Информационные процессы, Том 14, № 3, 2014, стр. 214–231.

ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ

Распределение максимально допустимой доли потерянных пакетов между звеньями многоадресного маршрута в беспроводной сети [1]

И.С. Каргин, Д.А. Платов, А.А. Сафонов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 11.08.2014

Аннотация—В данной работе в рамках проблемы многоадресной маршрутизации в беспроводной сети рассматривается задача распределения максимально допустимой доли потерянных пакетов между звеньями маршрута от узла-источника до узлов-получателей при использовании методов надежной многоадресной передачи, стандартизованных для сетей Wi-Fi в 2012 г. Для некоторых частных случаев получены точные решения в явном виде. Для общего случая предложены приближенные алгоритмы, использующие “жадную” стратегию, и проведена оценка их эффективности.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Качество обслуживания, маршрутизация, GCR-U, DMS.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема многоадресной маршрутизации, т.е. доставки одних и тех же пакетов данных нескольким получателям, изучалась десятки лет, и даже краткий обзор всех постановок задач в рамках этой проблемы, не говоря уже об их решениях, потребовал бы написания книги.

Одну из задач, которую, пожалуй, можно назвать основной в рамках проблемы многоадресной маршрутизации, можно сформулировать следующим образом. На графе, представляющем сеть, найти маршрут от вершины-источника до множества вершин-получателей, минимизирующий заданную функцию стоимости маршрута. Известны варианты этой задачи, в которых взвешенными являются дуги графа или его вершины, и минимизируемая функция представляет собой арифметическую сумму весов соответственно всех дуг или вершин, входящих в маршрут. Маршрут, являющийся решением этих задач, называют деревом Штейнера, а задачу маршрутизации в приведенной постановке — задачей поиска дерева Штейнера.

Задача поиска дерева Штейнера на графе со взвешенными ребрами была исследована в эпоху активного развития *проводных* сетей[1]. После того как в 1971 г. Карр доказал в [1], что задача является NP-полной, был разработан целый ряд приближенных алгоритмов. В частности, в 1980 г. в [2] был предложен алгоритм Takahashi-Matsuyama, требующий всего $O(MN^2)$ операций, где N — число вершин графа, а M — число вершин-получателей, любое решение которого не более, чем в два раза, хуже точного. Позднее были предложены более

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-07-33067 мол_а_вед.

[1] Задача поиска дерева Штейнера на графе со взвешенными вершинами была изучена хронологически позднее и может быть сведена к задаче на графе со взвешенными ребрами путем замены каждой вершины графа на две вершины, соединенных ребром, и приписыванию этому ребру веса, равного весу первональчаной вершины. В связи с этим далее в работе рассмотрена только задача для случая графа со взвешенными ребрами.

точные, но и более сложные алгоритмы, обзор которых читатель может найти, например, в [3] (1987 г.), [4] (1993 г.) или [5] (2013 г.).

В проводных сетях многоадресные пакеты передаются по каждому звену маршрута индивидуально, и этот метод является единственно возможным, так как звеном является провод. При индивидуальной передаче пакетов значения весовой функции дуг графа (метрики маршрутизции) независимы в том смысле, что вес дуги, входящей в маршрут, не зависит от того, какие еще дуги графа принадлежат маршруту. Благодаря этому общий вклад весов нескольких дуг в функцию стоимости маршрута равен арифметической сумме весов этих дуг, включая тот случай, когда дуги являются смежными. Если бы это условие не выполнялось, алгоритмы, приведенные в [3, 4, 5], были бы невозможны, так как они основаны на итеративном достраивании маршрута, когда на первом шаге маршруту принадлежат только вершина-источник и вершины-получатели, и на каждом следующем шаге к маршруту добавляется очередное звено или несколько звеньев сразу, *без переоценки вклада уже построенной части маршрута в его стоимость.*

При использовании некоторых метрик маршрутизации, например, метрики Air Time Link [6], подобное рассуждение равной степени справедливо в случае *беспроводной* сети, если в ней используется метод индивидуальной передачи по звеньям маршрута. Однако применение этого метода не использует естественного преимущества широковещательной природы передачи в беспроводной среде: в результате любой передачи пакет получают сразу все соседние узлы, и в 2005 г. Ruiz et al показали в [7], что дерево Штейнера, вообще говоря, не является маршрутом минимальной стоимости, если пакеты данных передаются по маршруту методом широковещательной передачи без подтверждений (англ. broadcast). Причина заключатся в том, что, так как любая передача данных, выполняемая узлом сети, автоматически охватывает все инцидентные звенья, вклад этих звеньев в общую стоимость маршрута оказывается меньше суммы их весов, вычисленных в предположении, что по ним выполняются индивидуальные передачи.

Несмотря на то, что Ruiz et al предложили алгоритм, применимый только в предположении одинаковой стоимости передачи каждым узлом сети и только при использовании ненадежного метода передачи (с единственной попыткой передачи каждым ретранслятором в маршруте), их исследование чрезвычайно важно, так как оно показывает прицdipиальную возможность использования широковещательной природы передачи в беспроводной среде для снижения стоимости многодресной маршрутизации. В частности, благодаря этому в 2012 г. Сафоновым и др. в [8] была разработана модификация алгоритма Takahashi-Matsuyama для построения многоадресного маршрута, учитывающая взаимную зависимость значений метрики маршрутизации на смежных звеньях маршрута, объясняемую широковещательной природой беспроводной передачи, и исследовано применение нового алгоритма многоадресной маршрутизации в сетях Wi-Fi.

Бурное развитие беспроводных технологий в последнее десятилетие привело к тому, что пропускная способность беспроводных сетей на сегодняшний день сравнима с пропускной способностью сетей проводных. Вслед за этим продолжает расширяться спектр сервисов, доступ к которым осуществляется через беспроводные сети, и возникает необходимость обеспечивать в таких сетях качество обслуживания пакетов (англ. quality of service, QoS), сравнимое с качеством, de facto стандартным в проводных сетях. В частности, требуется, чтобы доля потерянных пакетов от узла-источника до любого узла-получателя (англ. packet loss ratio, PLR) не превышала некоторого заранее заданного значения. Это требование выполнить сложнее, чем в проводных сетях, так как в беспроводных сетях вероятность ошибки при попытке передачи может принимать любые значения из диапазона от нуля до единицы, в то время как в проводных сетях она либо близка к нулю, либо равна единице в случае отказа звена сети. Кроме того, возникает *задача распределения максимально допустимой доли потерянных пакетов между звеньями многоадресного маршрута* от узла-источника до узла-получателя.

Простейшим решением этой задачи является равномерное распределение PLR[2] по звеньям маршрута. В частности, в работе [8] использован имено этот подход без какой-либо оценки его эффективности.

