*Информационные процессы, Том 14, № 4, 2014, стр. 295–306*




# Анализ и оптимизация G-сети с многолинейными системами и доходами

**В. В. Науменко**

*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь*
*e-mail: victornn86@gmail.com*

Поступила в редколлегию 06.10.2014

**Аннотация**—Исследуется открытая марковская G-сеть массового обслуживания с многолинейными системами обслуживания и доходами в случае, когда параметры входящего потока и обслуживания заявок, а также вероятности переходов заявок между многолинейными системами зависят от времени. Предложена методика нахождения ожидаемых доходов систем сети, получены выражения для среднего числа заявок в системах. Сформулирована оптимизационная задача, связанная с максимизацией доходов и описано ее решение.
**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** G-сеть, многолинейные системы, ожидаемые доходы, оптимизационная задача, информационно-телекоммуникационная сеть.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для построения и исследования математических моделей информационно-телекоммуникационных сетей (ИТС), оценки качества их функционирования необходимо, чтобы такие модели учитывали как характерные особенности систем, так и возможное влияние различных дестабилизирующих факторов: внезапные сбои, попадание вирусов, потеря передаваемых или обрабатываемых данных. Для учета подобных факторов Э. Геленбе были предложены G-сети [1], в которых помимо потоков обычных (положительных) заявок рассматриваются также дополнительные пуассоновские потоки отрицательных заявок. В таких сетях при поступлении в систему сети отрицательная заявка уничтожает одну положительную заявку, если таковая имеется в наличии в данной системе, тем самым уменьшая число положительных заявок в системе на единицу. В работе [2] дан обзор литературы по G-сетям и показано, что стационарное распределение вероятностей состояний такой сети также представляется в мультипликативной форме. Важно заметить, что при попадании компьютерных вирусов в ИТС из-за потери информации или ее искажения она несет некоторые расходы или убытки. Их учет возможно осуществить, применив в качестве модели сеть массового обслуживания (МО) с доходами (НМ-сеть) [3] с положительными (обычными) и отрицательными заявками.

В работе [4] исследовалась марковская НМ-сеть в переходном режиме с положительными и отрицательными заявками. В такой сети отрицательная заявка, поступающая в некоторую систему сети, в которой имеется по крайней мере одна положительная заявка, мгновенно уничтожает одну из них и наносит убыток этой система массового обслуживания (СМО). При переходе положительной заявки из одной СМО в другую последняя получает некоторый, в общем случае случайный доход, а доход первой СМО уменьшается соответственно на эту величину. При предположении экспоненциального распределения времени обслуживания положительных заявок можно не заботиться о том, какая именно заявка уничтожается. После этого отрицательная заявка сразу же покидает сеть или уничтожается, если в данной СМО не было заявок и система вновь после обслуживания в ней положительных заявок получает некоторый доход.

Доходами от переходов в ИТС могут, к примеру, являться онлайн платежи и комиссия с них, денежные переводы от пользователей систем интернет-банкинга и других схожих систем. Заявками при этом являются запросы интернет пользователей, которые пользуются услугами онлайн-платежей, а отрицательными заявками могут быть вирусы (или программы нарушающие функционирование системы интернет-платежей) в таких ИТС или ICMP (Internet Control Message Protocol)-запросы в случае DDoS-атаки на ИТС такого рода.

В данной работе проведено исследование G-сети с доходами, но с многолинейными СМО. Рассмотрен случай, когда интенсивности входящих потоков положительных и отрицательных заявок и их обслуживания, а также вероятности переходов заявок между СМО зависят от времени. При этом предполагается, что доходы от переходов между состояниями сети являются случайными величинами с заданными средними значениями. Такая сеть может быть применена при моделировании изменения доходов, например, в ИТС при DDoS-атаке на эту сеть или при проникновении в нее вирусов.

