)-\widetilde{C}_0(s)D_{h_2}(s)\Bigr);$$

$$\widetilde{\Phi}_{h_2}(s)=\sum_{k=1}^{m+1}\widetilde{\Phi}_{h_2}(s,\,k)=\frac{1}{M(s)}\Bigl(\widetilde{R}_{m-h_2}(s)\Phi_m(s)-D_{h_2}(s)\Bigr),$$

$$\Phi_m(s)=\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_m(s,k)=\frac{1}{\Delta(s)}\biggl(M(s)\Bigl(C_0(s)\bigl(A_{h_1}(s)+D_{h_1}(s)\bigr)-C_{h_1}(s)A_0(s)\Bigr)$$
$$-D_{h_2}(s)\Bigl(C_0(s)\bigl(M_{h_1}(s)-\widetilde{C}_{h_1}(s)\bigr)+C_{h_1}(s)\widetilde{C}_0(s)\Bigr)\biggr),$$

из (18) получаем выражение для преобразования Лапласа от функции распределения периода занятости

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt&=\biggl(\sum_{n=1}^{h_2-1}a_nC_n(s)+a_{h_2}\biggr)\Phi_{h_2}(s)\\&-\biggl(\sum_{n=1}^{h_2-1}a_nB_n(s)-\sum_{n=h_2+1}^{m-1}a_n\widetilde{R}_{m-n}(s)-a_m\biggr)\Phi_m(s)\\&-\biggl(\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\widetilde{C}_n(s)+\sum_{n=h_2+1}^{m-1}a_nM_n(s)-\overline{a}_{m+1}\widetilde{f}^{m+1-h_2}(s)\biggr)\widetilde{\Phi}_{h_2}(s)\\&+\sum_{n=1}^{h_2-1}a_nA_n(s)-\sum_{n=h_2+1}^{m-1}a_nD_n(s)+\overline{a}_{m+1}\,\frac{1-\widetilde{f}^{m+1-h_2}(s)}{s}\,.\end{aligned}\tag{19}$$

Перейдя в равенстве (19) к пределу при $s\to+0$, получим выражение для средней продолжительности периода занятости изучаемой системы обслуживания. Для вычисления этого предела используем последовательности, определённые равенствами (4), (5), равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}R_i\overline{p}_{n-i}=R_n-1$, и учитываем предельные соотношения

$$\lim_{s\to+0}\frac{1-f(s)}{s}=M;\qquad \lim_{s\to+0}\frac{1-\widetilde{f}^n(s)}{s}=n\widetilde{M}\quad(n\ge1);$$

$$\lim_{s\to+0}g_n(s)=M+(m-h_2)\widetilde{M}\overline{p}_{m-n};\qquad \lim_{s\to+0}\widetilde{g}_n(s)=\widetilde{M}\bigl(1+(m-h_2)\overline{\overline{p}}_{m-n}\bigr);$$

$$A_n = \lim_{s\to+0} A_n(s) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i\biggl(\widetilde{M}\sum_{j=h_2+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j\biggl(\sum_{l=1}^{m-n-i-j}\widetilde{R}_l + (m-h_2)\bigl(\widetilde{R}_{m-n-i-j}-1\bigr)\biggr)$$
$$-M-(m-h_2)\widetilde{M}\overline{p}_{m-n-i}\biggr); \qquad B_n = \lim_{s\to+0} B_n(s) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \sum_{j=h_2+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j\widetilde{R}_{m-n-i-j};$$
$$\lim_{s\to+0} C_n(s) = p_{-1}R_{h_2+1-n}; \quad \lim_{s\to+0}\widetilde{C}_n(s) = p_{-1}R_{h_2+1-n} - B_n - 1; \quad \lim_{s\to+0} M(s) = \widetilde{R}_{m-h_2};$$
$$D_n = \lim_{s\to+0} D_n(s) = \widetilde{M}\biggl(\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{R}_i + (m-h_2)\bigl(\widetilde{R}_{m-n}-1\bigr)\biggr); \quad \lim_{s\to+0} M_n(s) = \widetilde{R}_{m-n}-1.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Средняя продолжительность периода занятости системы определяется в виде*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\tau(m) = \sum_{n=1}^{h_2-1} a_nA_n - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_nD_n - A_0 + AD_{h_2}\\ + R\bigl(A_{h_1} + D_{h_1} - \widetilde{R}_{m-h_2}^{-1}D_{h_2}(\widetilde{R}_{m-h_1}+B_{h_1})\bigr) + (m+1-h_2)\widetilde{M}\overline{a}_{m+1},\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$A = \widetilde{R}_{m-h_2}^{-1}\biggl(B_0 - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_nB_n + \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_n\widetilde{R}_{m-n} + a_m\biggr); \;\; R = R_{h_2-h_1+1}^{-1}\biggl(R_{h_2+1} - \sum_{n=1}^{h_2} a_nR_{h_2+1-n}\biggr).$$