В данной работе поставленная задача рассмотрена для случая применения протоколом канального уровня методов Directed Multicast Service (DMS) и Groupcast with Unsolicited Retries (GCR-U) для надежной многоадресной передачи, стандартизованных для сетей Wi-Fi в [9] в 2012 г. Для некоторых частных случаев получены точные решения в явном виде. Для общего случая предложены приближенные алгоритмы распределения максимально допустимой доли потерянных пакетов между звеньями многоадресного маршрута в беспроводной сети, использующие “жадную” стратегию, и выполнено исследование чувствительности эффективости работы предложенных алгоритмов к входным параметрам, таким как число узлов, топология маршрута и другим. Под эффективностью в данном случае понимается выигрыш в стоимости маршрута по сравнению со случаем равномерного распределения или проигрыш по сравнению с наилучшим распределением, которое находится методом перебора. Сравнительный анализ показал, что предложенные алгоритмы дают кратный выигрыш во всех диапазонах вероятности ошибки при попытке передачи по звену маршрута (англ. packet error rate, PER).

Данная работа структурирована следующим образом. В разделе 2 описаны исследуемые методы передачи с контролем надежности доставки пакета. Раздел 3 посвящен частному случаю распределения PLR по пути (цепочке звеньев без ветвлений), для которого удается получить аналитическое решение в явном виде. В разделе 4 представлены результаты исследования задачи в общем виде и проведена оценка выигрыша в стоимости маршрута для оптимального распределения PLR в случае использования метода передачи DMS. В разделе 5 описаны предложенные в работе алгоритмы распределения PLR в случае использования метода передачи GCR-U и даны численные результаты моделирования, доказывающие эффективность алгоритмов. В заключении в разделе 6 намечены возможные направления дальнейшего исследования.

2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть известно некоторое дерево многоадресной рассылки T, каждая вершина $i \in T$ которого соответствует ретранслятору маршрута, а каждая дуга (i, j) — соединению между i-м и j-м узлами маршрута. Пусть известна вероятность неуспешной попытки передачи пакета по соединению (i, j) — p_{ij}. Пусть также задано множество получателей маршрута D. Необходимо найти настройки количества попыток передачи на каждом узле маршрута такие, что вероятность доставки пакетов до каждого получателя не меньше $1 - PLR$.

Заметим, что без ограничения общности можно полагать, что множество D совпадает с множеством листьев дерева T. В самом деле, если какой-то лист из T не принадлежит D, то вести передачу до него нет смысла и его можно исключить из дерева. Если существует какой-то получатель, не являющийся листом T, ограничение на PLR для него выполнено заведомо, если выполнено ограничение на PLR для какого-либо его листа.

---

[2] В случае одноадресного маршрута (пути) мы называем распределение PLR равномерным, если вероятность *успешной* доставки пакета одинакова для всех звеньев этого маршрута. Если задана максимально допустимая доля потерянных пакетов от источника до получателя, x, а количество звеньев в пути равно n, то на каждое звено должна приходится вероятность успешной доставки $p_{suc} = (1 - x)^{1/n}$. В случае многоадресного маршрута (мы рассматриваем только маршруты в классе деревье) звено может принадлежать нескольким путям к разным получателям. В рамках каждого пути вычисляется свое значение p_{suc}, и из всех этих значений выбирается максимальное, которое и приписывается звену многоадресного маршрута как целого.

Многоадресный маршрут должен занимать как можно меньше канальных ресурсов сети. Под канальными ресурсами сети в данной работе понимается среднее время занятия среды при передаче данных по многоадресному маршруту, пропорциональное суммарному по всем ретрансляторам среднему количеству попыток передачи. Поэтому настройки количества попыток передачи на ретрансляторах дерева должны быть таковы, что среднее количество попыток передачи на всех ретрансляторах дерева, также называемое стоимостью дерева $Cost$ должно быть минимально.

Рассмотрим постановку задачи для конкретных методов передачи:

2.1. Постановка задачи для метода DMS

Метод DMS был впервые определен в дополнении к стандарту IEEE 802.11v. Идея метода заключается в поочередной одноадресной передаче всем приемникам каждого поступившего многоадресного пакета. Передача ведется либо пока приемник не ответит положительным подтверждением о приеме пакета, либо пока не будет исчерпан лимит на количество попыток передачи до данного приемника.

Обозначим для каждого ретранслятора i известное максимальное количество попыток передачи n_{ij} до каждого из его приемников $j \in J$. Среднее количество попыток передачи, произведенное ретранслятором i равно:

$$n_{av}(i, J) = \sum_{j \in J} \frac{1 - p_{ij}^{n_{ij}}}{1 - p_{ij}}, \tag{1}$$

Стоимость дерева таким образом равна:

$$Cost = \sum_{i \in T} n_{av}(i).$$

Обозначим $(s \to d)$ путь от узла s до узла d на дереве T. Тогда условие, что каждому получателю $d \in D$ обеспечена требуемая надежность выглядит как:

$$\prod_{i \in (s \to d)} (1 - p_{ij}^{n_{ij}}) \geq 1 - PLR$$

2.2. Постановка задачи для метода GCR-U

Метод GCR-U является частью дополнения к стандарту IEEE 802.11aa. Каждый пакет, передаваемый с помощью GCR-U широковещается некоторое фиксированное число раз. Узлы-приемники никак не сигнализируют об успешном приеме переданных пакетов. Поскольку количество попыток передачи каждым ретранслятором i фиксировано и равно n_i, общая стоимость дерева равна:

$$Cost = \sum_{i \in T} n_i. \tag{2}$$

Ограничение на надежность выглядит следующим образом:

$$\prod_{i \in (s \to d)} (1 - p_{ij}^{ni}) \geq 1 - PLR \tag{3}$$

В работе исследуется поиск оптимального распределения n_i на ретрансляторах с целью минимизации стоимости дерева с выполнением ограничения на PLR.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ В СЛУЧАЕ ПУТИ (ЦЕПОЧКИ ЗВЕНЬЕВ БЕЗ ВЕТВЛЕНИЙ)

После построения дерева может оказаться, что маршрут до одного или даже нескольких получателей представляет собой участок без ветвлений. Передача пакета по такому участку по сути является одноадресной, поэтому отдельное изучение этого случая также носит важный характер. Для упрощения расчетов, в этом и следующем разделе предполагается, что число попыток передачи является действительным числом, а не натуральным. Оказывается, в сделанных предположениях удается найти точное решение задачи.

Пусть дерево T представляет из себя путь из N дуг. Пронумеруем вершины, считая от корня, приписав каждой вершине ее порядковый номер в пути i. На каждой дуге задана вероятность неуспешной попытки передачи p_i, $i = \overline{1,N}$, а каждой вершине, принадлежащей маршруту, припишем число попыток передачи n_i, $i = \overline{1,N}$. Пусть известна функция стоимости ретранслятора $C(p,n)$, одинаковая для всех вершин маршрута. Необходимо так распределить количество попыток передачи n_i, чтобы, с одной стороны, удовлетворить PLR от вершины-источника до вершин назначения, а с другой, минимизировать суммарную стоимость маршрута.

