

## Обобщённая каскадная система с вложенными пространственно-временными кодами для систем ММО

А.А. Крещук\*, В.В. Зяблов\*

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*

Поступила в редколлегию 16.06.2014

**Аннотация**—Системами ММО (англ. Multiple Input Multiple Output) называются системы связи с несколькими передающими и принимающими антеннами. В данной работе для них предложена новая обобщённая каскадная сигнально-кодовая конструкция. Внутренними её кодами являются вложенные Golden коды. Внешними её кодами являются произведения кодов Рида-Соломона. Предложены новые алгоритмы декодирования внутренних кодов, внешних кодов и самой обобщённой сигнально-кодовой конструкции. Декодер пространственно-временных Golden кодов позволяет получить меру надёжности некоторых символов без увеличения количества арифметических операций. Декодер внешних кодов-произведений позволяет избавиться от «полки» на кривой вероятности ошибки. Кроме того, были получены нижние границы на вероятность неправильного декодирования итеративного декодера кодов-произведений. Новый декодер обобщённой каскадной конструкции имеет лучшую корректирующую способность, чем имеющиеся. Компьютерное моделирование показало эффективность предложенной конструкции и алгоритмов декодирования.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** обобщённые каскадные коды, коды-произведения, многоантенные системы, ММО, пространственно-временной код.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Сигнально-кодовые конструкции для систем с многими приёмными и передающими антеннами исследуются на протяжении более 15 лет. Основополагающей работой в данной области можно считать [1]. Предложенная в ней конструкция подходила лишь для двух передающих антенн и передавала один символ модуляции за один временной интервал. В [13] данная конструкция была обобщена на случай произвольного числа передающих антенн. Также там было доказано, что никакая ортогональный пространственно-временной код не может иметь скорость выше одного символа модуляции за один временной интервал.

В дальнейшем было представлено множество работ, посвящённых построению неортогональных пространственных кодов высокой скорости (например, [4]) и развитию декодеров для них. Для неортогональных пространственно-временных кодов скорость ограничена  $\min\{M, N\}$  символами модуляции за один временной интервал, где  $M$  и  $N$  — число передающих и приёмных антенн, соответственно. Данная граница достигается, например, Golden кодом [2]. Для него  $M = 2, N \geq 2$ . Одно кодовое слово при этом занимает два временных интервала. Существуют обобщения Golden кода на большее число антенн [10]. Подробное описание пространственно-временных кодов приведено в разделе 3.

Обобщённые сигнально-кодовые конструкции, основанные на пространственно-временных кодах, значительно слабее представлены в литературе. Примером такой конструкции является [9]. В нём предложена обобщённая сигнально-кодовая конструкция, внутренним кодом

которой является Golden код. Однако данная конструкция имеет малую длину, а потому не позволяет достичь вероятностей ошибки до  $10^{-8}$  при практических отношениях сигнал-шум.

Задачей данной работы является проектирование сигнально-кодовой конструкции для систем многоантенной передачи и приёма и алгоритма её декодирования, достигающего вероятности ошибочного декодирования  $10^{-8}$  на блок при практических отношениях сигнал-шум и имеющего разумную сложность. Для решения этой задачи предлагается использовать обобщённые каскадные системы.

В данной работе предлагается новая обобщённая каскадная сигнально-кодовая конструкция, внутренними кодами которой являются Golden коды, а внешними — произведения кодов Рида-Соломона. Предложенная система позволяет достичь вероятности ошибки  $10^{-8}$  на блок в Релеевском канале при отношении сигнал-шум 13 дБ на бит. Скорость предложенной конструкции составляет 5,5 бит на временной интервал. Более подробное описание обобщённых каскадных систем приведено в разделе 2.

Коды-произведения являются частным случаем каскадных кодов. В предложенной конструкции они используются благодаря простому алгоритму декодирования, высокой корректирующей способности и очень малой вероятностью ошибочного декодирования (по сравнению с вероятностью отказа от декодирования). Одним из самых популярных алгоритмов их декодирования является итеративный декодер. В данной работе предложено его усовершенствование, улучшающее его корректирующую способность при больших отношениях сигнал-шум за счёт внесения стираний. Более подробно коды-произведения описаны в разделе 4.

В предложенной конструкции декодер внутренних кодов может получить меру надёжности своего решения, однако декодеры внешних кодов имеют лишь жёсткий вход. В данной работе предлагается новый метод вычисления меры надёжности символов и алгоритм декодирования обобщённой каскадной конструкции, позволяющий эти надёжности использовать с декодерами внешних кодов, исправляющих ошибки и стирания. Предложенная конструкция и алгоритм её декодирования подробно описаны в разделе 6.

В разделе 6.3 приведены результаты моделирования предложенной системы и их анализ.

## 2. ОБОБЩЁННЫЕ КАСКАДНЫЕ КОДЫ

Обобщённые каскадные коды являются кодовой комбинацией из двух систем кодов компонентов. Одна из этих систем называется системой внутренних кодов, другая — системой внешних кодов. Требуется, чтобы система внутренних кодов была вложенной, и чтобы указанные системы содержали одинаковое число кодов. В данной работе мы предлагаем обобщённую каскадную систему содержащую два внутренних кода и два внешних кода. При этом внешние коды имеют длину  $n = 1024$  и построены над полем  $GF(2^8)$ .

Система внутренних кодов является вложенной, то есть каждый следящий код является подкодом предыдущего. В предложенной конструкции внутренних кодов всего два: некий код и его подкод. Воспользуемся следующим описанием: часть информационных символов первого кода задают смежный класс второго кода, а остальные задают кодовое слово второго кода. Первые мы будем называть информационными символами первого слоя, а вторые — информационными символами второго слоя.

Таким образом при декодировании внутреннего кода сначала декодируется слово первого кода. Затем с помощью полученного кодового слова мы вычисляем представителя смежного класса и вычитаем его из полученного слова. После этого мы можем декодировать слово второго внутреннего кода.

Опишем «способ объединения» внутренних и внешних кодов. В случае, когда внутренние и внешние коды имеют один алфавит, информационный символ  $i$ -го слоя  $j$ -го внутреннего кода

равны  $j$ -у кодовому символу  $i$ -го внешнего кода. Мы ослабим данное ограничение, потребовав лишь, чтобы алфавит информационных символов внутреннего кода и алфавит внешнего кода были равноможны. Тогда мы сможем использовать взаимно-однозначное отображение между ними.

Для понимания требований к внутренним и внешним кодам необходимо описать общую структуру алгоритма декодирования. Полностью этот алгоритм будет описан далее, в разделе 6.2. При декодировании мы сначала определим кодовые символы внешнего кода с помощью декодирования внутреннего кода. После этого мы исправим все ошибки в слове внешнего кода и используем полученные символы для вычисления «поправки» к принятому слову внутренних кодов. Затем мы перейдём к декодированию следующего слоя. Если декодирование внешнего кода закончится отказом или ошибкой, дальнейшее декодирование не сможет привести к правильному кодовому слову. Другими словами для правильного декодирования обобщённой каскадной конструкции необходимо правильное декодирование всех внешних кодов.

Как известно, кодовое расстояние кода не превышает кодового расстояния любого его подкода. В предлагаемой конструкции кодовое расстояние второго внутреннего кода (подкода первого внутреннего кода) значительно больше кодового расстояния первого внутреннего кода.

Важным этапом построения хорошей обобщённой каскадной системы является «распределение» избыточности между внешними кодами, то есть выбор скоростей внешних кодов при фиксированной скорости обобщённой каскадной конструкции. Точное решение данной задачи очень трудно построить, поэтому в данной работе мы будем пользоваться простым эмпирическим критерием: вероятность правильного декодирования  $i$ -го внешнего кода при условии правильного декодирования всех предыдущих внешних кодов должна быть ограничена константой  $\epsilon$  не зависящей от  $i$ .