## 2. НАХОЖДЕНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ СИСТЕМ СЕТИ

Рассмотрим открытую G-сеть МО с $n$ многолинейными СМО. В СМО $S_i$ извне (из системы $S_0$) поступает пуассоновский поток положительных заявок с интенсивностью $\lambda_{0i}^{+}(t)$ и пуассоновский поток отрицательных заявок с интенсивностью $\lambda_{0i}^{-}(t)$, $i = \overline{1,n}$. Все поступающие в сеть потоки заявок независимые. Пусть система $S_i$ содержит $m_i$ идентичных линий обслуживания, в каждой из которых длительности обслуживания положительных заявок в СМО $S_i$ в момент времени $t$ распределены по экспоненциальному закону с параметром $\mu_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Положительная заявка, обслуженная в СМО $S_i$ в момент времени $t$, с вероятностью $p_{ij}^{+}(t)$ направляется в СМО $S_j$ как положительная заявка, с вероятностью $p_{ij}^{-}(t)$ – как отрицательная заявка, и с вероятностью $p_{i0}(t) = 1 - \sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^{+}(t) + p_{ij}^{-}(t)\right)$ заявка уходит из сети во внешнюю среду (СМО $S_0$), $i,j = \overline{1,n}$. НМ-сети с обычными заявками, с зависимыми от времени их интенсивностями входящего потока и обслуживания, а также вероятностями перехода заявок СМО сети рассмотрены в [5]. Под состоянием сети в момент времени $t$ будем понимать вектор $k\,(t) = (k,t) = (k_1\,(t)\,, k_2\,(t)\,, \ldots, k_n\,(t))$, где $k_i\,(t)$ – число заявок в момент времени $t$ в системе $S_i$, $i = \overline{1,n}$.

Рассмотрим динамику изменения доходов некоторой системы $S_i$ сети. Обозначим через $V_i(t)$ ее доход в момент времени $t$. Пусть в начальный момент времени доход системы равен $V_i(0) = v_{i0}$. Доход этой СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно представить в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t,\, \Delta t), \tag{1}$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ – изменение дохода системы $S_i$ на интервале времени $[t, t + \Delta t)$, $i = \overline{1,n}$. Для нахождения этой величины выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время $\Delta t$ и изменения доходов этой СМО, связанные с данными событиями.

1. С вероятностью $\lambda_{0i}^{+}(t)\Delta t + o\,(\Delta t)$ в момент времени $t$ в систему $S_i$ из внешней среды поступит положительная заявка, которая принесет ей доход в размере $r_{0i}$, где $r_{0i}$ – случайная величина (СВ), математическое ожидание (м.о.) которой равно $M\ \{r_{0i}\} = a_{0i}$, $i = \overline{1,n}$.

2. С вероятностью $\lambda_{0i}^{-}(t)\Delta t + o\,(\Delta t)$ в систему $S_i$ в момент времени $t$ из внешней среды поступит отрицательная заявка, которая принесет ей доход (убыток) в размере $-\bar{r}_{0i}$, где $\bar{r}_{0i}$ – СВ с м.о. $M\,\{\bar{r}_{0i}\} = \bar{a}_{0i}$, $i = \overline{1,n}$.

3. Если в момент времени $t$ в системе $S_i$ находится $k_i\,(t)$ положительных заявок, то с вероятностью $\mu_i\,(t) \min\,(k_i(t), m_i)\, p_{i0}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ положительная заявка уйдет из сети во внешнюю среду, при этом общий объем доход СМО $S_i$ уменьшится на величину, равную $-R_{i0}$, где $M\,\{R_{i0}\} = b_{i0}$, $i = \overline{1,\,n}$.

4. Если в момент времени $t$ в системе $S_i$ находится положительная заявка, то после окончания ее обслуживания в СМО $S_i$ она направляется в СМО $S_j$ снова как положительная заявка с вероятностью $\mu_i(t)\min(k_i(t),m_i)\,p^+_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)$, $i,j=\overline{1,\,n},\ i\neq j$. При таком переходе доход системы $S_i$ уменьшится на величину $r_{ij}$, а доход системы $S_j$ увеличится на эту величину, где $M\{r_{ij}\}=a_{ij}$, $i,j=\overline{1,\,n},\ i\neq j$.

5. С вероятностью $\mu_i(t)\min(k_i(t),m_i)\,p^-_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)$ положительная заявка, обслуженная в СМО $S_i$, в момент времени $t$ направляется в СМО $S_j$ как отрицательная заявка $i,j=\overline{1,\,n},\ i\neq j$. При таком переходе доход системы $S_i$ уменьшится на величину $\bar r_{ij}$, а доход системы $S_j$ не измениться, где $M\{\bar r_{ij}\}=\bar a_{ij}$, $i,j=\overline{1,\,n},\ i\neq j$.