Запишем уравнения для полной стоимости и условия на PLR:

$$Cost = \sum_{i=1}^{N} C(p_i, n_i), \tag{4}$$

$$\prod_{i=1}^{N} (1 - p_i^{n_i}) = 1 - PLR. \tag{5}$$

Требуется найти минимум функции (4) при наличии связей (5). Для решения данной задачи построим функцию лагранжа:

$$L = Cost + \lambda \cdot \left(\prod_{i=1}^{N} (1 - p_i^{n_i}) - 1 + PLR \right), \tag{6}$$

где λ — неизвестный множитель лагранжа. Для отыскания экстремума продифференцируем (6) по n_i и приравняем производную нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial n_i} = \frac{\partial C}{\partial n_i} + \lambda \cdot \left(-\ln p_i \cdot p_i^{n_i} \prod_{j=1, j\neq i}^{N} (1 - p_j^{n_j}) \right) = 0, \quad i = \overline{1,N},$$

Поделив полученное уравнение на $\frac{\partial C}{\partial n_i}$, а второе слагаемое умножив на $\frac{1-p_i^{n_i}}{1-p_i^{n_i}}$, получим

$$1 + \lambda \cdot \left(-\frac{\ln p_i \cdot p_i^{n_i}}{\frac{\partial C}{\partial n_i} \cdot (1 - p_i^{n_i})} \prod_{j=1}^{N} (1 - p_j^{n_j}) \right) = 0, \quad i = \overline{1,N},$$

что после несложных преобразований приводится к виду

$$\frac{\ln p_i \cdot p_i^{n_i}}{\frac{\partial C}{\partial n_i} \cdot (1 - p_i^{n_i})} = \frac{1}{\lambda \cdot \prod_{j=1}^{N} (1 - p_j^{n_j})} = I, \quad i = \overline{1,N}. \tag{7}$$

Правая часть уравнения (7) не зависит от номера вершины i, значит левая часть этого уравнения тоже должна быть независима от i. Иными словами, величина I является инвариантом для всех вершин дерева при оптимальном распределении. Таким образом, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\ln p_i \cdot p_i^{n_i}}{\frac{\partial C}{\partial n_i} \cdot (1 - p_i^{n_i})} = I, \\ \prod\limits_{i=1}^{N} (1 - p_i^{n_i}) = 1 - PLR, \end{cases} \tag{8}$$

где I — инвариант, одинаковый для всех вершин.

Решение системы (8) для каждого метода передачи нужно изучать отдельно.

3.1. Метод DMS

Для DMS функция стоимости для одной вершины в соответствии с (1) имеет вид:

$$C(n, p) = \frac{1 - p^n}{1 - p}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и дифференцируя, получаем, что в случае DMS инвариантом будет цена:

$$\frac{1 - p^n}{1 - p} = I. \tag{10}$$

Выражая все $1 - p_j^{n_j}$ через I и подставляя в (5), получим уравнение относительно I:

$$I^N \cdot \prod_{j=1}^{N} (1 - p_j) = 1 - PLR.$$

Решая это уравнение и используя (10), находим выражения для n_i в явном виде:

$$n_i = \left\lceil \log_{p_i} \left(1 - (1 - p_i) \left(\frac{1 - PLR}{\prod_{j=1}^{N} (1 - p_j)} \right)^{1/N} \right) \right\rceil. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (4), можно получить явное выражение для оптимальной стоимости:

$$Cost_{opt} = N \left(\frac{1 - PLR}{\prod_{j=1}^{N} (1 - p_j)} \right)^{\frac{1}{N}}. \tag{12}$$

Полученное выражение является нижней границей стоимости в рассмотренном случае. При выводе формулы (12) количество попыток передачи считалось непрерывным, что не соответствует действительности. Из-за дискретности значений попыток передачи значение стоимости пути всегда будет несколько выше.

3.2. Метод GCR-U

В случае метода доступа GCR-U функция стоимости для одной вершины в соответствии с (2) имеет вид:

$$C(n, p) = n.$$

Аналогично случаю с DMS определяем, что инвариантом является величина

$$\frac{\ln p_i \cdot p_i^{n_i}}{(1 - p_i^{n_i})} = I.$$

Для решения системы (8) поступим так же, как и в предыдущем пункте: выразим все $1 - p_j^{n_j}$ через I.

$$1 - p_j^{n_j} = \frac{\ln p_j}{I + \ln p_j}, \quad j = \overline{1, N}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (5), после несложных преобразований получаем уравнение относительно I:

$$\prod_{j=1}^{N} (I + \ln p_j) = \frac{\prod_{j=1}^{N} \ln p_j}{1 - PLR}. \tag{14}$$

Полученная система не допускает решения в радикалах, но в виду того, что левая часть уравнения (14) является монотонной функцией I, а правая часть — константа, уравнение допускает численное решение, из которого находится I, зная который можно определить необходимые оптимальные числа попыток передачи на каждом узле, используя (13):

$$n_i = \left\lceil \log_{p_i} \frac{I}{I + \ln p} \right\rceil .$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ В СЛУЧАЕ ГРУППОВОЙ РАССЫЛКИ

4.1. DMS

Рассмотрим теперь групповую рассылку с помощью метода DMS. В силу особенностей DMS достаточно рассмотреть частный случай, когда из источника выходит ровно одна дуга. Рассмотрим дерево глубины 3. Способ, выбранный для решения задачи, может быть обобщен и на дерево большей глубины, но это бы усложнило изложение и вид получающихся формул.

Пусть на источнике максимальное количество попыток передачи равно n, и из него выходит дуга с вероятонстью ошибки p. Из единственного ретранслятора глубины 1 выходит N_1 дуг, вероятность ошибки на каждой из которых равна p_{1i}, а максимальное число попыток установлено в n_{1i}, $i = \overline{1, N_1}$. Из каждого из N_1 ретрансляторов глубины 2 выходит N_{2i}, дуг, которым приписаны вероятности ошибки и число попыток передачи p_{2ij}, n_{2ij}, $j = \overline{1, N_{2i}}$. Полная стоимость дерева и вероятность доставки пакета до концевых вершин равны соответственно:

$$Cost = \frac{1 - p^n}{1 - p} + \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1 - {p_{1i}}^{n_{1i}}}{1 - p_{1i}} + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_{2i}} \frac{1 - {p_{2ij}}^{n_{2ij}}}{1 - p_{2ij}}, \tag{15}$$

$$(1 - p^n)(1 - p_{1i}^{n_{1i}})(1 - p_{2ij}^{n_{2ij}}) = 1 - PLR, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_{2i}}. \tag{16}$$

Получаем задачу на поиск минимума функции (15) при наличии связей (16). Поиск условного экстремума проведем с помощью метода множителей Лагранжа, т.е. будем искать минимум следующей функции:

$$F = Cost + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_{2i}} \mu_{ij} [(1 - p^n)(1 - p_{1i}^{n_{1i}})(1 - p_{2ij}^{n_{2ij}}) - (1 - PLR)], \tag{17}$$

где μ_{ij} — неизвестные множители Лагранжа. Продифференцируем (17) по n_{2ij}:

$$\frac{\partial F}{\partial n_{2ij}} = \frac{-\ln p_{2ij} \cdot p_{2ij}^{n_{2ij}}}{1 - p_{2ij}} + \mu_{ij}(1 - p^n)(1 - p_{1i}^{n_{1i}})(-\ln p_{2ij} \cdot p_{2ij}^{n_{2ij}}) = 0,$$