### 3. ВНУТРЕННИЕ КОДЫ

#### 3.1. Модель канала

Канал с многими входами  $c_n \in \mathbb{C}, n = \overline{1, N}$  и выходами  $r_m \in \mathbb{C}, m = \overline{1, M}$  определяется следующим выражением:

$$r_m = \sum_{n=1}^N \alpha_{n,m} c_n + \eta_m, \quad (1)$$

где  $\alpha_{n,m} \in \mathbb{C}$  — коэффициент передачи канала, а  $\eta_m \in \mathbb{C}$  — шум. В данной работе  $\alpha_{n,m}$  и  $\eta_m$  — независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним, при чём средняя мощность  $\alpha_{n,m}$  равна 1.

В данной работе рассматривается случай, когда коэффициенты передачи канала известны на приёмнике, но не на передатчике.

Так же, как и в случае алгебраических кодов, мы будем использовать символы, переданные за  $T$  временных отсчётов, для передачи одного кодового слова. При этом мы предполагаем стационарность канала на времени передачи одного кодового слова. Таким образом мы можем описать канал следующим выражением:

$$r_{t,m} = \sum_{n=1}^N \alpha_{n,m} c_{t,n} + \eta_{t,m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

Такой канал называется Релеевским каналом или каналом с Релеевскими замираниями. Подмножество передаваемых слов называется пространственно-временным кодом.

Для описания свойств данного канала, нам необходимо представить (2) в матричной форме. Когда мы описывать критерии проектирования кодов, мы будем использовать более естественную матричную форму, в которой кодовые слова являются матрицами размера  $T \times N$ . Однако, для описания алгебраической структуры кода и алгоритма декодирования мы приведём другое представление канала, в котором кодовые слова являются столбцами высоты  $NT$ .

В простом матричном представлении канала мы вводим следующие матрицы: матрицы кодовых слов  $\mathbf{C} = \|c_{t,n}\|$  размера  $T \times N$ , матрица коэффициентов передачи канала  $\mathbf{H} = \|\alpha_{n,m}\|$  размера  $N \times M$ , матрица полученного слова  $\mathbf{r} = \|r_{t,m}\|$  размера  $T \times M$  и матрица шума  $\mathcal{N} = \|\eta_{t,m}\|$  размера  $T \times M$ . Таким образом, выражение (2) можно представить в виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H} + \mathcal{N} \tag{3}$$

При декодировании по максимуму правдоподобия необходимо минимизировать выражение [7, раздел 3.2]:

$$\min_{\mathbf{C} \in \mathcal{C}} \text{Tr}[(\mathbf{r} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{H})^H (\mathbf{r} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{H})], \tag{4}$$

где  $\mathcal{C}$  — пространственно-временной код.

В [7, Глава 3] и [8, Глава 3] описано несколько критериев проектирования кодов, и мы не будем приводить их в данной работе. Мы используем широко известный Golden код [2], параметры которого уже подробно изучены в литературе.

### 3.2. Решётки и их свойства

В данном разделе используются обозначения, пересекающиеся с обозначениями из предыдущего раздела. Однако эти обозначения относятся к разным объектам, хотя и изоморфным между собой. Для того, чтобы показать удобство описания и исследования пространственно-временных кодов в виде решёток, запишем (2) в матричной форме, отличной от (3). Для этого представим  $c_{t,n}$  в виде столбца  $c_{2tN+2n} = \text{Re } c_{t,n}$ ,  $c_{2tN+2n+1} = \text{Im } c_{t,n}$ , а  $r_{t,m}$  в виде  $r_{2tM+2m} = \text{Re } r_{t,m}$ ,  $r_{2tM+2m+1} = \text{Im } r_{t,m}$ . Тогда соотношение между этими двумя столбцами, определяемое (2) записывается в виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{C} + \mathcal{N}, \tag{5}$$

так соотношение между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{C}$  должно быть аффинным.  $\mathbf{H}$  — некая матрица размера  $2NT \times 2MT$ , а  $\mathcal{N}$  — вектор шума, полученный из  $\eta_{t,m}$  также, как вектор  $\mathbf{r}$  — из  $r_{t,m}$ .

Отображение  $\alpha_{m,n} \rightarrow \mathbf{H}$  описывается следующими двумя предложениями. Доказываются они простой подстановкой.

**Предложение 1.** Пусть  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$  и  $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$  — некоторые строки одинаковой длины, а  $\mathbf{H}$  — некоторая матрица. Тогда выражения

$$\left\| \begin{array}{c} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{array} \right\| \mathbf{H} = \left\| \begin{array}{c} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \vdots \\ \underline{b}_n \end{array} \right\|$$

и

$$\left\| \begin{array}{cccc} \mathbf{H}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^T & \dots & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}^T \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \underline{x}_1^T \\ \underline{x}_2^T \\ \vdots \\ \underline{x}_n^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \underline{b}_1^T \\ \underline{b}_2^T \\ \vdots \\ \underline{b}_n^T \end{array} \right\|$$

равносильны.

**Предложение 2.** Для любых  $a_{ij}, x_i, b_j$ , равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

равносильно равенству

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{a_{11}\} & -\operatorname{Im}\{a_{11}\} & \operatorname{Re}\{a_{12}\} & -\operatorname{Im}\{a_{12}\} & \cdots & \operatorname{Re}\{a_{1n}\} & -\operatorname{Im}\{a_{1n}\} \\ \operatorname{Im}\{a_{11}\} & \operatorname{Re}\{a_{11}\} & \operatorname{Im}\{a_{12}\} & \operatorname{Re}\{a_{12}\} & \cdots & -\operatorname{Im}\{a_{1n}\} & \operatorname{Re}\{a_{1n}\} \\ \operatorname{Re}\{a_{21}\} & -\operatorname{Im}\{a_{21}\} & \operatorname{Re}\{a_{22}\} & -\operatorname{Im}\{a_{22}\} & \cdots & \operatorname{Re}\{a_{2n}\} & -\operatorname{Im}\{a_{2n}\} \\ \operatorname{Im}\{a_{21}\} & \operatorname{Re}\{a_{21}\} & \operatorname{Im}\{a_{22}\} & \operatorname{Re}\{a_{22}\} & \cdots & -\operatorname{Im}\{a_{2n}\} & \operatorname{Re}\{a_{2n}\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{Re}\{a_{m1}\} & -\operatorname{Im}\{a_{m1}\} & \operatorname{Re}\{a_{m2}\} & -\operatorname{Im}\{a_{m2}\} & \cdots & \operatorname{Re}\{a_{mn}\} & -\operatorname{Im}\{a_{mn}\} \\ \operatorname{Im}\{a_{m1}\} & \operatorname{Re}\{a_{m1}\} & \operatorname{Im}\{a_{m2}\} & \operatorname{Re}\{a_{m2}\} & \cdots & -\operatorname{Im}\{a_{mn}\} & \operatorname{Re}\{a_{mn}\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{x_1\} \\ \operatorname{Im}\{x_1\} \\ \operatorname{Re}\{x_2\} \\ \operatorname{Im}\{x_2\} \\ \vdots \\ \operatorname{Re}\{x_n\} \\ \operatorname{Im}\{x_n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{b_1\} \\ \operatorname{Im}\{b_1\} \\ \operatorname{Re}\{b_2\} \\ \operatorname{Im}\{b_2\} \\ \vdots \\ \operatorname{Re}\{b_m\} \\ \operatorname{Im}\{b_m\} \end{pmatrix}$$

Чаще всего пространственно-временные коды проектирует в следующем виде:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{s}}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{s}$  — вектор длины  $2K$ ,  $\tilde{s}_{2i} + i\tilde{s}_{2i+1} \in \mathcal{M}$ , а  $\mathcal{M}$  — множество точек некоторой модуляции. В данной работе будет использоваться только  $M^2$  квадратурная амплитудная модуляция (КАМ), поэтому  $\tilde{s}_k \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$  — точки амплитудной модуляции (АМ) порядка  $M$ .