6. С вероятностью $1-\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda^+_{0j}(t)+\left(\lambda^-_{0j}(t)+\mu_j(t)\right)\min(k_j(t),m_j)\right]\Delta t+o(\Delta t)$ на отрезке времени $[t,t+\Delta t)$ изменения состояния системы $S_i$ не произойдет (не поступят ни положительные заявки, ни отрицательные и не обслужится ни одной заявки), в данном случае суммарный доход системы $S_i$ может увеличиться (уменьшиться) на величину $r_i\Delta t$, где $M\{r_i\}=c_i$, $i=\overline{1,\,n}$.

Предположим, что в любой момент времени СВ $r_{0i}$, $R_{i0}$, $r_{ij}$, $\bar r_{ij}$ не зависят от СВ $r_i$.

Тогда получим, что

$$\Delta V_i(t,\,\Delta t)=\begin{cases} r_{0i}+r_i\Delta t \ \text{ with probability } \lambda^+_{0i}(t)\Delta t+o(\Delta t)\,,\\ -\bar r_{0i}+r_i\Delta t \text{ with probability } \lambda^-_{0i}(t)\Delta t+o(\Delta t)\,,\\ -R_{i0}+r_i\Delta t \text{ with probability}\\ \quad \mu_i(t)\min(k_i(t),m_i)\,p_{i0}(t)\Delta t+o(\Delta t),\\ -r_{ij}+r_{\,i}\Delta t \text{ with probability}\\ \quad \mu_i(t)\min(k_i(t),m_i)\,p^+_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)\,,\ j=\overline{1,n},\ j\neq i,\\ r_{ji}+r_{\,i}\Delta t \text{ with probability}\\ \quad \mu_j(t)\min(k_j(t),m_j)\,p^+_{ji}(t)\Delta t+o(\Delta t)\,,\ i=\overline{1,n},\ i\neq j,\\ -\bar r_{ij}+r_{\,i}\Delta t \text{ with probability}\\ \quad \mu_i(t)\min(k_i(t),m_i)\,p^-_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t)\,,\ j=\overline{1,n},\ j\neq i,\\ r_i\Delta t \text{ with probability } 1-\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda^+_{0j}(t)+\left(\lambda^-_{0j}(t)+\mu_j(t)\right)\times\right.\\ \quad \left.\times\min(k_j(t),m_j)\right]\Delta t+o(\Delta t)\ . \end{cases} \tag{2}$$

В качестве аппроксимации среднего значения выражения $M\min(k_i(t),\,m_i)$ возьмем $\min(N_i(t),\,m_i)$, т.е.

$$M\min(k_i(t),\,m_i)=\min(N_i(t),\,m_i)\,, \tag{3}$$

где $N_i(t)$ $(N_i(t)=M\{k_i(t)\})$ – среднее число заявок (ожидающих и обслуживающихся) в системе $S_i$ в момент времени $t$, $i=\overline{1,n}$. Эти соотношения, очевидно, выполняются, если системы сети функционируют в условиях высокой нагрузки и когда $\forall t\ k_i(t)>m_i$, поскольку в этом случае $\min(k_i(t),m_i)=m_i$, $i=\overline{1,n}$, или в условиях малой нагрузки и когда $\forall t\ k_i(t)\le m_i$, $i=\overline{1,n}$.

*Замечание 1.* Функция $y=\min(x,m_i)$ является выпуклой кверху и поэтому из неравенства Иенсена следует, что $M\min(k_i(t),\,m_i)\le\min(N_i(t),\,m_i)$, причем равенство достигается, когда

$$N_i(t)=M\{k_i(t)\}=k_i(t),i=\overline{1,\,n}. \tag{4}$$

Таким образом, при выполнении условии (4) соотношение (3) является точным. Это условие выполняется, например, когда входящие в сеть потоки заявок являются регулярными, а времена обслуживания заявок в системах постоянными, кроме того для нашей сети выполняется $\lambda^+_{0i}(t)<\lambda^-_{0i}(t)+m_i\mu_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ (обслуживание с ожиданием) [2].