отсюда

$$\mu_{ij} = -\frac{1}{(1 - p_{2ij})(1 - p^n)(1 - p_{1i}^{n_{1i}})}, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_{2i}}. \tag{18}$$

Таким образом, мы получили выражения для μ_{ij}. Продифференцируем (17) по n_{1i}:

$$\frac{\partial F}{\partial n_{1i}} = \frac{-\ln p_{1i} \cdot p_{1i}^{n_{1i}}}{1-p_{1i}} + \sum_{j=1}^{N_{2i}} \mu_{ij}(1-p^n)(-\ln p_{1i} \cdot p_{1i}^{n_{1i}})(1-p_{2ij}^{n_{2ij}}) = 0, \quad i = \overline{1, N_1}.$$

Перепишем это уравнение с учетом (18) и немного преобразуем его:

$$\frac{1-{p_{1i}}^{n_{1i}}}{1-p_{1i}} = \sum_{j=1}^{N_{2i}} \frac{1-{p_{2ij}}^{n_{2ij}}}{1-p_{2ij}}, \quad i = \overline{1, N_1}. \tag{19}$$

Продифференцируем (17) по n и приравняем производную нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{-\ln p \cdot p^n}{1-p} + \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_{2i}} \mu_{ij}(-\ln p \cdot p^n)(1-p_{1i}^{n_{1i}})(1-p_{2ij}^{n_{2ij}}) = 0.$$

Перепишем уравнение с учетом (18) и (19) и преобразуем его:

$$\frac{1-p^n}{1-p} = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1-p_{1i}^{n_{1i}}}{1-p_{1i}}. \tag{20}$$

Собирая вместе уравнения (19), (20) и (16) получаем систему уравнений для нахождения оптимальных значений максимальных попыток передачи для каждой дуги дерева:

$$\begin{cases} \dfrac{1-{p_{1i}}^{n_{1i}}}{1-p_{1i}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N_{2i}} \dfrac{1-{p_{2ij}}^{n_{2ij}}}{1-p_{2ij}}, \\ \dfrac{1-p^n}{1-p} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N_1} \dfrac{1-p_{1i}^{n_{1i}}}{1-p_{1i}}, \\ (1-p^n)(1-p_{1i}^{n_{1i}})(1-p_{2ij}^{n_{2ij}}) = 1-PLR, \\ i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_{2i}}. \end{cases} \tag{21}$$

Система (21) может быть решена в явном виде, но сначала стоит исследовать уравнения на разрешимость в области заданных параметров. Рассмотрим первое уравнение системы. Максимальное значение левой части достигается при $n_{1i} \to \infty$ и равно $\frac{1}{1-p_{1i}}$. Если учесть, что в реальных сетях p_{1i} редко превышает значение 0.5, то левая часть заведомо меньше 2. Правая часть, очевидно, всегда больше N_{2i}, и если предположить, что дерево сильно ветвится, то почти для всех узлов $N_{2i} > 2$. Таким образом правая часть превышает левую при любых значениях попыток передачи на дугах, и минимум функции стоимости недостижим в сделанных предположениях.

Для дальнейшего изучения свойств дерева и оптимального выбора параметров предлагается еще упростить модель. В последующем изложении будем предполагать, что расстояния от каждой вершины назначения до вершины-источника — две дуги, т.е. из вершины-источника выходит одно ребро с вероятностью потери пакета p и числом попыток передачи n. Из следующей вершины выходит N ребер, с вероятностями ошибки p_i и числом попыток передачи n_i, $i = \overline{1, N}$. В этом случае уравнения для стоимости и условия на PLR запишутся следующим образом:

$$Cost = \frac{1-p^n}{1-p} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1-{p_i}^{n_i}}{1-p_i}, \tag{22}$$

$$(1 - p^n)(1 - p_i^{n_i}) = 1 - PLR, \quad i = \overline{1, N}. \tag{23}$$

Для более детального изучения поведения стоимости в зависимости от параметров в этот раз будем искать минимум иначе: выразим $1 - p_i^{n_i}$ из (23) и подставим в (22). Получим уравнение зависимости стоимости от n:

$$Cost(n) = \frac{1 - p^n}{1 - p} + \frac{1 - PLR}{1 - p^n} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - p_i}.$$

Для удобства в дальнейшем обозначим $s = \frac{1}{1-p}$, $d = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i}$ и $z = 1 - p^n$. Заметим, что $0 < z < 1$. В новых обозначениях зависимость имеет вид:

$$Cost(z) = z \cdot s + \frac{(1 - PLR)d}{z}.$$

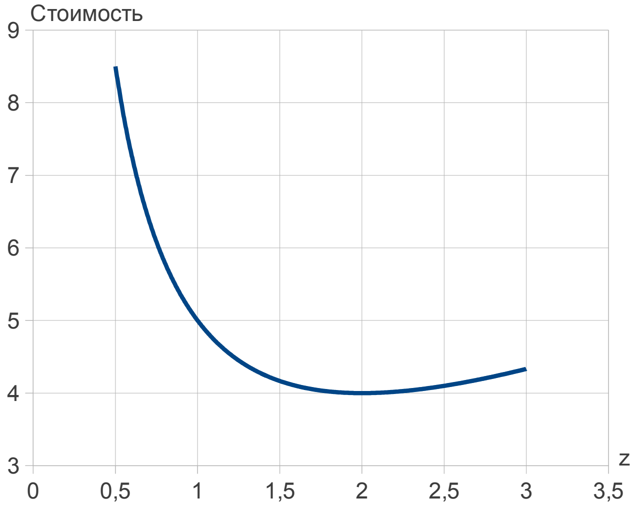

Рис. 1. Зависимость стоимости дерева от параметра $z = 1 - p^n$.

График этой зависимости представлен на Рис. 1. Минимум функция достигает при $z = \sqrt{\frac{(1-PLR)d}{s}}$. Как правило, это значение больше единицы, т.е. функция при допустимых значениях z убывает. Соответственно, для получения минимальной стоимости необходимо брать максимально возможное $z = 1$, чему соответствует неограниченное число попыток передачи на вершине-источнике n, как следствие, весь PLR должен быть сосредоточен на листьях дерева.

Полученный результат легко может быть обобщен на случай дерева большей глубины. Учитывая, что каждое из уравнений системы (21) не может быть выполнено, а функция стоимости в области допустимых параметров убывает, для достижения минимума необходимо положить число попыток передачи для всех вершин кроме листьев неограниченным, сконцентрировав, таким образом, весь PLR на конечных станциях.

Наконец, следует учесть дискретность значений n_i для конечных ретрансляторов. Для выполнения PLR необходимо брать

$$n_i = \lceil \log_{p_i} PLR \rceil.$$

Из-за дискретности значений n_i “в запасе” еще остается $PLR' = 1 - \frac{1-PLR}{1-p_i^{n_i}}$, который разумно передать на следующий уровень дерева, ограничив там число попыток передачи величиной

$$n = \lceil \log_{p_i} PLR' \rceil,$$

продолжая эту процедуру до достижения вершины-источника. В процессе такого распределения попыток передачи может встретиться участок дерева, на котором все таки достигается минимум функции стоимости. Как правило, это будут части дерева, в которых из вершины выходит одно ребро. В таком случае эти участки необходимо рассматривать отдельно и распределять на них попытки передачи аналогично случаю одноадресной рассылки, исходя из оставшегося PLR для этих вершин в соответствии с формулами (11).