Рассуждая так же, как в работе [12, с. 169–170] и пользуясь узловой теоремой восстановления [13, с. 46], приходим к равенствам

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k\,\} = \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{E}\,\tau(m)}\int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(u)=k,\ \tau(m)\ge u\,\}\,du, \qquad 1\le k\le m+1;\\ &\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\,\xi(t)=0\,\} = \frac{\lambda}{1+\lambda\,\mathbf{E}\,\tau(m)}\int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m)<u,\ \tau(m)+\xi_1\ge u\,\}\,du.\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь ξ_1 — показательно распределённая случайная величина с параметром λ (промежуток времени от момента освобождения системы до момента поступления очередной группы заявок).

Поскольку $\mathbf{P}\{\,\tau(m)<u,\ \tau(m)+\xi_1\ge u\,\} = \mathbf{P}\{\,\tau(m)+\xi_1\ge u\,\} - \mathbf{P}\{\,\tau(m)\ge u\,\}$, то

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m)<u,\ \tau(m)+\xi_1\ge u\,\}\,du = \frac{1}{\lambda}\,. \tag{22}$$

Перейдя в равенстве (18) к пределу при $s\to+0$, получим соотношение

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{h_2-1} a_nA_n(k) - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_nD_n(k) - A_0(k) + AD_{h_2}(k)\\ + R\Bigl(A_{h_1}(k) + D_{h_1}(k) - \widetilde{R}_{m-h_2}^{-1}\bigl(\widetilde{R}_{m-h_1}+B_{h_1}\bigr)D_{h_2}(k)\Bigr)\\ + \widetilde{M}\overline{a}_{m+1}I\{h_2+1\le k\le m+1\},\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$
\begin{aligned}
A_n(k) = \lim_{s\to+0} A_n(s,k) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \Bigg(\sum_{j=h_2+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j \Bigg(\sum_{l=1}^{m-n-i-j} \widetilde{R}_l \Big(\widetilde{q}_{k-n-i-j-l} \\
+ I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{q}}_{m+2-n-i-j-l} \Big) + I\{h_2+1 \le k \le m\} \widetilde{M} \big(\widetilde{R}_{m-n-i-j} - 1 \big) \Bigg) \\
- q_{k-n-i} - I\{h_2+1 \le k \le m\} \widetilde{M} \overline{p}_{m-n-i} - I\{k=m+1\} \overline{q}_{m+2-n-i} \Bigg);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_n(k) = \lim_{s\to+0} D_n(s,k) = \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i \Big(\widetilde{q}_{k-n-i} + I\{k=m+1\} \overline{\widetilde{q}}_{m+2-n-i} \Big) \\
+ I\{h_2+1 \le k \le m\} \widetilde{M} \big(\widetilde{R}_{m-n} - 1 \big).
\end{aligned}
$$

Введём обозначения: $\rho_k(m) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k\,\},\ \ 0 \le k \le m+1;$

$$
G_n(k) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \Bigg(\sum_{j=h_2+1-n-i}^{k-1-n-i} p_j \sum_{l=1}^{k-n-i-j} \widetilde{R}_l \widetilde{q}_{k-n-i-j-l} + \widetilde{M} \sum_{j=h_2+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j \big(\widetilde{R}_{m-n-i-j} - 1 \big) \Bigg);
$$

$$
H_n(k) = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \Big(q_{k-n-i} + \widetilde{M} \overline{p}_{m-n-i} \Big); \qquad \widetilde{H}_n(k) = \sum_{i=1}^{k-n} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-n-i} + \widetilde{M} \big(\widetilde{R}_{m-n} - 1 \big);
$$

$$
Q_n = \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \Bigg(\overline{q}_{m+1-n-i} - \sum_{j=h_2+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j \sum_{l=1}^{m-n-i-j} \widetilde{R}_l \overline{\widetilde{q}}_{m+1-n-i-j-l} \Bigg).
$$