Для  $M^2$ -КАМ справедливо равенство  $\tilde{s}_k = \sqrt{\frac{6}{M^2-1}}(s_k - \frac{M-1}{2})$ , где  $s_k = \overline{0, M-1}$ . Подставив это выражение в (6) и (5) получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{HM}\sqrt{\frac{6}{M^2-1}}\left(\mathbf{s} - \frac{M-1}{2}\right) + \mathcal{N} = \mathbf{H}_0(\mathbf{s} - c_0) + \mathcal{N} \quad (7)$$

Таким образом не только сам пространственно-временной код является частью многомерной решётки, но и принятое из канала слово также лежит на некоторой решётке, определяемой текущим состоянием канала. Задачей декодера становится поиск ближайшей точки решётки. Кроме того, задача построения пространственно-временного кода сводится к задаче выбора многомерной решётки, обладающей некоторыми свойствами. Прежде, чем обсуждать требуемые свойства, мы опишем основные понятия и свойства решёток.

**Определение 1.** Пусть  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  — линейно-независимые вектора в пространстве  $\mathbb{R}^n$  ( $m \leq n$ ). Тогда набор точек

$$\Lambda = \left\{x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i, \lambda_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

будем называть *решёткой* размерности  $m$ , а  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  — *базисом* этой решётки.

Нужно заметить, что разные базисы могут определять одну и ту же решётку.

**Определение 2.** Матрицу

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

назовём *порождающей матрицей* решётки. Матрицу  $G = MM^T$  назовём матрицей Грамма решётки.

Таким образом, мы можем определить решётку через её порождающую матрицу:

$$\Lambda = \{\mathbf{x} = \lambda M | \lambda \in \mathbb{Z}^m\}$$

**Определение 3.** *Детерминантом решётки  $\Lambda$  называется детерминант матрицы Грамма  $G$ :*

$$\det(\Lambda) = \det(G)$$

Детерминант является инвариантом решётки, он не зависит от выбора базиса. Именно детерминант является главным критерием корректирующей способности кода [8].

### 3.3. Пространственно-временной Golden код

Существует великое множество пространственно временных кодов, имеющих различные характеристики и ограничения. Многие из них описаны в [7]. Здесь мы приведём лишь некоторые известные конструкции.

Кодовые слова «бесконечного» Golden кода задаются в форме (3):

$$\mathcal{G}_\infty = \left\{ \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha(a + b\theta) & \alpha(c + d\theta) \\ \gamma\bar{\alpha}(c + d\theta) & \bar{\alpha}(a + b\theta) \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i] \right\}, \quad (8)$$

где  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\bar{\theta} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ,  $\alpha = 1 + i - i\theta$ ,  $\bar{\alpha} = 1 + i - i\bar{\theta}$ ,  $\gamma = i$ . При использовании на практике,  $a, b, c, d \in \mathcal{M}$  выбираются в соответствии с некоторой модуляцией. Но для исследования свойств Golden кода удобнее использовать его бесконечный вариант.

Важным свойством Golden кода является его исчезающий детерминант [2]:

$$\delta_{\min}(\mathcal{G}_\infty) = \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{G}_\infty} \det(\mathbf{X}) = \frac{1}{5} \quad (9)$$

Данное свойство означает, что в первом приближении вероятность неправильного приёма зависит только от минимального Евклидова расстояния модуляции, но не от её порядка. То есть, вероятность неправильного приёма при повышении порядка модуляции растёт медленно.

Важно заметить, что минимальный детерминант конечного Golden кода больше или равен минимальному детерминанту бесконечного. Для 4-КАМ и 16-КАМ он равен  $\delta_{\min}(\mathcal{G}_4) = \delta_{\min}(\mathcal{G}_{16}) = 16/5$  [2].

Порождающая матрица комплексной решётки, соответствующей Golden коду, равна

$$\mathbf{M}_C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha\theta \\ 0 & 0 & \gamma\bar{\alpha} & \gamma\bar{\alpha}\bar{\theta} \\ \bar{\alpha} & \bar{\alpha}\bar{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Для получения действительной порождающей матрицы можно воспользоваться предложением 2.

### 3.4. Вложенные коды

Для построения вложенных Golden кодов мы воспользуемся следующим разложением:

$$\mathcal{G}_\infty = [\mathcal{G}_\infty/2\mathcal{G}_\infty] + 2\mathcal{G}_\infty,$$

где  $2\mathcal{G}_\infty$  — подкод  $\mathcal{G}_\infty$ , полученный из него умножением всех его слов на 2,  $\mathcal{G}_\infty/2\mathcal{G}_\infty$  — соответствующая ему фактор группа, а  $[\mathcal{G}_\infty/2\mathcal{G}_\infty]$  — множество представителей смежных классов подкода. В [9] показано, что данный подкод имеет большее детерминантное расстояние, а потому должен иметь лучшую корректирующую способность. Так же там показано, что фактор-группа  $\mathcal{G}_\infty/2\mathcal{G}_\infty$  изоморфна кольцу квадратных матриц размера  $2 \times 2$  над полем  $\mathbb{F}_2[i]$ ,  $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_2[i])$ . Данный изоморфизм очень важен для описания каскадной конструкции, в дальнейшем он будет использован при построении биекции между  $\mathcal{G}_4$  и  $GF(2^8)$ .

Для конечного кода можно записать

$$\mathcal{G}_{16} = [\mathcal{G}_\infty/2\mathcal{G}_\infty] + 2\mathcal{G}_4, \quad (11)$$

при этом описанные ранее свойства фактор-группы и подкода сохраняются, а  $2\mathcal{G}_4$  очевидно является подкодом кода  $\mathcal{G}_{16}$ . При этом мы можем рассматривать  $\mathcal{G}_4 \leftrightarrow [\mathcal{G}_\infty/2\mathcal{G}_\infty]$ .

Алгоритм кодирования кода в таком разложении может быть описан так:

1. На вход кодера поступают 16 информационных бит.
2. Первые 8 бит используются для выбора смежного класса. Обозначим его представителя  $s^{(1)}$ .
3. Вторые 8 бит кодируются кодом  $\mathcal{G}_4$ . Полученное кодовое слово обозначим  $s^{(2)}$ .
4. Результатом кодирования будет слово  $s^{(1)} + 2s^{(2)}$ .

При декодировании мы будем сначала декодировать слово кодом  $\mathcal{G}_{16}$ , определяя лишь смежный класс и его представителя и отбрасывая слово кода  $\mathcal{G}_4$ . Ошибки в выборе смежного класса будут исправлены внешним кодом, после чего мы вычтем его представителя из полученного из канала слова и декодируем результат подкодом  $2\mathcal{G}_4$ . Более подробное декодирование обобщённой каскадной конструкции будет описан в разделе 6.2. А декодирование отдельных кодов описано в следующем разделе.

### 3.5. Декодирование

Для декодирования конкретного Golden кода используется сферический декодер [11]. Мы не будем приводить полное описание данного алгоритма здесь, а лишь опишем его структуру. Пусть получен вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \eta$ , где  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times K}$  и  $\mathbf{c}$  известны, а  $\mathbf{s} \in \mathcal{M} \subset \mathbb{Z}^K$  — искомое.  $\eta$  — шум. Задачей данного алгоритма является поиск  $\arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{M}} (\mathbf{H}\mathbf{s} - \mathbf{r})^T (\mathbf{H}\mathbf{s} - \mathbf{r})$ . Данная задача является NP-полной при отсутствии ограничений на структуру матрицы  $\mathbf{H}$ , но в практических случаях многоантенных систем сложность можно считать полиномиальной [11].

1. Построим проекцию вектора  $\mathbf{r}$  на пространство решений:

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{r} = (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{s} + (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1}\eta,$$

где  $\mathbf{s}$  — неизвестное решение.

2. Теперь задачу можно переформулировать как поиск

$$\arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{M}} \{(\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})\} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{M}} \|\mathbf{H}(\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}})\| = \arg \min_{\mathbf{s} \in \tilde{\mathcal{M}}} \|\mathbf{H}\mathbf{s}\|,$$

где  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} - \tilde{\mathbf{s}}$ . Это задача поиска точки минимальной нормы, заданной матрицей  $\mathbf{H}$ .