В заключение, оценим выигрыш в стоимости, получаемый при оптимизации дерева. Обозначим множество всех дуг дерева T. Множество дуг, входящих непосредственно в вершины-получатели, обозначим D, а множество остальных дуг — S, таким образом, $T = S \cup D$. Каждой дуге $(i, j) \in T$ приписана вероятность неуспешной попытки передачи p_{ij} и ограничение сверху на количество попыток передачи n_{ij}. Во введенных выше обозначениях полная стоимость дерева вычисляется по формуле:

$$Cost = \sum_{(i,j)\in T} \frac{1 - p_{ij}^{n_{ij}}}{1 - p_{ij}} = \sum_{(i,j)\in S} \frac{1 - p_{ij}^{n_{ij}}}{1 - p_{ij}} + \sum_{(i,j)\in D} \frac{1 - p_{ij}^{n_{ij}}}{1 - p_{ij}}. \tag{24}$$

Стоимость дерева будет максимальной в случае, когда количество попыток передачи на каждой дуге неограничено, т.е. $n_{ij} = \infty$. Очевидно, что при таком распределении числа попыток передачи условие ограничения доли потерянных пакетов выполнено. При этом максимально возможная стоимость дерева в соответствии с (24) равна:

$$Cost_{max} = \sum_{(i,j)\in S} \frac{1}{1 - p_{ij}} + \sum_{(i,j)\in D} \frac{1}{1 - p_{ij}} = s + d,$$

$$s = \sum_{(i,j)\in S} \frac{1}{1 - p_{ij}}, \quad d = \sum_{(i,j)\in D} \frac{1}{1 - p_{ij}}.$$

Для оценки минимально возможного значения стоимости маршрута учтем, что для того, чтобы вероятность успешной доставки пакета от источника до каждого из получателей превышала значение $1 - PLR$, необходимо, чтобы вероятность успешной доставки пакета на *каждом* шаге маршрута превышала это значение, иными словами, необходимо $1 - p_{ij}^{n_{ij}} \geq 1 - PLR \quad \forall (i, j) \in T$. При этом минимально возможная стоимость дерева равна

$$Cost_{min} = \sum_{(i,j)\in T} \frac{1 - p_{ij}^{n_{ij}}}{1 - p_{ij}} \geq (1 - PLR) \sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{1 - p_{ij}} = (1 - PLR) \cdot (s + d).$$

Таким образом, максимальный выигрыш, который можно получить при оптимизации дерева равен

$$\epsilon_{max} = 1 - \frac{Cost_{min}}{Cost_{max}} \leq PLR. \tag{25}$$

То есть, независимо от методов распределения ограничений на числа попыток передачи по дугам один метод может проигрывать другому не более PLR.

Можно сделать более точную оценку выигрыша при дополнительных предположениях. Допустим, что уравнения системы (21) не имеют решения при заданных параметрах дерева (выше было показано, что такая ситуация встречается чаще всего). При этом допущении наилучшим является следующее распределение ограничений на число попыток передачи: на дугах $(i, j) \in S$ число попыток должно быть неограниченно, $n_{ij} = \infty$, а на дугах

$(i,j) \in D$ ограничения назначаются так, чтобы выполнялось условие на долю потерянных пакетов $1 - p_{ij}^{n_{ij}} \geq 1 - PLR$. В итоге получаем следующее значение оптимальной стоимости:

$$Cost_{opt} = \sum_{(i,j)\in S} \frac{1 - p_{ij}^{n_{ij}}}{1 - p_{ij}} + \sum_{(i,j)\in D} \frac{1 - p_{ij}^{n_{ij}}}{1 - p_{ij}} \geq$$

$$\geq \sum_{(i,j)\in S} \frac{1}{1 - p_{ij}} + (1 - PLR) \sum_{(i,j)\in D} \frac{1}{1 - p_{ij}} = s + (1 - PLR) \cdot d.$$

В таком случае максимально возможный выигрыш не превышает значения

$$\epsilon_{opt} = 1 - \frac{Cost_{opt}}{Cost_{max}} \leq PLR \cdot \frac{d}{s + d}. \tag{26}$$

Окончательно, оценим выигрыш, получаемый при оптимизации равномерного распределения PLR по дугам маршрута. Распределение будем считать равномерным, если вероятность успешной попытки передачи одинакова для всех дуг дерева. Предположим, что расстояние (в смысле количества дуг) от самого удаленного получателя до источника — N дуг. В этом случае необходимо, чтобы вероятность успешной попытки передачи для всех $(i,j) \in T$ равнялась $1 - p_{ij}^{n_{ij}} = (1 - PLR)^{1/N}$. Тогда полная стоимость дерева при равномерном распределении будет равна

$$Cost_{even} = \sum_{(i,j)\in T} \frac{1 - p_{ij}^{n_{ij}}}{1 - p_{ij}} = (1 - PLR)^{1/N} \sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{1 - p_{ij}} = (1 - PLR)^{1/N}(s + d).$$

При этом получается следующее значение выигрыша в стоимости оптимального распределения по сравнению с равномерным:

$$\epsilon_{even} = 1 - \frac{Cost_{opt}}{Cost_{even}} = 1 - \frac{1}{(1 - PLR)^{1/N}} \left(1 - PLR\frac{d}{d + s}\right) \tag{27}$$

Учитывая малость PLR и раскладывая (27) в ряд, получим следующее выражение:

$$\epsilon_{even} = PLR \left(\frac{d}{s + d} - \frac{1}{N}\right) + o(PLR). \tag{28}$$

Таким образом, выражения (25), (26) и (28) дают оценки возможных выигрышей в зависимости от рассматриваемого случая. При этом независимо от способов распределения ограничения попыток передачи и параметров маршрута, один способ не может выиграть у другого более PLR. В некоторых особых случаях возможны более точные оценки, например, в случае двухшагового дерева при значении $PLR = 0.1$ выигрыш оптимального распределения по сравнению с равномерным редко превышает 5%.