Учитывая (3), аналогично как в [4] для математического ожидания можно получить:

$$
\begin{aligned}
M\left\{\Delta V_i(t,\Delta t)\right\} = \Bigg[ & a_{0i}\lambda_{0i}^{+}(t) - \bar{a_{0i}}\lambda_{0i}^{-}(t) + c_i - \\
& - \mu_i\,(t)\min\left(N_i(t),\, m_i\right)\left(b_{i0}p_{i0}(t) + \sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}p_{ij}^{+}(t) + \bar{a}_{ij}p_{ij}^{-}(t)\right]\right) + \\
& + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \mu_j\,(t)\, min\left(N_j(t), m_j\right) a_{ji}p_{ji}^{+}(t)\Bigg]\Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Рассмотрим частные случаи функционирования описанной выше сети и ситуации, к которым они могут быть использованы при моделировании. Сетевое нападение типа DDoS осуществляется с помощью ботнета (зомби-сети) – большого количества зараженных специальной вредоносной программой компьютеров, которые по команде из центра управления (от злоумышленника) начинают посылать на атакуемые компьютеры ИТС множество особых запросов, блокирующих доступ к ним легальных пользователей [6].

В случае сетевой атаки, основанной на небезграничности ресурсов атакуемой службы на компьютеры (сервера) ИТС, на которые организуется масса запросов, с которыми они заведомо не могут справиться и будут вынуждены отказать в обслуживании, либо заставить ждать неприемлемо долго, могут возникнуть ситуации, что на некоторых промежутках времени в ряде СМО сети выполняется условие $k_i(t) > m_i > 0$, т.е. $\min\left(N_i(t), m_i\right) = m_i$, $i \in X$, где $X$ – множество номеров СМО, для которых выполняется данное условие. Пусть также $X_i$ – множество номеров СМО, связанных со СМО с номером $i$, $i \in X$. В этой ситуации из (5) получим

$$
\begin{aligned}
M\left\{\Delta V_i(t,\,\Delta t)\right\} = \Bigg[ & a_{0i}\lambda_{0i}^{+}(t) - \bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^{-}(t) + c_i - \mu_i\,(t)\,m_i\left(b_{i0}p_{i0}(t) + \sum_{j\in X_i} a_{ij}p_{ij}^{+}(t)\right) + \\
& + \sum_{\substack{j\in X_i \\ j\neq i}} a_{ji}\mu_j\,(t)\,m_j p_{ji}^{+}(t) - \mu_i\,(t)\,m_i \sum_{j\in X_i}\bar{a}_{ij}p_{ij}^{-}(t)\Bigg]\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, X}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В другой ситуации, при функционировании компьютеров, зараженных вредоносной троянской программой, позволяющей злоумышленникам удаленно управлять чужими компьютерами без ведома их владельцев (управлять обработкой запросов и пакетов переданной информации), она активируется через некоторое случайное время по команде злоумышленника ("зомби-сети") и уничтожает большое число запросов и пакетов. В этом случае при моделировании, можно предположить, что на некоторых промежутках времени и для некоторых систем сети в среднем не наблюдается очередей и выполняются условия $\min\left(N_i(t),\, m_i\right) = N_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $i \in Y$, где $Y$ – множество номеров СМО, для которых выполняется условие, описанное выше. Пусть также $Y_i$ – множество номеров систем, связанных со СМО с номером $i$, $i \in Y$.

Тогда из (5) следует, что

$$M\left\{\Delta V_i(t,\,\Delta t)\right\} = \left[a_{0i}\lambda_{0i}^{+}(t) - \bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^{-}(t) + c_i - \mu_i\,(t)\,N_i(t)\left(b_{i0}p_{i0}(t) + \sum_{j\in Y_i} a_{ij}p_{ij}^{+}(t)\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{j\,\in\,Y_i\\ j\,\neq\, i}} a_{ji}\mu_j\,(t)\,N_j(t)p_{ji}^{+}(t) - \mu_i\,(t)\,N_i(t)\sum_{j\in Y_i}\bar{a}_{ij}p_{ij}^{-}(t)\right]\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1,Y}. \tag{7}$$