Учитывая равенства (21)–(23), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Стационарное распределение числа заявок в системе определяется в виде:*

$$
\begin{aligned}
&\rho_0(m) = \frac{1}{1 + \lambda\, \mathbf{E}\, \tau(m)}\,; \\
&\rho_k(m) = \lambda \rho_0(m) \Bigg(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \Bigg), \qquad 1 \le k \le h_1; \\
&\rho_k(m) = \lambda \rho_0(m) \Bigg(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \\
&\qquad - R \Bigg(\sum_{i=1}^{k-h_1} R_i q_{k-h_1-i} - \sum_{i=1}^{k-h_1} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-h_1-i} \Bigg) \Bigg), \qquad h_1+1 \le k \le h_2; \qquad (24) \\
&\rho_k(m) = \lambda \rho_0(m) \Bigg(H_0(k) - G_0(k) + R \Big(G_{h_1}(k) + \widetilde{H}_{h_1}(k) - H_{h_1}(k) \\
&\qquad - \widetilde{R}^{-1}_{m-h_2} \big(\widetilde{R}_{m-h_1} + B_{h_1} \big) \widetilde{H}_{h_2}(k) \Big) + A \widetilde{H}_{h_2}(k) + \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \big(G_n(k) - H_n(k) \big) \\
&\qquad - \sum_{n=h_2+1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} \widetilde{R}_i \widetilde{q}_{k-n-i} - \widetilde{M} \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_n \big(\widetilde{R}_{m-n} - 1 \big) + \widetilde{M} \overline{a}_{m+1} \Bigg), \quad h_2+1 \le k \le m;
\end{aligned}
$$

$$\rho_{m+1}(m) = \lambda\rho_0(m)\Big(Q_0 - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n Q_n - R\Big(Q_{h_1} - \sum_{i=1}^{m-h_1} \widetilde{R}_i \overline{\widetilde{q}}_{m+1-h_1-i}\Big)$$
$$+ \Big(A - R\big(\widetilde{R}_{m-h_1} + B_{h_1}\big)\Big) \sum_{i=1}^{m-h_2} \widetilde{R}_i \overline{\widetilde{q}}_{m+1-h_2-i} - \sum_{n=h_2+1}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} \widetilde{R}_i \overline{\widetilde{q}}_{m+1-n-i} + \widetilde{M}\overline{a}_{m+1}\Big).$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Пользуясь равенством (20), выражение для средней продолжительности периода занятости можно представить в виде $\mathbf{E}\,\tau(m) = MT(m) + \widetilde{M}\widetilde{T}(m)$. Тогда среднее время обслуживания одной заявки найдём по формуле

$$\overline{M} = \frac{\mathbf{E}\,\tau(m)}{T(m) + \widetilde{T}(m)}\,.$$

Формулу для вероятности обслуживания $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ получим как отношение среднего числа обслуженных заявок к среднему числу прибывших за единицу времени

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) = \frac{\big(1-\rho_0(m)\big)\big(T(m)+\widetilde{T}(m)\big)}{\lambda e_a \mathbf{E}\,\tau(m)} = \frac{\rho_0(m)\big(T(m)+\widetilde{T}(m)\big)}{e_a}\,. \tag{25}$$

Стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{E}\,Q(m)$ и среднее время ожидания обслуживания $\mathbf{E}\,w(m)$ находим по формулам

$$\mathbf{E}\,Q(m) = \sum_{k=1}^{m} k\rho_{k+1}(m); \qquad \mathbf{E}\,w(m) = \frac{\mathbf{E}\,Q(m)}{\lambda e_a \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)}\,. \tag{26}$$

7. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Предположим, что $m = 9$, $h_1 = 3$, $h_2 = 6$, заявки могут прибывать только по одной или по две ($a_1 = 0,75$, $a_2 = 0,25$), $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, время обслуживания равномерно распределено: в нормальном режиме — на отрезке [1/3; 1] со средним значением $M = 2/3$, а в режимах частичной и полной блокировки — на отрезке [0; 2/3] со средним значением $\widetilde{M} = 1/3$. Тогда средняя продолжительность периода занятости $\mathbf{E}\,\tau(m)$, найденная по формуле (20), составляет 45,409.