4.2. GCR-U

Рассмотрим многоадресную рассылку по дереву глубины 3. Пусть из корня дерева выходит N_1 дуг, для каждой из которых известна вероятность неуспешной попытки передачи p_{1i}, $i = \overline{1, N_1}$, а корень дерева делает n_1 попыток передачи. Из вершин глубины 1 выходит N_{2i} дуг с вероятностями ошибки p_{2ij}, а число попыток на них равно n_{2i}, $j = \overline{1, N_{2i}}$. Из вершин глубины 2 выходит N_{3ij} дуг, котором приписаны вероятности ошибки и число попыток передачи p_{3ijk}, n_{3ij}, $k = \overline{1, N_{2ij}}$. В силу особенностей широковещательной рассылки GCR-U можно считать, что из вершин, удаленных на две дуги от источника, выходит по одной дуге, которой припишем вероятность потери пакета $p_{3ij} = \max_k p_{3ijk}$. При этом полная стоимость и условие PLR для каждой вершины-получателя запишутся соответственно:

$$Cost = n_1 + \sum_{i=1}^{N_1} n_{2i} + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_{2i}} n_{3ij}. \tag{29}$$

$$(1 - p_{1i}^{n_1})(1 - p_{2ij}^{n_{2i}})(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}}) = 1 - PLR, \tag{30}$$

$$i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_{2i}}.$$

Аналогично предыдущему разделу получаем задачу на поиск минимума функции (29) при наличии связей (30). Построим функцию Лагранжа:

$$F = Cost + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_{2i}} \mu_{ij}[(1 - p_{1i}^{n_1})(1 - p_{2ij}^{n_{2i}})(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}}) - (1 - PLR)], \tag{31}$$

где μ_{ij} — неизвестные множители Лагранжа. Для отыскания экстремума продифференцируем (31) по n_{3ij} и приравняем производную нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial n_{3ij}} = 1 + \mu_{ij}(1 - p_{1i}^{n_1})(1 - p_{2ij}^{n_{2i}})(-\ln p_{3ij} \cdot p_{3ij}^{n_{3ij}}) = 0, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_{2i}}.$$

Из последнего уравнения получим явные выражения для μ_{ij}:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{(1 - p_{1i}^{n_1})(1 - p_{2ij}^{n_{2i}}) \ln p_{3ij} \cdot p_{3ij}^{n_{3ij}}}, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_{2i}}. \tag{32}$$

Продифференцируем (31) по n_{2i}:

$$\frac{\partial F}{\partial n_{2i}} = 1 + \sum_{j=1}^{N_{2i}} \mu_{ij}(1 - p_{1i}^{n_1})(-\ln p_{2ij} \cdot p_{2ij}^{n_{2i}})(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}}) = 0, \quad i = \overline{1, N_1}.$$

Перепишем это уравнение с учетом (32) и немного преобразуем его:

$$1 = \sum_{j=1}^{N_{2i}} \frac{\ln p_{2ij} \cdot p_{2ij}^{n_{2i}}(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}})}{\ln p_{3ij} \cdot p_{3ij}^{n_{3ij}}(1 - p_{2ij}^{n_{2i}})}, \quad i = \overline{1, N_1}. \tag{33}$$

Продифференцируем (31) по n_1:

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = 1 + \sum_{1=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_{2i}} \mu_{ij}(-\ln p_{1i} \cdot p_{1i}^{n_1})(1 - p_{2ij}^{n_{2i}})(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}}) = 0.$$

Перепишем с учетом (32):

$$1 = \sum_{1=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_{2i}} \frac{\ln p_{1i} \cdot p_{1i}^{n_1}(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}})}{\ln p_{3ij} \cdot p_{3ij}^{n_{3ij}}(1 - p_{1i}^{n_1})}. \tag{34}$$

Собирая вместе уравнения (33), (34) и (30) получаем систему уравнений для нахождения оптимальных значений максимальных попыток передачи для каждой дуги дерева:

$$\begin{cases} 1 = \sum_{j=1}^{N_{2i}} \dfrac{\ln p_{2ij} \cdot p_{2ij}^{n_{2i}}(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}})}{\ln p_{3ij} \cdot p_{3ij}^{n_{3ij}}(1 - p_{2ij}^{n_{2i}})}, \\ 1 = \sum_{1=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_{2i}} \dfrac{\ln p_{1i} \cdot p_{1i}^{n_1}(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}})}{\ln p_{3ij} \cdot p_{3ij}^{n_{3ij}}(1 - p_{1i}^{n_1})}, \\ (1 - p_{1i}^{n_1})(1 - p_{2ij}^{n_{2i}})(1 - p_{3ij}^{n_{3ij}}) = 1 - PLR, \\ i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_{2i}}. \end{cases}$$

Полученная система не допускает решения в радикалах. Использование численных методов также осложнено нелинейностью уравнений, поэтому в дальнейшем изложении предлагаются дискретные жадные алгоритмы распределения числа попыток передачи в случае пути и многоадресной рассылки методом GCR-U.

5. ДИСКРЕТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ

5.1. GCR-U в случае однонаправленной передачи

Построим дискретный алгоритм распределения числа попыток передачи в случае одноадресной рассылки. Пронумеруем все вершины, начиная с источника, в порядке возрастания. На каждой вершине обозначим число попыток передачи как n_i, $i = \overline{1, N}$. Необходимо найти n_i такие, что с одной стороны $\sum_{i=1}^{N} n_i$ была минимальной, а с другой, было выполнено условие на PLR (3).

Будем искать оптимальное распределение с помощью жадного итеративного алгоритма, увеличивая на каждом шаге количество попыток передачи на единицу на некотором ретрансляторе. Пусть на некотором шаге алгоритма на i-м ретрансляторе выставлено n_i передач, но условие (3) еще не выполнено. Найдем вершину на которой с точки зрения жадной стратегии необходимо увеличить количество попыток передачи. Для выбора вершины рассмотрим функцию вероятности доставки пакета от источника до получателя:

$$F(n) = \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i^{n_i}).$$

Согласно жадной стратегии, нужно увеличивать число попыток передачи на той вершине, которая дает максимальный прирост F: $\Delta F_j = F(n_j + 1) - F(n_j)$.

$$\Delta F_j = (1 - p_j^{n_j+1}) \cdot \prod_{i \neq j}^{N} (1 - p_i^{n_i}) - (1 - p_j^{n_j}) \cdot \prod_{i \neq j}^{N} (1 - p_i^{n_i}) =$$

$$= (p_j^{n_j} - p_j^{n_j+1}) \cdot \prod_{i \neq j}^{N} (1 - p_i^{n_i}) = \frac{p_j^{n_j}(1 - p_j)}{(1 - p_j^{n_j})} \cdot \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i^{n_i}) = f_j \cdot \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i^{n_i}),$$

где $f_j = \frac{p_j^{n_j}(1-p_j)}{(1-p_j^{n_j})}$.

Таким образом, ΔF_j полностью определяется параметром f_j и для наискорейшего роста F необходимо выбирать вершину, у которой этот параметр максимальный. Жадный алгоритм выглядит следующим образом:

1. Инициализируем для всех i: $n_i = 1$.
2. Если ограничение на PLR выполнено $F(n) \geq 1 - PLR$, решение найдено. Иначе
3. Находим j, для которого максимальна величина f_j и увеличиваем n_j на 1. Переходим к шагу 2.

5.2. GCR-U в случае многоадресной передачи

Предложим теперь алгоритмы распределения попыток передачи, если дерево T не является простым путем.

Алгоритм 1:

1. Для каждого $i \in T$ инициализируем $n_i = \lceil \log_{p_i} PLR \rceil$, где $p_i = max_{j \in J}\{p_{ij}\}$.
2. Если для каждого $d \in D$ выполнено условие $F_d \geq 1 - PLR$, где F_d — вероятность успешной доставки пакета от источника до данного получателя d, — распределение найдено, иначе:
3. Обозначим множество получателей, для которых еще не выполнено условие на PLR D'. Определим множество узлов $M \subset T$ следующим образом: для каждого $d \in D'$ найдем узел $i \in (s \to d)$, у которого величина f_i максимальна и добавим этот узел в M.
4. Среди всех $i \in M$ находим узел минимальной глубины. Увеличиваем число попыток передачи на этом узле n_i на единицу. Переходим к шагу 2.