Опишем, как можно найти среднее число заявок в СМО сети. Поскольку в сеть поступают пуассоновские потоки положительных заявок с интенсивностью $\lambda_{0i}^{+}(t)$ и отрицательных заявок с интенсивностью $\lambda_{0i}^{-}(t)$, т.е. вероятность поступления $l$ положительных заявок в систему $S_i$ за время $\Delta t$ имеет вид $P_l^{+}(t,\Delta t) = \dfrac{\left(\lambda_{0i}^{+}(t)\Delta t\right)^l}{l!}e^{-\lambda_{0i}^{+}(t)\Delta t}$, а вероятность поступления $l$ отрицательных заявок в систему $S_i$ за время $\Delta t$ равна $P_l^{-}(t,\Delta t) = \dfrac{\left(\lambda_{0i}^{-}(t)\Delta t\right)^l}{l!}e^{-\lambda_{0i}^{-}(t)\Delta t}$, $l = 0,\,1,\,2,\,\ldots$, то среднее число заявок, поступивших извне в систему $S_i$ за время $\Delta t$ равно $\left(\lambda_{0i}^{+}(t) + \lambda_{0i}^{-}(t)\right)\Delta t$, $i = \overline{1,n}$. Обозначим через $\rho_i(t)$ – среднее число занятых линий обслуживания в системе $S_i$ в момент времени $t$, $i = \overline{1,\,n}$. Тогда, очевидно, что $\mu_i(t)\rho_i(t)\Delta t + o\,(\Delta t)$ – среднее число заявок, покинувших систему $S_i$ за время $\Delta t$, а $\sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\, i}}^{n}\mu_j(t)\rho_j(t)p_{ji}^{+}(t)\Delta t + o\,(\Delta t)$ – среднее число положительных заявок, поступивших в $S_i$ из других СМО за время $\Delta t$, $\sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\, i}}^{n}\mu_j(t)\rho_j(t)p_{ji}^{-}(t)\Delta t + o\,(\Delta t)$ – среднее число отрицательных заявок, поступивших в $S_i$ из других СМО за время $\Delta t$,$i = \overline{1,\,n}$. Поэтому

$$N_i(t+\Delta t) - N_i(t) = \left(\lambda_{0i}^{+}(t) + \lambda_{0i}^{-}(t)\right)\Delta t +$$
$$+ \sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\, i}}^{n}\mu_j(t)\rho_j(t)p_{ji}^{+}(t)\Delta t + \sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\, i}}^{n}\mu_j(t)\rho_j(t)p_{ji}^{-}(t)\Delta t - \mu_i(t)\rho_i(t)\Delta t =$$
$$= \left[\lambda_{0i}^{+}(t) + \lambda_{0i}^{-}(t) + \sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\, i}}^{n}\mu_j(t)\rho_j(t)\left(p_{ji}^{+}(t) + p_{ji}^{-}(t)\right) - \mu_i(t)\rho_i(t)\right]\Delta t, \quad i = \overline{1,\,n},$$

откуда при $\Delta t \to 0$ вытекает система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для $N_i(t)$:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j\,=\,1\\ j\,\neq\, i}}^{n}\mu_j(t)\rho_j(t)\left(p_{ji}^{+}(t) + p_{ji}^{-}(t)\right) + \lambda_{0i}^{+}(t) + \lambda_{0i}^{-}(t) - \mu_i(t)\rho_i(t), i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Величину $\rho_i(t)$ найти точно невозможно и поэтому, как мы делали раньше, аппроксимируем ее выражением

$$\rho_i(t) = \begin{cases} N_i(t),\ N_i(t) \le m_i, \\ m_i,\, N_i(t) > m_i, \end{cases} = \min(N_i(t),\ m_i)\,, \quad i = \overline{1,\,n}.$$

Тогда система уравнений (8) примет вид

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mu_j(t)\left(p_{ji}^{+}(t)+p_{ji}^{-}(t)\right)\min\left(N_j(t),\, m_j\right) - \\ -\mu_i(t)\min\left(N_i(t),\, m_i\right)+\lambda_{0i}^{+}(t)+\lambda_{0i}^{-}(t), i=\overline{1,n}. \qquad (9)$$

Это система линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с разрывными правыми частями. Решать ее нужно путем разбиения фазового пространства на ряд областей и нахождения решения в каждой из них. Систему (9) можно решить, например, используя средства системы компьютерной математики Maple или Mathematica [7, 8].