3. Воспользуемся разложением Холецкого и получим  $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$ , где  $\mathbf{U}$  — верхне-треугольная матрица.

4. Поставим вспомогательную задачу поиска одного из  $\mathbf{s} \in \tilde{\mathcal{M}}$ , такого что  $\|\mathbf{U}\mathbf{s}\| < C$ , где  $C$  — некий радиус, то есть задачу поиска точки внутри сферы.
5. Благодаря верхнетреугольной структуре, мы можем последовательно перебирать значения отдельных координат, пока не найдём все точки, лежащие внутри сферы радиуса  $C$ .
6. Выберем из этих точек ближайшую к центру сферы. Она и будет решением задачи.
7. Если таких точек не было найдено, декодирование завершается отказом.

В литературе описано множество вариантов данного алгоритма, требующих меньшего количества операций [3]. Однако общая схема алгоритма сохраняется, а также его итеративная структура. Последнее означает, что сферический декодер получает некоторую последовательность точек, которая сходится к правильному решению. Данное свойство мы используем, чтобы получить некую метрику «надёжности» решения.

При декодировании внешних кодов в обобщённой каскадной конструкции нам понадобятся различные варианты расстановки стираний, а значит нам необходимо определить некоторую метрику «надёжности» решений внутренних кодов. В [6] показано, что хорошим кандидатом для такой метрики является разность расстояний между от ближайшего решения до принятой точки и от второго по удалённости решения до принятой точки. Но для вычисления данной метрики необходимо проводить декодирование внутреннего кода дважды.

В данной работе предлагается более простая метрика. На шаге 5 мы получали сходящуюся последовательность точек, сходящуюся к принятой. Разность удалённости последней и предпоследней точки в данной последовательности мы и будем считать метрикой надёжности. Если эта последовательность содержит менее двух членов, принятый символ считается надёжным. Вычисление такой метрики не увеличивает сложность декодирования.

Этим мы заканчиваем описание внутренних кодов и их декодирования и переходим к внешним кодам.

#### 4. ВНЕШНИЕ КОДЫ

В качестве внешних кодов в данной работе предлагается использовать произведения кодов Рида-Соломона.

Коды-произведения, также известные как итеративные коды, являются частным случаем каскадных кодов. Они были впервые предложены в работе [5] в качестве метода построения хороших кодов. Позже они были исследованы в качестве операции над алгеброй кодов в [12].

Длина произведения кодов равна произведению длин кодов, количество информационных символов — произведению количества информационных символов, а кодовое расстояние — произведению кодовых расстояний. Для исправления всех комбинаций ошибок кратности не больше половины расстояния можно использовать алгоритм декодирования каскадных кодов [14]. О некоторых других алгоритмах декодирования можно прочитать в [15, 16]. В данной работе мы рассмотрим более распространённый алгоритм декодирования — итеративный декодер.

Кодовые слова кода произведения обычно представляют в виде матрицы над полем  $F_q$ . Столбцы этой матрицы являются кодовыми словами первого кода-компонента, также называемого столбцовым кодом. Строки этой матрицы являются кодовыми словами второго кода-компонента, также называемого строчным кодом. Информационные символы расположены в левом верхнем углу данной матрицы.

В данной работе мы будем рассматривать только коды-произведения кодов Рида-Соломона  $[n_c, k_c, d_c]$  и  $[n_r, k_r, d_r]$  над полем  $F_q$ . Расстояние такого кода равно  $d_r d_c$ .

Кодер такого кода размещает информационные символы в левом верхнем углу (размера  $k_c \times k_r$ ) матрицы кодового слова. После этого он кодирует первые  $k_c$  строк строчным кодом,

размещая проверочные символы в правой части этих строк. Затем он кодирует все столбцы столбцовым кодом, размещая проверочные символы в нижней части этих столбцов.

#### 4.1. Итеративный декодер

Опишем итеративный алгоритм декодирования кода-произведения:

1. Декодируем все столбцы принятого слова столбцовым кодом. Если декодирование завершилось отказом, результат декодирования игнорируется. Иначе полученное кодовое слово записывается на место исходного столбца.
2. Аналогично декодируем все строки строковым кодом.
3. Если хотя бы один код исправил не менее одной ошибки, повторить данную процедуру с шага 1.

Для такого алгоритма декодирования существует очевидная неисправимая комбинация ошибок, образованная подматрицей размера  $\lceil \frac{d_c}{2} \rceil \times \lceil \frac{d_r}{2} \rceil$  не содержащей нулевых элементов и нулевыми элементами за её пределами. Вероятность появления такой комбинации ошибок и будет нижней оценкой на вероятность неправильного декодирования кода произведения.

#### 4.2. Нижняя граница вероятности неправильного декодирования

**Предложение 3.** Вероятность неправильного декодирования для итеративного декодера кода произведения больше или равна

$$P_f \geq \binom{n_r}{e_r} \binom{n_c}{e_c} p^{e_r e_c} (1-p)^{n_r n_c - e_r e_c}, \quad (12)$$

где  $e_r = \lceil \frac{d_r}{2} \rceil$ ,  $e_c = \lceil \frac{d_c}{2} \rceil$ , а  $n_r$  и  $n_c$  длины строчного и столбцового кодов соответственно.

Правая часть выражения (12) равна вероятности появления неисправимой комбинации ошибок, описанной выше.

**Предложение 4.** Вероятность неправильного декодирования для итеративного декодера кода произведения больше или равна

$$P_f \geq \binom{n_r}{e_r} \binom{n_c}{e_c} p^{e_r e_c} (1-p)^{n_r n_c - e_r e_c} \frac{p}{1-p} \quad (13)$$

**Доказательство.** Данная нижняя граница определяет вероятность появления подматрицы без нулевых элементов и одной ошибки вне её. Никакая одна ошибка не может помочь исправить плотную подматрицу ошибок. Докажем этот факт.

Если ошибка располагается в столбце без других ошибок, она будет декодирована на первом шаге алгоритма соответствующим столбцовым кодом. В этом случае задача свелась к предыдущим.

Рассмотрим случай, когда она располагается в столбце, в котором есть  $e_c$  других ошибок. Если столбцовый код не сможет декодировать данный столбец, на следующем шаге алгоритма декодирования эту ошибку исправит строчный код, что сведёт комбинацию ошибок к предыдущей.

Пусть столбцовый код произвёл ошибочное декодирование столбца с  $e_c + 1$  ошибками. При этом он изменяет не более  $e_c - 1$  символов. Пусть он исправил  $a$  ошибок и внёс  $b$ . Тогда вес разности полученного и переданного кодового слова одного столбца будет  $e_c + 1 - a + b \geq d$  в силу кодового расстояния. Данное неравенство выполняется лишь при  $a = 0$ ,  $b \geq d - e_c - 1 = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1 \geq e_c - 2$ . Таким образом столбцовый декодер не может исправить ни одной ошибки, а все ошибки вне плотной подматрицы будут исправлены строчным кодом.

Появление двух ошибок в столбце может привести к исправимой комбинации ошибок, поэтому при формулировке следующего утверждения мы вынуждены исключить такой случай.

**Предложение 5.** Пусть  $e_c < e_r$ . Тогда вероятность неправильного декодирования для итеративного декодера кода произведения больше или равна

$$P_f \geq \binom{n_r}{e_r} \binom{n_c}{e_c} p^{e_r e_c} (1-p)^{n_r n_c - e_r e_c} \times \left( \sum_{t=0}^{e_c} \sum_{w=0}^t \binom{n_r n_c - e_r n_c}{t-w} \binom{e_r}{w} (n_c - e_c)^w \left( \frac{p}{1-p} \right)^t - (n_r - e_r) \left( \frac{p}{1-p} \right)^{e_c} \right) \quad (14)$$

**Доказательство.** Данная нижняя граница определяет вероятность появления подматрицы без нулевых элементов и  $t$  ошибок вне её. При  $t < e_c$  такая добавка не может привести к появлению подматрицы большего размера, а потому ни одна комбинация ошибок не будет учтена дважды.