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок в системе

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5
$\rho_k(m)$ согласно (24)	0,01089	0,02752	0,06278	0,13723	0,17485	0,18480
$\rho_k(m)$ (GPSS World)	0,01096	0,02758	0,06283	0,13763	0,17432	0,18470

Число заявок (k)	6	7	8	9	10
$\rho_k(m)$ согласно (24)	0,16925	0,12063	0,06926	0,03284	0,00996
$\rho_k(m)$ (GPSS World)	0,16940	0,12026	0,06930	0,03297	0,01006

Во второй строке таблицы 1 представлены вероятности $\rho_k(m)$, вычисленные по формулам (24). В этой же таблице для сравнения приведены значения соответствующих вероятностей, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [14] для значения времени моделирования $t = 10^6$. Значения стационарных характеристик системы, найденные по формулам (25) и (26), а также вычисленные с помощью GPSS World, приведены в таблице 2.

Таблица 2. Стационарные характеристики системы

Характеристика	$\mathbf{P}_{\rm sv}(m)$	$\mathbf{E}\,Q(m)$	$\mathbf{E}\,w(m)$
Аналитическое значение	0,79625	4,00816	2,01352
Значение согл. GPSS World	0,796	4,008	2,014

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преимущество предложенного алгоритма вычисления стационарных характеристик состоит в том, что рекуррентные соотношения (5), служащие для определения последовательностей $\{p_k\}$, $\{\widetilde{p}_k\}$, $\{q_k\}$, $\{\widetilde{q}_k\}$, $\{R_k\}$, $\{\widetilde{R}_k\}$, явно не зависят от объёма накопителя m и значений порогов h_1 и h_2, а зависят только от параметров входящего потока и функций распределения времени обслуживания $F(x)$ и $\widetilde{F}(x)$. Поэтому в случае изменения значений параметров m, h_1 и h_2 нет необходимости вычислять заново значения этих последовательностей. Полученные соотношения могут быть использованы для решения оптимизационных задач, связанных с гистерезисным механизмом управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОГРАММА ДЛЯ GPSS WORLD

```
Lam1 EQU 1        ; значение λ1
Lam2 EQU 1        ; значение λ2
Em EQU 9        ; объём накопителя
AH1 EQU 3        ; значение порога h1
AH2 EQU 6        ; значение порога h2
PSV VARIABLE N$L3/(N$L0+N$L02)        ; вероятность обслуживания
TSIM EQU 1000000        ; время моделирования
DISTR TABLE (F$KAN+Q$QUE) 0,1,11        ; гистограмма распределения числа заявок
GENERATE 1
TABULATE DISTR        ; вычислять распределение числа заявок
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam1)))        ; показательное распределение с параметром λ1
TRANSFER 750,,L0        ; задание вероятностей a1 и a2 для первого потока
SPLIT 2,L0        ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam2)))        ; показательное распределение с параметром λ2
TRANSFER 750,,L02        ; задание вероятностей a1 и a2 для второго потока
SPLIT 2,L02        ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
L02 GATE LS KEY2,OUT        ; включён ли второй ключ блокировки входа?
TRANSFER ,LQ
L0 GATE LS KEY1,OUT        ; включён ли первый ключ блокировки входа?
LQ QUEUE QUE        ; занять место в очереди
TEST E Q$QUE,Em,L1        ; условие ограничения длины очереди
LOGIC R KEY1        ; выключить первый ключ
LOGIC R KEY2        ; выключить второй ключ
L1 SEIZE KAN        ; приступить к обслуживанию
DEPART QUE        ; покинуть очередь
```

```
LH2 TEST E Q$QUE,(AH2-1),LH1   ; условие переключения на режим частичной блокировки
LOGIC S KEY1        ; включить первый ключ
LH1 TEST LE Q$QUE,(AH1-1),L2   ; условие переключения на нормальный режим
LOGIC S KEY2        ; включить второй ключ
ADVANCE (Uniform(5,(1/3),1))   ; равномерное распределение (функция F(x))
TRANSFER ,L3
L2 TEST G (F$KAN+Q$QUE),AH2,LADV   ; условие переключения на режим полной блокировки
LOGIC R KEY2        ; выключить второй ключ
ADVANCE (Uniform(5,0,(2/3)))   ; равномерное распределение (функция F̃(x))
TRANSFER ,L3
LADV GATE LS KEY2,L4        ; включён ли второй ключ блокировки входа?
ADVANCE (Uniform(5,(1/3),1))   ; равномерное распределение (функция F(x))
TRANSFER ,L3
L4 ADVANCE (Uniform(5,0,(2/3)))   ; равномерное распределение (функция F̃(x))
L3 RELEASE KAN        ; покинуть канал
OUT TERMINATE
GENERATE ,,,1
LOGIC S KEY1        ; включить первый ключ
LOGIC S KEY2        ; включить второй ключ
TERMINATE
GENERATE TSIM        ; реализовать время моделирования
SAVEVALUE PSV,V$PSV        ; записать вероятность обслуживания