Введем обозначение $v_i(t) = M\{V_i(t)\}$, $i=\overline{1,n}$. Из (1) и (2) получаем

$$v_i(t+\Delta t) = v_i(t) + M\{\Delta V_i(t,\,\Delta t)\} = v_i(t) + \Bigg[a_{0i}\lambda_{0i}^{+}(t) - \bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^{-}(t) + c_i -$$

$$-\left(b_{i0}p_{i0}(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_{ij}^{+}(t)\right)\mu_i\,(t)\min\left(N_i(t),\, m_i\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ji}p_{ji}^{+}(t)\mu_j\,(t)\min\left(N_j(t),\, m_j\right)-$$

$$-\mu_i\,(t)\min\left(N_i(t),\, m_i\right)\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}p_{ij}^{-}(t)\Bigg]\Delta t + o(\Delta t), \quad i=\overline{1,\,n}.$$

Далее, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим неоднородные линейные ОДУ первого порядка для доходов систем сети:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\mu_i\,(t)\min\left(N_i(t),\, m_i\right)\left(b_{i0}p_{i0}(t)+\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}p_{ij}^{+}(t)+\bar{a}_{ij}p_{ij}^{-}(t)\right)\right)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ji}p_{ji}^{+}(t)\mu_j\,(t)\min\left(N_j(t),\, m_j\right)+a_{0i}\lambda_{0i}^{+}(t)-\bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^{-}(t)+c_i, \quad i=\overline{1,\,n}.$$

Задав начальные условия $v_i(0) = v_{i0}$, $i=\overline{1,\,n}$, можно найти ожидаемые доходы систем сети. Таким образом

$$v_i\,(t) = v_{i0}\,(0) + \int_0^t f_i\,(\tau)\,d\tau, \qquad (10)$$

где

$$f\,(\tau) = -\mu_i\,(\tau)\min\left(N_i(\tau),\, m_i\right)\left(b_{i0}p_{i0}(\tau)+\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}p_{ij}^{+}(\tau)+\bar{a}_{ij}p_{ij}^{-}(\tau)\right)\right)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ji}p_{ji}^{+}(\tau)\mu_j\,(\tau)\min\left(N_j(\tau),\, m_j\right)+a_{0i}\lambda_{0i}^{+}(\tau)-\bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^{-}(\tau)+c_i, \quad i=\overline{1,\,n}.$$

Для двух частных случаев, когда справедливы формулы (6) и (7), получаем соответственно, что

$$v_i(t) = v_{i0}(0) + \int_0^t \left[ -m_i\mu_i(\tau) \left( b_{i0}p_{i0}(\tau) + \sum_{j\in X_i} \left( a_{ij}p^+_{ij}(\tau) + \bar{a}_{ij}p^-_{ij}(\tau) \right) \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{j\in X_i \\ j\neq i}} a_{ji}\mu_j(\tau)\, m_j p^+_{ji}(\tau) + a_{0i}\lambda^+_{0i}(\tau) - \bar{a}_{0i}\lambda^-_{0i}(\tau) \right] d\tau + c_i t, \quad i = \overline{1,X}, \tag{11}$$

и

$$v_i(t) = v_{i0}(0) + \int_0^t \left[ -\mu_i(\tau) \left( b_{i0}p_{i0}(\tau) + \sum_{j\in Y_i} \left( a_{ij}p^+_{ij}(\tau) + \bar{a}_{ij}p^-_{ij}(\tau) \right) \right) N_i(\tau) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{j\in Y_i \\ j\neq i}} a_{ji}\mu_j(\tau)\, N_j(\tau) p^+_{ji}(\tau) + a_{0i}\lambda^+_{0i}(\tau) - \bar{a}_{0i}\lambda^-_{0i}(\tau) \right] d\tau + c_i t, \quad i = \overline{1,Y}, \tag{12}$$

а $N_i(t)$ можно найти из системы ОДУ

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu_j(t) \left( p^+_{ji}(t) + p^-_{ji}(t) \right) N_j(t) - -\mu_i(t)N_i(t) + \lambda^+_{0i}(t) + \lambda^-_{0i}(t), i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

## 3. ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ

**Пример 3.1.** Рассмотрим модель следующей ИТС, рис. 1, когда в сеть поступают отрицательные заявки (вирусы). Система обслуживания $S_4$ соответствует центральному обслуживающему устройству (это может быть центральный сервер или кластер, центральный (главный) компьютер или группа таких компьютеров, если $m_4 > 1$), система $S_i$ соответствует группе периферийных компьютеров, если $m_i > 1$, $i = \overline{1,3}$.