Как было показано в доказательстве предыдущего предложения, добавление двух ошибок в один столбец неисправимой комбинации ошибок может сделать её исправимой. Поэтому мы разделяем ошибки в столбцах подматрицы (их количество обозначено  $w$ ) и ошибки в других столбцах (их количество равно  $t - w$ ). Количество способов их расстановки первых равно  $\binom{e_r}{w} (n_c - e_c)^w$ , а вторых —  $\binom{n_r n_c - e_r n_c}{t-w}$ . Добавив суммирование по  $t$  и  $w$  и поправку, описанную ниже, получим (14).

При  $t = e_c$  и  $w = 0$  существуют  $n_r - e_r$  «плохих» комбинаций дополнительных ошибок, приводящих к образованию подматрицы большего размера. Действительно, если все  $e_c$  ошибок расположены в одном столбце, в строках исходной плотной подматрицы ошибок, полученная комбинация ошибок будет представлена плотной подматрицей размера  $(e_c + 1) \times e_r$ . Если мы не «запретим» такие комбинации ошибок, они будут учтены  $e_r$  раз.

## 5. ИТЕРАТИВНЫЙ ДЕКОДЕР С ВНЕСЕНИЕМ СТИРАНИЙ

Нижняя граница, описанная в предыдущем разделе, обусловлена не свойствами самого кода, а выбранным алгоритмом декодирования. В этом разделе предлагается новая модификация итеративного алгоритма декодирования, позволяющий «обойти» данную нижнюю границу. Новый декодер использует высокую обнаруживающую способность укороченных кодов Рида-Соломона, чтобы определить положение неисправимой комбинации ошибок. Приведём его подробное описание.

1. Проведём декодирование принятого слова итеративным декодером.
2. Если на предыдущем шаге мы получили кодовое слово, завершим декодирование, выдав это слово.
3. Иначе, назовём все столбцы, декодирование которых на последней итерации закончилось либо отказом, либо исправлением ошибок, «*плохими*». «Хорошими» будут являться лишь те столбцы, которые были исправлены на более ранних итерациях.
4. Аналогично разделим строки на «хорошие» и «плохие».
5. Внесём стирания на пересечении «плохих» строк и столбов.
6. Повторим декодирование итеративным декодером слова, полученного на шаге 1, со стираниями, определёнными на прошлом шаге.
7. Результат этого декодирования и будет результатом работы данного алгоритма.

К сожалению, данный алгоритм обладает тем же эффективным кодовым расстоянием, что и итеративный. Действительно, существует комбинация ошибок, которая за первую итерацию итеративного декодера перейдёт в неправильное кодовое слово. Однако, предложенный алгоритм может правильно исправить большинство комбинаций ошибок минимального веса.

Сложность предложенного алгоритма превосходит сложность итеративного декодера не более, чем вдвое. При этом, как будет показано в разделе 6.3, вероятность неправильного декодирования в некоторых случаях падает более чем в 10 раз.

## 6. ПРЕДЛОЖЕННЫЕ КОДЫ

### 6.1. Описание и кодирование

В данной работе предлагается новая двухслойная каскадная сигнально-кодовая конструкция. Системой внутренних кодов является вложенная система Golden кодов, а в качестве внешних кодов выступают произведения кодов Рида-Соломона. Выпишем параметры данной системы.

- Внутренние коды представлены кодами  $\mathcal{G}_{16}$  и  $2\mathcal{G}_4$ , то есть Golden кодом с модуляцией КАМ-16 и его подкодом. Длина данных кодов составляет два временных отсчёта. Они используют две передающие антенны.
- Внешний код первого слоя — произведение  $[32, 24, 9]_{2^8}$  укороченных кодов Рида-Соломона. Данный код имеет 576 информационных символов и скорость 0,56.
- Внешний код второго слоя — произведение  $[32, 30, 3]_{2^8}$  и  $[32, 28, 5]_{2^8}$  укороченных кодов Рида-Соломона. Данный код имеет 840 информационных символов и скорость 0,82.
- Таким образом внешние коды имеют длину 1024, а внутренние коды имеют  $2^8$  смежных классов мощности  $2^8$ .
- Общая скорость предложенной кодовой конструкции составляет 5,5 бита (0,68 символа) за один временной интервал. Общая длина равна 2048 временных интервала.

Выбор параметров внешних кодов можно рассматривать последовательно, так как общая вероятность ошибочного приёма представлена формулой  $P\{B_1\} + P\{B_2|\overline{B_1}\}P\{\overline{B_1}\}$ , где  $B_1$  и  $B_2$  — события ошибочного декодирования первого и второго слоя, соответственно, а  $\overline{B_1}$  — событие успешного декодирования первого слоя. Моделирование показало, что параметры внешнего кода первого слоя определяет положение и крутизну спада кривой вероятности ошибочного декодирования, а параметры внешнего кода второго слоя определяют наличие и положение «полки» той же кривой, то есть резкого уменьшения скорости спада. Таким образом мы сначала подбирали параметры внешнего кода первого слоя при фиксированном «хорошем» втором коде так, чтобы спад был достаточно крутым. После этого данный код фиксировался, а у внешнего кода второго слоя избыточность понижалась до тех пор, пока не появлялась «полка». Приведённые параметры внешних кодов позволяют достигнуть вероятности ошибки на блок порядка  $10^{-8}$  с минимальной избыточностью при использовании итеративного декодера с введением стираний.

Алгоритм кодирования уже был кратко описан в разделе 2, но мы приведём его ещё раз, с учётом выбранных кодов-компонент. Для описания «взаимодействия» внутренних и внешних кодов нам потребуется ввести взаимно-однозначное отображение (биекция) из  $GF(2^8)$  в  $[\mathcal{G}/2\mathcal{G}]$ . Очевидно, данное отображение существует не одно, но выбор какого-либо из них имеет значения в предложенной конструкции. Обозначим данное отображение  $\mathcal{L}$ .

Информационные символы представляются в виде двух векторов  $\mathbf{i}^{(1)}, \mathbf{i}^{(2)}$  длины 576 и 840 полей  $GF(2^8)$ . Эти вектора кодируются внешними кодами первого и второго слоя, соответственно. Полученные векторы обозначим  $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}$ .

Для кодирования внутренних кодов мы воспользуемся формулой

$$C[k] = \mathbf{M} \sqrt{\frac{6}{M^2 - 1}} \left( \mathcal{L}(\mathbf{v}_k^{(1)}) + 2\mathcal{L}(\mathbf{v}_k^{(2)}) - \frac{M - 1}{2} \right).$$

Здесь мы сначала переводим кодовые символы внешних кодов в бесконечное поле, затем модулируем их и кодируем их Golden кодом.

Предыдущий шаг можно интерпретировать и по-другому. Сначала закодируем  $\mathcal{L}(\mathbf{v}_k^{(1)})$  кодом  $\mathcal{G}/2\mathcal{G}$ , то есть выберем смежный класс. После этого с помощью кода  $\mathcal{G}_4$  и информационного символа  $\mathcal{L}(\mathbf{v}_k^{(2)})$  выберем элемент данного смежного класса. В таком описании проще рассуждать о кодовых расстояниях внутренних кодов.

Кодовое слово обобщённой каскадной конструкции задаётся формулой

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}[1] \\ \mathbf{C}[2] \\ \vdots \\ \mathbf{C}[1024] \end{pmatrix}$$

### 6.2. Декодер



Рис. 1. Блок-схема декодера обобщённого каскадного кода.