Алгоритм 2:

1. Для каждого $i \in T$ инициализируем $n_i = \lceil \log_{p_i} PLR \rceil$, где $p_i = max_{j \in J}\{p_{ij}\}$.
2. Если для каждого $d \in D$ выполнено условие $F_d \geq 1 - PLR$ — распределение найдено, иначе:
3. Выбираем $i \in T$ таким образом, чтобы максимизировать величину $\frac{\Delta P_i}{\Delta C_i}$, где ΔC_i — приращение стоимости дерева, при увеличении числа попыток передачи на одну на вершине i ($\Delta C_i = 1$), а $\Delta P_i = \sum_{d \in D'} \Delta P_i(d)$ — сумма приращений вероятностей доставки пакетов до получателей, которым на данном шаге не обеспечена требуемая надежность, при увеличении числа попыток передачи на узле i на одну. Приращение вероятности доставки до получателя считается как $\Delta P_i(d) = min\{\Delta F_d, 1 - PLR - F_d(n+1)\}$, то есть минимум из приращения PLR на получателе и остаточной доле PLR, необходимой до достижения необходимой надежности до получателя.

   Когда вершина i найдена, увеличиваем на ней число попыток передачи на 1 и переходим к шагу 2.

5.3. Оценка эффективности

Для оценки эффективности предложенных в данном разделе жадных алгоритмов проведен их сравнительный анализ с простейшим алгоритмом равномерного распределения PLR и с точным алгоритмом — полным перебором — на двух множествах тестовых маршрутов, T_1 и T_2.

В качестве множества T_1 рассмотрен класс деревьев глубиной $a \in \{2, \ldots, 4\}$, таких что степени всех вершин дерева, кроме листьев, равны $b = const$ (см. на рис. 2 пример бинарного дерева глубиной $a = 4$). Численный расчет проводится для $b \in \{2, \ldots, 8\}$. На каждом дереве $t \in T_1$ значения p_{ij} вероятности ошибки при попытке передачи по каждой дуге $(i, j) \in t$ выбираются равновероятно из множества $\mathbb{P} \in \{(0.1; 0.3), (0.3; 0.5), (0.5; 0.7)\}$.

В качестве множества получателей D выбираются множества листьев каждого рассматриваемого дерева $t \in T_1$, характризуемого парой параметров $(a,\ b)$. Число получателей при этом равно b^a и является существенно разным для разных t. Иначе рассматриваемые тестовые маршруты можно представить так: рассматриваются деревья со степенями вершин $b \in \{2, \ldots, 8\}$ и глубиной $a = 4 = const$ (максимальной из рассматриваемых), а множеством получателей является множество потомков, лежащих на заданной глубине a', $a' \in \{2, \ldots, a\}$, этого дерева (см. рис. 2).

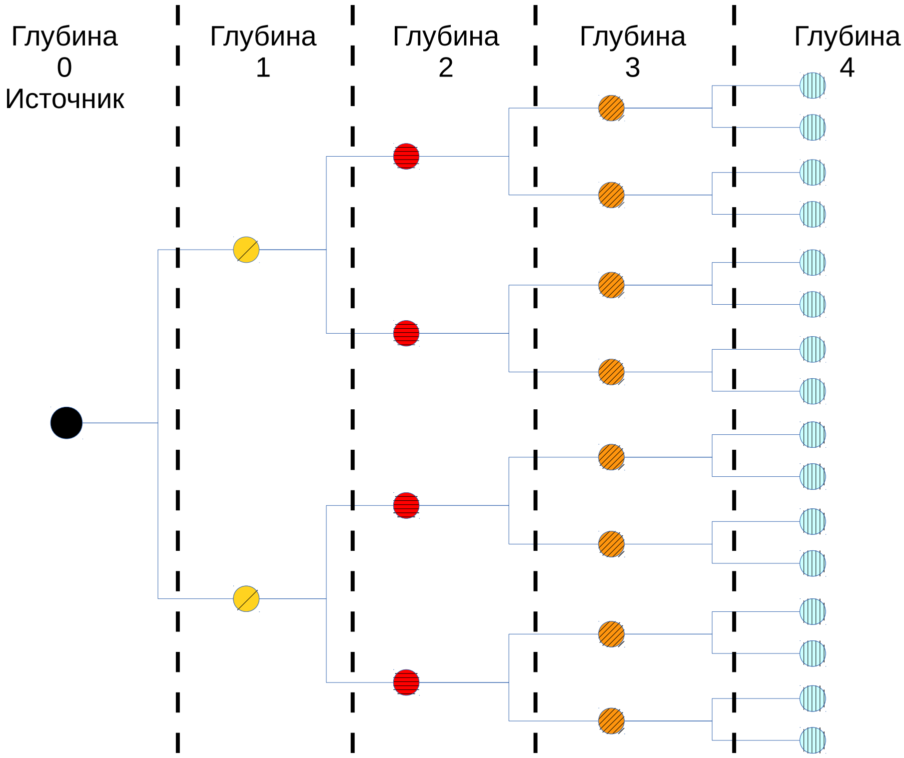

Рис. 2. Тестовый маршрут.

На рис. 3 приведены результаты оценки эффективности предложенных алгоритмов, а также простейшего алгоритма на подмножестве тестовых маршрутов T_1 с $b = \{2, 8\}$. В качестве меры эффективности алгоритмов выбрана величина L проигрыша в стоимости получаемого ими маршрута по сравнению с минимльной стоимостью, получаемой точным алгоритмом:

$$L = 100 \cdot (\frac{C}{C_{min}} - 1),$$

где C – стоимость маршрута, полученного исследуемым алгоритмом, а C_{min} – стоимость маршрута, найденного перебором.

Группы точек, образованные каждым из исследуемых алгоритмов, обведены овалами. В каждой группе — по три точки, соответствующие трем рассмотренным диапазонам $\mathbb{P}$. Взаимное расположение точек внутри овалов зависит от диапазона $\mathbb{P}$. Для случая дерева со степенью вершины $b = 8$ проигрыш L всех исследуемых алгоритмов точному алгоритму убывает вместе с $\mathbb{P}$ *независимо от глубины расположения получателей* a'. В частности, для Алгоритма 1 при $\mathbb{P} = (0.1;\ 0.3)$ проигрыш равен 8%, при $\mathbb{P} = (0.3;\ 0.5)$ — 5.5 %, а при $\mathbb{P} = (0.5;\ 0.7)$ — 2.5%. Аналогично для Алгоритма 2: при $\mathbb{P} = (0.1;\ 0.3)$ — 2.5%, при $\mathbb{P} = (0.3;\ 0.5)$ — 1.5 %, при $\mathbb{P} = (0.5;\ 0.7)$ — 0.5%.

Таким образом, оба предложенные алгоритма работают эффективнее в диапазонах больших $\mathbb{P}$. Вероятно, это связано с тем, что с увеличением вероятности ошибки при попытке

Рис. 3. Проигрыш L предложенных алгоритмов точному на маршрутах T_1 для случаев $b = 2$ (слева) и $b = 8$ (справа).