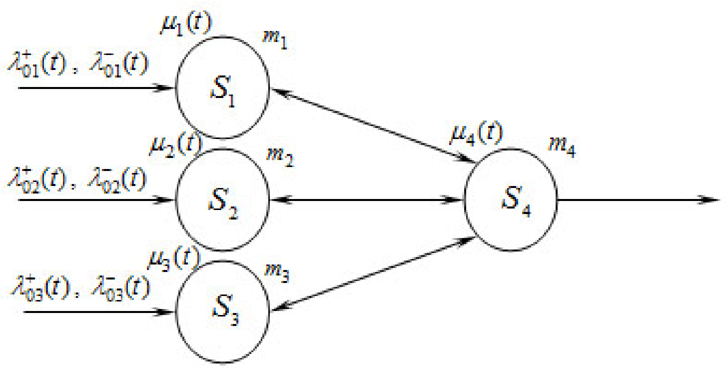


**Рис. 1.** Модель ИТС.

Зададим параметры сети. Пусть $T = 10$, интенсивности входящего потока положительных заявок и отрицательных равны соответственно $\lambda^+_{01}(t) = 0,1\cos^2 t$, $\lambda^+_{02}(t) = 0,7\sin^2 t$,

$\lambda_{03}^{+}(t) = 0,2\cos^2 t$, $\lambda_{04}^{+}(t) = 0$, $\lambda_{01}^{-}(t) = 0,1\sin^2 t$, $\lambda_{02}^{-}(t) = 0,7\cos^2 t$, $\lambda_{03}^{-}(t) = 0,2\sin^2 t$, $\lambda_{04}^{-}(t) = 0$. Интенсивности обслуживания заявок равны: $\mu_1(t) = \sin^2 t$, $\mu_2(t) = \cos^2 t$, $\mu_3(t) = \sin^2 t$, $\mu_4(t) = 4$. Количество линий обслуживания равно $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$, $m_4 = 5$. Зададим вероятности переходов положительных заявок в виде $p_{14}^{+}(t) = \sin^2 t$, $p_{24}^{+}(t) = \cos^2 t$, $p_{34}^{+}(t) = \sin^2 3t$, $p_{41}^{+}(t) = 0,1\cos^2 2t$, $p_{42}^{+}(t) = 0,2\sin^2 t$, $p_{43}^{+}(t) = 0,5\cos^2 2t$, а вероятности перехода отрицательных заявок в виде $p_{14}^{-}(t) = \cos^2 t$, $p_{24}^{-}(t) = \sin^2 t$, $p_{34}^{-}(t) = \cos^2 3t$, остальные равны нулю. Тогда вероятность выхода заявок из сети во внешнюю среду равны из СМО $S_4$ равна $p_{40}(t) = 1 - 0,6\cos^2 2t - 0,2\sin^2 t$.

Пусть значения для необходимых нам математических ожиданий равны: $a_{01} = 10\ 000$, $a_{02} = 20\ 000$, $a_{03} = 30\ 000$, $\bar{a}_{01} = 1000$, $\bar{a}_{02} = 3000$, $\bar{a}_{03} = 5000$, $b_{40} = 30\ 000$, $a_{14} = 20\ 000$, $a_{24} = 15\ 000$, $a_{34} = 30\ 000$, $a_{41} = 30\ 000$, $a_{42} = 20\ 000$, $a_{43} = 50\ 000$, $\bar{a}_{14} = 35\ 000$, $\bar{a}_{24} = 20\ 000$, $\bar{a}_{34} = 40\ 000$, $c_1 = 1000$, $c_2 = 2000$, $c_3 = 3000$, $c_4 = 7000$, остальные равны нулю.

Пусть также доходы в начальный момент времени равны нулю, т.е. $v_{i0}(0) = 0$, $i = \overline{1, n}$. В пакете математических вычислений "Mathematica" было найдено численное решение системы ОДУ (9) [7] для среднего числа заявок в системах сети. Затем, используя (10), найдены ожидаемые доходы СМО сети. На рисунке 2 приведен график изменения ожидаемых доходов систем сети, построенный в пакете "Mathematica":