Блок-схема декодера представлена на рис. 1. Дополним её текстовым описанием:

1. Полученное с антенн слово разбивается на 1024 части, и каждая из них отправляется на декодер первого внутреннего кода.
2. Сферический декодер декодирует отдельное слово внутреннего кода (содержащее 8 символов над полем  $\mathbb{R}$ ) и получает смежный класс, соответствующий полученному слову ( $\mathbf{s}^{(1)}$ ).
3. Данный смежный класс отображается в символ поля  $GF(2^8)$ ,  $v_k^{(1)} = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{s}^{(1)}[k])$ .
4. Полученные символы  $v_1^{(1)} \dots v_{1024}^{(1)}$  декодируются внешним кодом первого слоя. Полученный вектор обозначим  $\hat{\mathbf{v}}^{(1)}$ .
5. Каждый символ вектора  $\hat{\mathbf{v}}^{(1)}$  отображается в вектор  $\hat{\mathbf{s}}^{(1)}[k] = \mathcal{L}(\hat{v}_k^{(1)}) \in \mathbb{R}^8$ .
6. Сферический декодер декодирует исходное полученное слово в смежном классе, определяемом  $\hat{\mathbf{s}}$ . Полученный вектор обозначим  $\mathbf{s}^{(2)}$ .
7. Эти вектора отображаются в поле  $GF(2^8)$  и декодируются внешним кодом второго слоя.
8. Информационный вектор получается объединением информационных векторов, полученных на шагах 4 и 7.

Основной идеей данного алгоритма является декодирование внутреннего кода второго слоя в известном смежном классе. В этом заключается основное отличие обобщённой каскадной конструкции от кодов с неравномерной защитой. Данная особенность позволяет внутреннему коду второго слоя иметь большее расстояние, а значит и лучшую корректирующую способность. Именно поэтому внешний код второго слоя может иметь большую скорость, чем внешний код первого слоя.

Кроме того, в разделе 3.5 описана метрика надёжности решений декодера внутреннего кода. Однако декодер внешних кодов исправляет ошибки и стирания, но не может учитывать

надёжности отдельных символов. Поэтому мы предлагаем декодер предложенной конструкции по обобщённому минимальному расстоянию. Опишем его как расширение предыдущего алгоритма.

1. На шаге 2 выходом декодера будут не только символы  $s^{(1)}[k]$ , но и их надёжности.
2. На шаге 4 мы будем проводить несколько попыток декодирования, первая из которых совпадает с описанной в предыдущем алгоритме.
3. Если данная попытка завершается отказом от декодирования, мы повторим попытку, внося дополнительные стирания. Для этого в матричном представлении кодового слова внешнего кода (произведения кодов Рида-Соломона) в каждом столбце мы внесём стирания в два самых ненадёжных символа. Если надёжности нестертых символов одного из столбцов неизвестны, в данный столбец стирания вноситься не будут. В силу особенностей декодера кодов Рида-Соломона, внесение нечётного числа стираний не имеет смысла.
4. Если декодирование опять завершается отказом, мы увеличим число стираний до 4 на столбец и снова повторим попытку. Мы будем продолжать вносить дополнительные стирания до тех пор, пока их число не превысит расстояние столбцового кода.
5. Таким образом декодирование внешнего кода завершится отказом только в том случае, если отказом завершатся попытки со всеми указанными комбинациями стираний.
6. Декодирование второго слоя происходит аналогично.

В данном алгоритме декодирование повторяется до первого успешного декодирования. Теоретически, декодирование при всех комбинациях стираний и создание списка результатов должно давать лучшую корректирующую способность. Однако при моделировании ни разу не наблюдалось ошибочное декодирование внешних кодов, то есть оно заканчивалось отказом, либо давало на выходе правильное кодовое слово. Это свойство произведения кодов Рида-Соломона хорошо известно и являлось одной из причин их выбора в качестве внешних кодов. В то же среднее время декодирования до первого успеха в несколько раз меньше времени декодирования в список. Поэтому для предложенной кодовой конструкции указан именно такой алгоритм декодирования.

### 6.3. Моделирование

Параметры предложенной конструкции уже были приведены в разделе 6.1, но мы повторим их здесь.

- Внутренние коды представлены кодами  $\mathcal{G}_{16}$  и  $2\mathcal{G}_4$ , то есть Golden кодом с модуляцией КАМ-16 и его подкодом. Длина данных кодов составляет два временных интервала. Они используют две передающие антенны.
- Внешний код первого слоя — произведение  $[32, 24, 9]_{2^8}$  укороченных кодов Рида-Соломона. Данный код имеет 576 информационных символов и скорость 0,56.
- Внешний код второго слоя — произведение  $[32, 30, 3]_{2^8}$  и  $[32, 28, 5]_{2^8}$  укороченных кодов Рида-Соломона. Данный код имеет 840 информационных символов и скорость 0,82.
- Таким образом внешние коды имеют длину 1024, а внутренние коды имеют  $2^8$  смежных классов мощности  $2^8$ .
- Общая скорость предложенной кодовой конструкции составляет 5,5 бита (0,68 символа) за один временной интервал. Общая длина равна 2048 временных интервала.

Всё моделирование проводилось с двумя приёмными антеннами. Исследовались различные комбинации алгоритмов декодирования. Для начала приведём общий результат моделирования предложенной конструкции. На рис. 2 изображены кривые вероятностей ошибок на блок