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абаев П. О., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е. Гистерезисное управление сигнальной нагрузкой в сети SIP-серверов. *Вестник Российского университета дружбы народов. Математика. Информатика. Физика*, 2011, № 4, стр. 54–71.

2. Abaev P., Gaidamaka Yu., Samouylov K. Queuing Model for Loss-Based Overload Control in a SIP Server Using a Hysteretic Technique. In: *Lecture Notes in Computer Science*, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012, vol. 7469, pp. 371–378.

3. Abaev P., Gaidamaka Yu., Samouylov K. Modeling of Hysteretic Signaling Load Control in Next Generation Networks. In: *Lecture Notes in Computer Science*, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012, vol. 7469, pp. 440–452.

4. Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M}_2|\mathrm{G}|1|\mathrm{r}$ с гистерезисной политикой управления интенсивностью входящего потока. *Информационные процессы*, 2013, т. 13, № 3, стр. 125–140.

5. Жерновый К. Ю. Исследование системы $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с переключениями режимов обслуживания и восстанавливающей блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2011, т. 11, № 2, стр. 203–224.

6. Жерновый К. Ю., Жерновый Ю. В. Система $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с двухпороговой гистерезисной стратегией переключения интенсивности обслуживания. *Информационные процессы*, 2012, т. 12, № 2, стр. 127–140.

7. Zhernovyi Yu.V. Stationary Characteristics of $\mathrm{M}^\mathrm{X}/\mathrm{M}/1$ Systems with Hysteretic Switching of the Service Intensity. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2013, vol. 58, № 6, pp. 613–627.

8. Жерновый Ю. В., Жерновый К. Ю. Стационарные характеристики системы $\mathrm{M}_2^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\mathrm{n}$ с гистерезисным управлением интенсивностью входящего потока. *Информационные процессы*, 2013, т. 13, № 4, стр. 362–373.

9. Жерновый Ю. В., Жерновый К. Ю. Вероятностные характеристики системы $\mathrm{M}_2^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с пороговым управлением длительностью обслуживания и интенсивностью входящего потока. *Информационные процессы*, 2014, т. 14, № 1, стр. 64–78.

10. Бочаров П. П., Печинкин А. В. *Теория массового обслуживания.* М.: РУДН, 1995.

11. Королюк В. С. *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.* Киев: Наукова думка, 1975.

12. Жерновый К. Ю. Исследование системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 2, стр. 159-180.

13. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. *Теория массового обслуживания.* М.: Высшая школа, 1982.

14. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.

Probabilistic characteristics of the $\mathrm{M}_2^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ queue with a two-loop hysteretic control of service time and arrival rate

Zhernovyi Yu. V., Zhernovyi K. Yu.

An $\mathrm{M}_2^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ queuing system with arrival of customer batches is considered. In the system a threshold mechanism with two hysteretic loops is applied to control the service time and input flow intensity. The system receives two independent flows of customers, one of which is blocked in an overload mode. Switching of operation modes is performed at the instants when the service of customers is completed. Complete blocking of the input flow begins when the queue length reaches the number m. To determine the probability characteristics of the system we propose an approach based on V. S. Korolyuk's potential method. Laplace transforms for the distributions of the number of customers in the system during the busy period and for the distribution function of the busy period are found. The average duration of the busy period is obtained. Formulas for the stationary distribution of the number of customers in the system, for the probability of service and for the stationary characteristics of the queue are established. The obtained results are verified with the help of simulation model constructed with the assistance of GPSS World tools.

KEYWORDS: queueing system, two independent flows of customers, batch arrival of customers, hysteretic control with two loops, busy period, distribution of the number of customers.