передачи увеличивается и необходимое число попыток передачи на каждой вершине для обеспечения требуемого PLR и, как следствие, увеличивается стоимость маршрута, в связи с чем относительная ошибка при распределении попыток передачи по вершинам приближенными алгоритмами уменьшается.

Для случая деревьев со степенями вершины $b = \{2, 4\}$ взаимное расположение точек зависит не только от $\mathbb{P}$, но и от a'. Однако видно, что предложенные алгоритмы при всех рассмотренных значениях a' и b проигрывают точному не более 10%, а выигрыш по сравнению с простейшим алгоритмом достигает 30%. При этом эффективность предложенных алгоритмов существенно меньше зависит от диапазона $\mathbb{P}$ и величин a' и b, чем эффективность простейшего алгоритма, что позволяет говорить о высокой устойчивости предложенных алгоритмов к значениям входных параметров.

Из полученных результатов также можно сделать вывод о том, что Алгоритм 2 эффективнее Алгоритма 1 во всех рассмотренных случаях. Причем при использовании Алгоритма 2 проигрыш оптимальному распределению не превышает 3%. При увеличении степени вершины множества точек, образованные 1-ым и 2-ым алгоритмами на рис. 3, сближаются и даже пересакаются, что позволяет говорить о повышении эффективности Алгоритма 1 с ростом числа получателей.

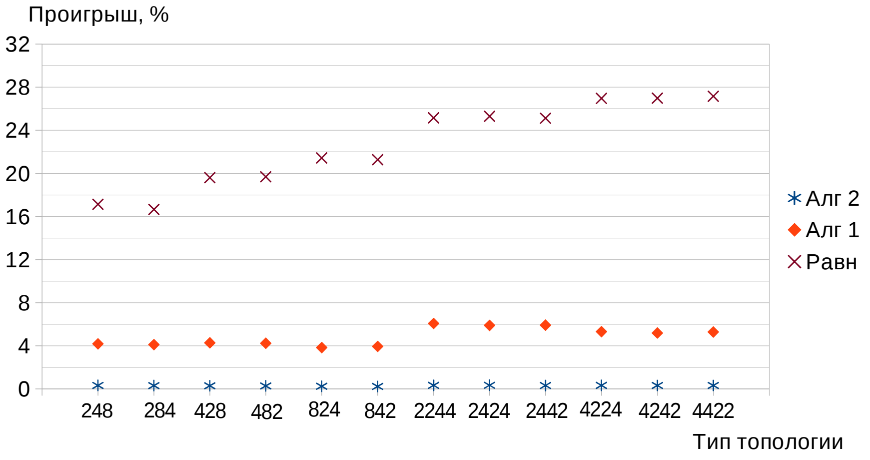

Рис. 4. Проигрыш L предложенных алгоритмов точному на маршрутах T_2.

В качестве второго множества тестовых маршрутов, T_2, рассмотрен класс деревьев с фиксированным числом получателей, N, но различными топологиями дерева. На рис. 4 приведены результаты этих расчетов для $N = 64$ в диапазоне $\mathbb{P} = (0.1;\ 0.7)$. По горизонтальной оси отложен вид типологии, где первая цифра — степень вершины корня, вторая цифра — степень вершин-соседей корня и т.д. Например, “824” означает, что из корня дерева выходят 8 дуг, из соседей корня — по 2 дуги, а из их соседей — по 4 дуги. Зависимости, представленные на графике, показывают, что алгоритмы являются достаточно устойчивыми к изменению топологии дерева и, несмотря на небольшие колебания, из всех рассмотренных приближенных алгоритмов наиболее эффективным оказывается Алгоритм 2, проигрывая оптимальному распределению не более 1% стоимости во всех рассмотренных вариантах топологии деревьев с фиксированным числом вершин. Аналогичные эксперименты были проведены для других диапазонов значений $\mathbb{P}$, однако во всех случаях результаты были аналогичными.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, полученные в этой работе показывают следующее. Простейший алгоритм равномерного распределения PLR по ретрансляторам многоадресного маршурта является оправданным при использовании метода DMS, в рабочем диапазоне значений требуемого PLR (до 5%) проигрывая оптимальному распределению не более 5%.

Для случая метода GCR-U в работе предложены два приближенных алгоритма. Оценки их эффективности на двух классах тестовых маршрутов показала, что Алгоритм 2 решает поставленную задачу эффективно во всех диапазонах вероятностей ошибки при попытке передачи и имеет слабую чувствительность к плотности сети и глубине маршрута. По сравнению с простейшим алгоритмом равномерного распределения PLR использование предложенного в работе Алгоритма 2 позволяет сократить стоимость маршрута до 30%.

В дальнейшем планируется изучить устойчивость алгоритмов при изменении параметров среды, таких как вероятность потери пакета, с течением времени. Данная задача достаточно остро стоит в сетях с быстро меняющимися условиями передачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karp, R.M., *Reducibility Among Combinatorial Problems*, In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations. New York: Plenum. (1971) pp. 85-103.

2. Takahashi, H., Matsuyama, A. *An approximate solution for the Steiner problem in graphs*, Math.Japonica, Vol.24 (1980) pp. 573-577.

3. Winter, P. *Steiner problem in networks: a survey*, Networks, Vol.17 (1987), pp. 129-167.

4. Gordeev, E.N., Tarastsov, O.G. *The Steiner problem: A survey*, Diskr. Mat., Vol. 5, Issue 2 (1993) pp. 3-28.

5. Mitja Bezensek, Borut Robic *A Survey of Parallel and Distributed Algorithms for the Steiner Tree Problem*, Int. J of Parallel Prog, Springer Science+Business Media, New York (2013)

6. *Akyildiz I.F., Wang X.* Wireless Mesh Networks. Wiley, 2009.

7. Ruiz, Pedro M., Gomezskarmeta Antonio F., *Approximating optimalmulticast trees in wireless multihop networks* In: 10th IEEE Symposium on Computers and Coommunications (ISCC) (2005), pp. 686-691.

8. A. Safonov, A. Lyakhov, A. Urgenson, O. Sokolova, *Wireless Groupcast Routing with Palette of Transmission Methods*, Multiple Access Communications, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7642 (2012) pp. 97-108

9. *IEEE Std 802.11aa-2012. IEEE Standard for Information technology – Telecommunications and information exchange between systems – Local and metropolitan area networks – Specific requirements Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications. Amendment 2: MAC Enhancements for Robust Audio Video Streaming*, IEEE Computer Society, 2012

Distribution of Maximum Allowed Packet Loss Ratio between Links of Groupcast Route in Wireless Networks

I.S. Kargin, D.A. Platov, A.A. Safonov

In the work we consider a problem of distribution of maximum allowed packet loss ratio between links of route from source to destination using methods of reliable groupcast transmission, standardized for Wi-Fi networks in 2012. We found explicit solutions for special cases. We propose heuristic greedy algorithms for general case and estimate their efficiency.

KEYWORDS: Quality of service, routing, GCR-U, DMS.