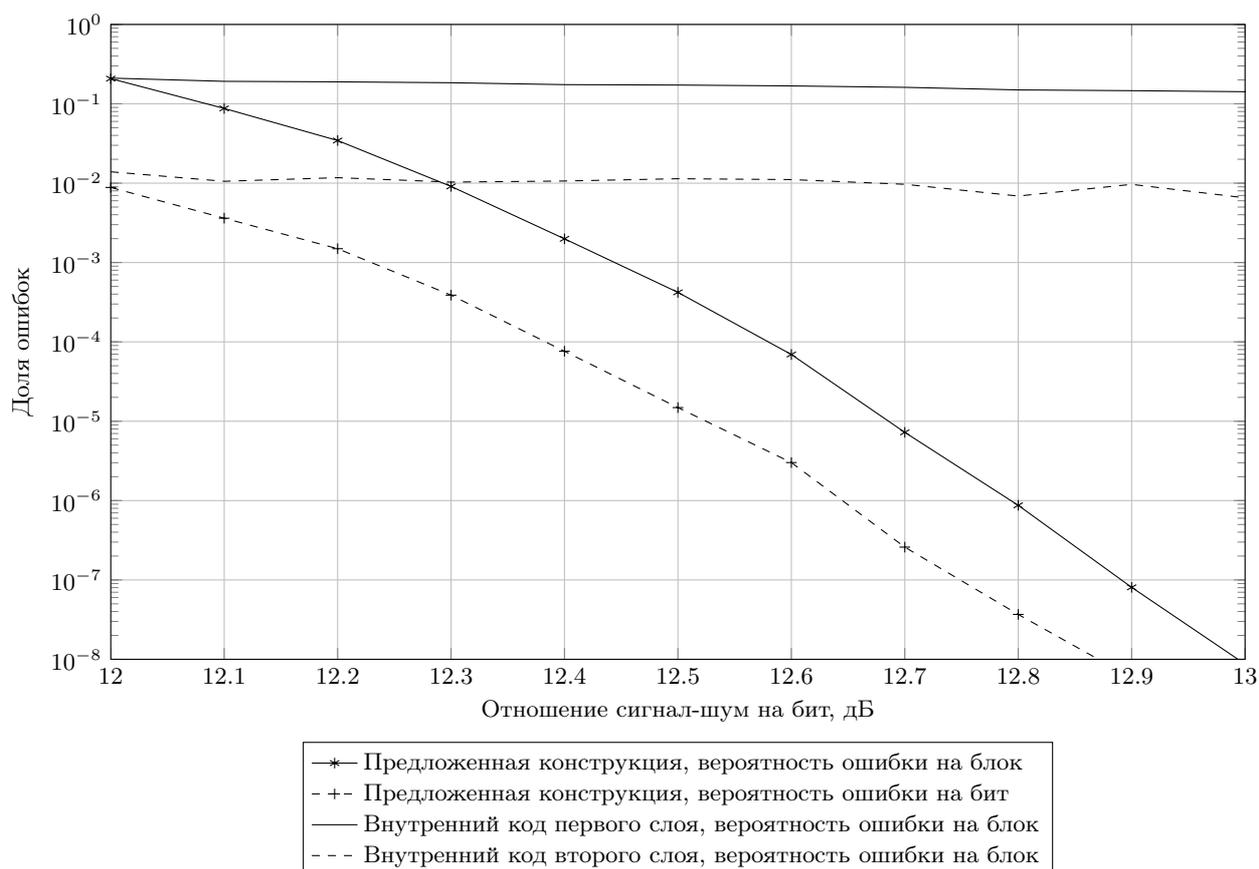


Рис. 2. Корректирующая способность предложенной конструкции

и на бит для предложенной конструкции. При декодировании внешних кодов использовался итеративный декодер с внесением стираний, при декодировании обобщённой каскадной конструкции — декодер по обобщённому минимальному расстоянию. Для сравнения на рисунке также изображены кривые вероятностей ошибки внутренних кодов. Из рисунка видно, что спад вероятности ошибки начинается примерно с 12–12.2 дБ, и за каждый 0.1 дБ вероятность ошибки убывает примерно в 10 раз. Заданная вероятность ошибки  $10^{-8}$  на блок достигается на отношении сигнал шум 13 дБ на бит. Golden код без внешнего кода достигает такой вероятности ошибки на блок (при более коротком блоке) лишь при отношении сигнал-шум 35 дБ). Сравнение этих параметров с параметрами некоторых других сигнально-кодовых конструкций будет приведено на следующих графиках.

В качестве сигнально-кодовой конструкции для сравнения результатов предлагается каскадная система, с внутренним Golden кодом и внешним кодом Рида-Соломона  $[1024, 708, 317]_{2^{16}}$ . Данная конструкция имеет тот же внутренний код и ту же скорость. Кроме того, код Рида-Соломона имеет лучшее расстояние. Однако данная конструкция не использует разбиение Golden кода на смежные классы, а потому, как видно из рис. 3, имеет более поздний спад. Большое кодовое расстояние должно привести более резкому спаду, однако при вероятностях неправильного декодирования более  $10^{-8}$  данный эффект не заметен. Таким образом, обобщённые каскадные конструкции имеют серьёзный энергетический выигрыш по сравнению с обычными каскадными конструкциями с жёстким декодированием. Сравнение с кодами, имеющими декодеры с мягким входом, в данной работе не проводилось.

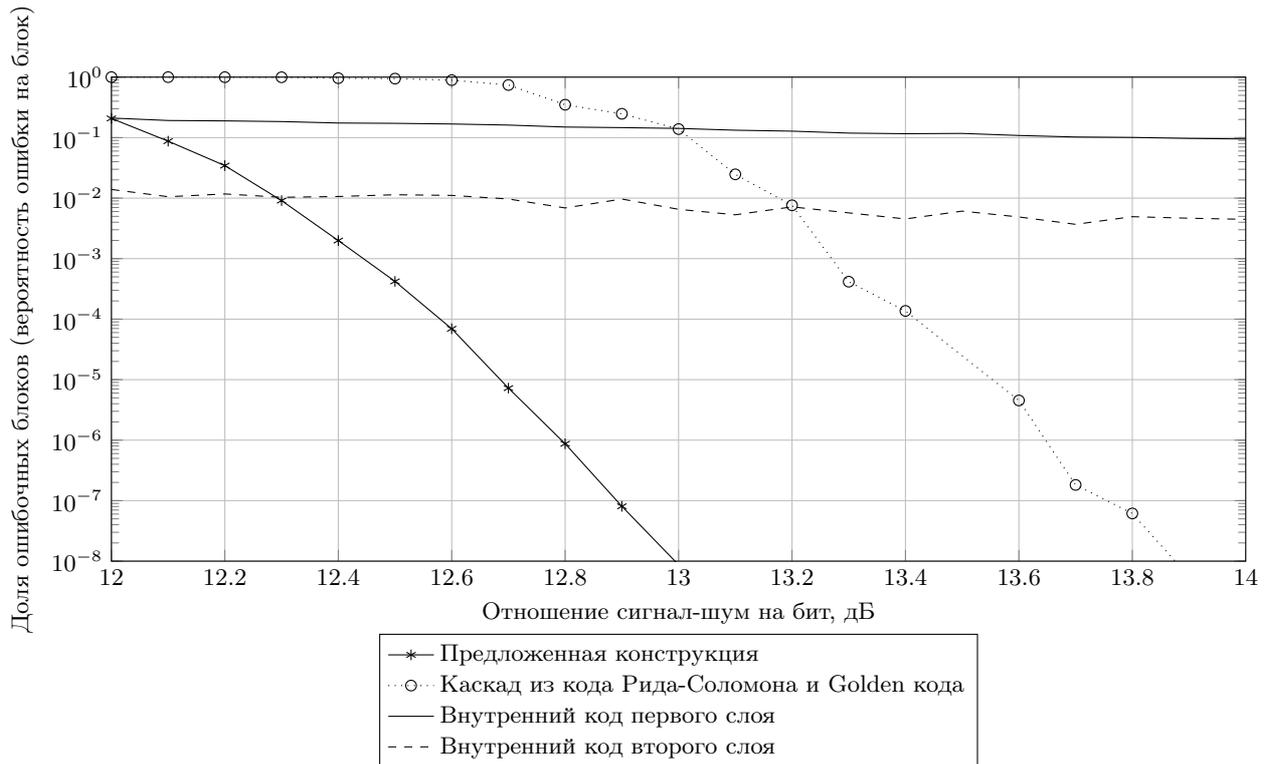


Рис. 3. Корректирующая способность предложенной конструкции

Для описания эффективности предложенных алгоритмов декодирования, было проведено сравнительное моделирование с ранее известными декодерами. Были исследованы различия в корректирующей способности, во-первых, итеративного декодера и итеративного декодера с внесением стираний, и, во-вторых, классического декодера обобщённых каскадных кодов и декодера по обобщённому минимальному расстоянию (GMD-декодер). Результаты этого моделирования можно увидеть на рис. 4.

Сравнивая сплошную и штриховую кривые, соответствующие итеративному декодеру с внесением стираний (см. раздел 5) и классическому итеративному декодеру (см. раздел 4.1), можно увидеть главное преимущество предложенного алгоритма: кривая вероятности ошибки не становится пологой на всём диапазоне моделирования. В обоих случаях использовался декодер обобщённого каскадного кода по минимальному обобщённому расстоянию. Так как расстояние внешнего кода второго слоя составляет лишь  $3 \cdot 5 = 15$  при длине 1024, разумно предположить, что кривая вероятности ошибки должна стать пологой при больших отношениях сигнал-шум. Проверить этот факт моделированием достаточно сложно в силу низких вероятностей ошибки.

Штриховая и штрих-пунктирная кривые на рис. 4 (они также обозначены символами «o» и «+» соответственно) изображают вероятности ошибки при декодировании классическим алгоритмом для обобщённых каскадных кодов и алгоритмом декодирования по обобщённому минимальному расстоянию. Использование последнего даёт выигрыш в 0.2 дБ, однако не помогает бороться с пологостью кривой вероятности ошибки при больших отношениях сигнал-шум. В обоих моделирования для декодирования внешних кодов применялся итеративный декодер. Основной вывод, который можно сделать из этого сравнения: алгоритм декодирования обобщённого каскадного кода по обобщённому минимальному расстоянию имеет небольшой энергетический выигрыш по сравнению с классическим декодером.

Кроме того, на рис. 4 изображена нижняя граница (14), описанная в предложении 5, вычисленная для внешнего кода второго слоя. Можно заметить, что она с точностью до двух порядков описывает положение пологой части кривой вероятности ошибки. Это означает, что данную оценку можно использовать для предсказания появления пологой части для кодов-произведений. Кроме того, может заметить, что на итеративный алгоритм с внесением стираний данная нижняя граница не распространяется.

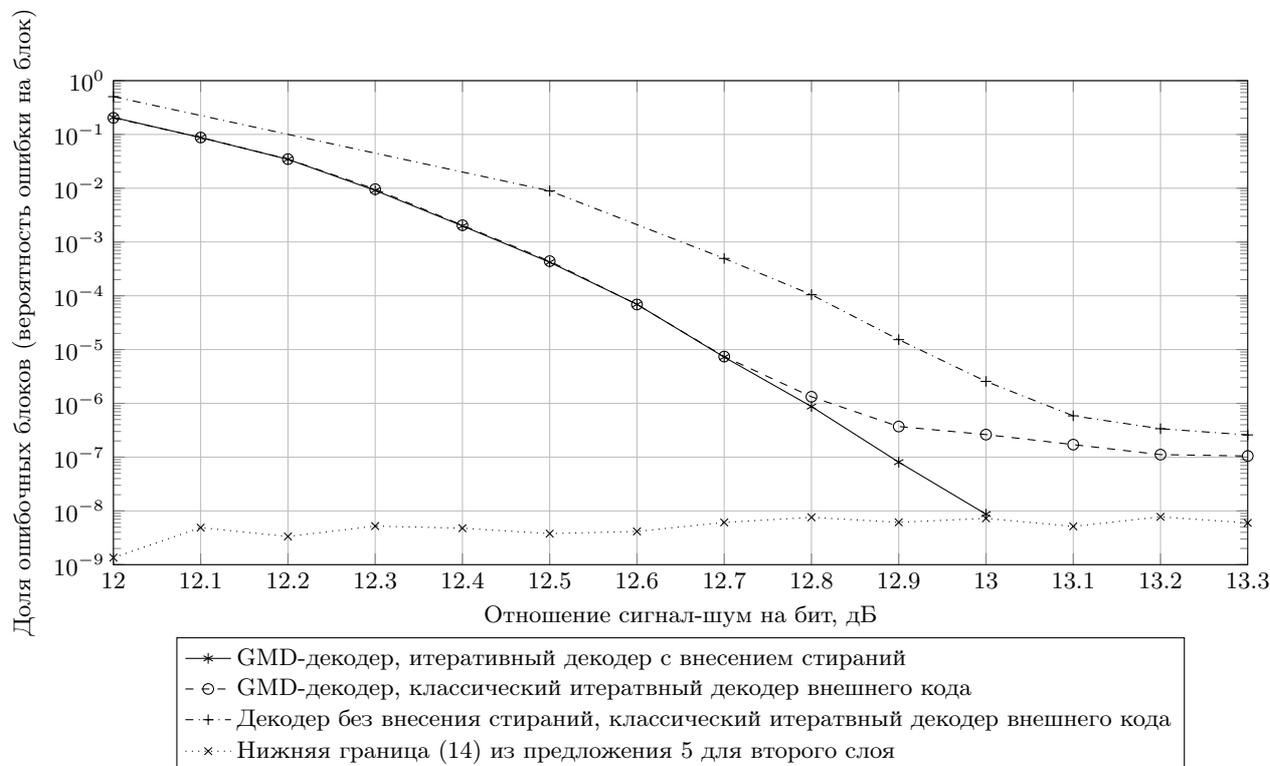


Рис. 4. Сравнение алгоритмов декодирования

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена обобщённая каскадная сигнально-кодовая конструкция для систем с многими передающими и приёмными антеннами (ММО), компонентными кодами являются Golden коды и произведения кодов Рида-Соломона.

Для внутренних (Golden) кодов описан способ построения и декодирования вложенной системы кодов, а так же предложен способ назначения символам меры надёжности без увеличения сложности приёма.

Для внешних кодов (произведений кодов Рида-Соломона) предложен новый алгоритм декодирования, имеющий более высокую корректирующую способность при больших отношениях сигнал-шум. Эффективность предложенного декодера проверена моделированием. Также предложены нижние границы неправильного декодирования для ранее известного итеративного декодера, не распространяющиеся на предложенный алгоритм.

В работе описаны параметры конкретной обобщённой каскадной конструкции и приведены использованные критерии выбора параметров внешних кодов в соответствии с характеристиками внутренних кодов. Кроме того, предложен новый алгоритм декодирования, использующий

особенности выбранных внешних кодов, имеющий более высокую корректирующую способность за счёт учёта меры надёжности символов, полученной декодером внутреннего кода.

Проведённое компьютерное моделирование показало эффективность предложенных алгоритмов, а так же выигрыш предложенной обобщённой каскадной конструкции у классической каскадной конструкции, имеющей тот же внутренний код, лучший внешний код и ту же общую скорость. Кроме того, предложенная сигнально-кодовая конструкция достигает вероятности ошибки  $10^{-8}$  на блок при отношении сигнал-шум 13 дБ без уменьшения скорости спада вероятности ошибки от отношения сигнал-шум. Golden код достигает такой вероятности ошибки лишь при 35 дБ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siavash M. Alamouti. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, 16(8), OCTOBER 1998.
2. Jean-Claude Belfiore, Ghaya Rekaya, and Emanuele Viterbo. The golden code: A 2 x 2 full-rate space-time code with nonvanishing determinants. *IEEE Transactions on information theory*, 51(4):1432–1436, 2005.
3. M.-O. Damen, H. El-Gamal, and G. Caire. On maximum-likelihood detection and the search for the closest lattice point. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 49(10):2389–2402, Oct 2003.
4. H. El-Gamal and M.-O. Damen. Universal space-time coding. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 49(5):1097–1119, May 2003.
5. P. Elias. Error-free coding. *Information Theory, Transactions of the IRE Professional Group on*, 4(4):29–37, September 1954.
6. G David Forney Jr. Exponential error bounds for erasure, list, and decision feedback schemes. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 14(2):206–220, 1968.
7. H. Jafarkhani. *Space-time coding: theory and practice*. Cambridge Univ Pr, 2005.
8. Paul James Lusina. *Algebraic Designs of Space Time Codes*. PhD thesis, University of Ulm, 2003.
9. L. Luzzi, G.R.-B. Othman, J. C Belfiore, and E. Viterbo. Golden space-time block-coded modulation. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 55(2):584–597, Feb 2009.
10. F. Oggier, G. Rekaya, J. C Belfiore, and E. Viterbo. Perfect space-time block codes. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(9):3885–3902, Sept 2006.
11. F. Oggier and E. Viterbo. Algebraic number theory and code design for rayleigh fading channels. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 1(3):333–415, 2004.
12. David Slepian. Some further theory of group codes. *Bell System Technical Journal*, 39(5):1219–1252, 1960.
13. Vahid Tarokh, Hamid Jafarkhani, and A. R. Calderbank. Space-time block codes from orthogonal designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(5), July 1999.
14. Эфраим Леонтьевич Блох and Виктор Васильевич Зяблов. *Линейные каскадные коды*. Наука, 1982.
15. В.В. Зяблов. Алгоритмы поэтапного декодирования итерированных и каскадных кодов. В кн.: *Передача цифровой информации по каналам с памятью: Сборник статей*. Под ред. Э.Л. Блох. Наука, 1970.
16. В.В. Зяблов. Оптимизация алгоритмов каскадного декодирования. *Проблемы передачи информации*, 9(1):19–24, 1973.

## Generalised Concatenated System with Embedded Space-Time Codes for MIMO

A.A. Kreshchuk, V.V. Zyablov

MIMO systems are communication systems with multiple transmitting and receiving antennas. In this work we propose new generalised concatenated coded modulation. Its inner codes are embedded Golden codes. Its outer codes are products of Reed-Solomon codes. We propose new decoder algorithms for inner codes, outer codes and the whole concatenated system. The space-time Golden code decoder can obtain a measure of reliability for some symbols without increasing the number of calculations. The outer product codes decoder “removes” the “floor” on the error rate plot. Likewise we have obtained new lower bounds on decoding failure rates for product codes iterative decoder. The new decoder of the generalised concatenated system has better error correcting efficiency than the known ones. Computer simulation have shown the effectiveness of the proposed system and the decoder algorithms.

**KEYWORDS:** generalised concatenated code, product code, MIMO, space-time code.