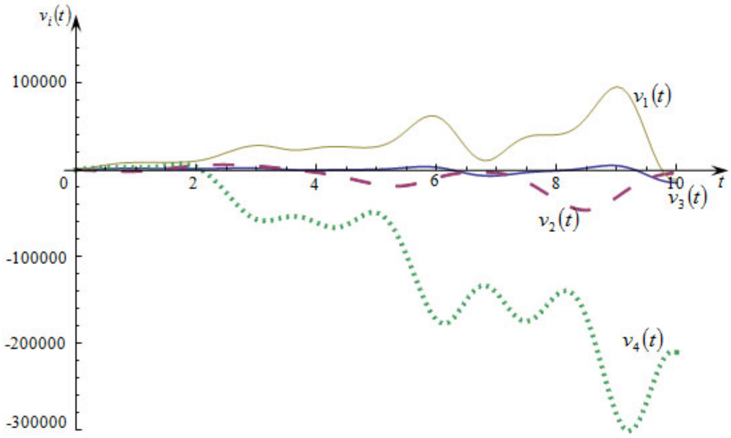


**Рис. 2.** Изменение доходов в СМО $S_i$ сети, $i = \overline{1, n}$.

**Пример 3.2.** Рассмотрим модель ИТС из примера 3.1 в случае компьютерной DDoS-атаки на центральный сервер на интервале времени, когда атака на сервер особенно сильна. В этом случае мы можем предположить, что в периферийных СМО сети в среднем не наблюдается очередей, т.е. $\min(N_i(t), m_i) = N_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, а центральная СМО функционирует в условиях высокой нагрузки и выполняется $\min(N_n(t), m_n) = m_n$. Система (9) в этом случае перепишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dN_i(t)}{dt} = -\mu_i(t)N_i(t) + \mu_4(t)m_4\left(p_{4i}^{+}(t) + p_{4i}^{-}(t)\right) + \lambda_{0i}^{+}(t) + \lambda_{0i}^{-}(t), \quad i = \overline{1, 3}, \\ \dfrac{dN_4(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\mu_i(t)N_i(t) - \mu_4(t)m_4, \end{cases} \tag{14}$$

а выражения для доходов систем сети с учетом (11) и (12), имеют вид

$$v_i(t) = \int_0^t \left[-\mu_i(\tau)\left(a_{i4}p_{i4}^+(\tau) + \bar{a}_{i4}p_{i4}^-(\tau)\right)N_i(\tau) + \right. \\ \left. + a_{4i}\mu_4(\tau)\, m_4 p_{4i}^+(\tau) + a_{0i}\lambda_{0i}^+(\tau) - \bar{a}_{0i}\lambda_{0i}^-(\tau)\right] d\tau + c_i t, \quad i = \overline{1,3}, \tag{15}$$

$$v_4(t) = \int_0^t \left[-m_4\mu_4(\tau)\left(b_{40}p_{40}(\tau) + \sum_{j=1}^{3}\left(a_{4j}p_{4j}^+(\tau) + \bar{a}_{4j}p_{4j}^-(\tau)\right)\right) + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} a_{j4}\mu_j(\tau)\, N_j(\tau)p_{j4}^+(\tau)\right] d\tau + c_4 t. \tag{16}$$

Пусть интенсивности входящего потока положительных заявок и отрицательных равны соответственно $\lambda_{01}^+(t) = \cos^2 t$, $\lambda_{02}^+(t) = \sin^2 t$, $\lambda_{03}^+(t) = 0,1\sin^2 t$, $\lambda_{01}^-(t) = \sin^2 t$, $\lambda_{02}^-(t) = \cos^2 t$, $\lambda_{03}^-(t) = 0,2\sin^2 t$, $\lambda_{04}^+(t) = \lambda_{04}^-(t) = 0$, а интенсивности обслуживания равны $\mu_1(t) = \sin^2 t$, $\mu_2(t) = \cos^2 t$, $\mu_3(t) = 0,2\sin^2 t$, $\mu_4(t) = 0,1$. Пусть количество линий обслуживания будет равно $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 3$. Вероятности переходов положительных заявок зададим в виде $p_{14}^+(t) = p_{24}^+(t) = p_{34}^+(t) = 0,3$, $p_{41}^+(t) = p_{42}^+(t) = p_{43}^+(t) = 0,01$, а вероятности перехода отрицательных заявок в виде $p_{14}^-(t) = p_{24}^-(t) = p_{34}^-(t) = 0,7$, $p_{41}^-(t) = p_{42}^-(t) = p_{43}^-(t) = 0,001$ остальные равны нулю. Тогда вероятность выхода заявок из сети во внешнюю среду равны из СМО $S_4$ равна $p_{40}(t) = 0,967$.

Пусть доход в начальный момент времени $v_{i0} = 0$, $i = \overline{1,n}$. Тогда используя (14)–(16), в пакете "Mathematica" были получены численные решения для среднего числа заявок и ожидаемых доходов СМО сети и построены графики доходов этих систем (рис. 3).

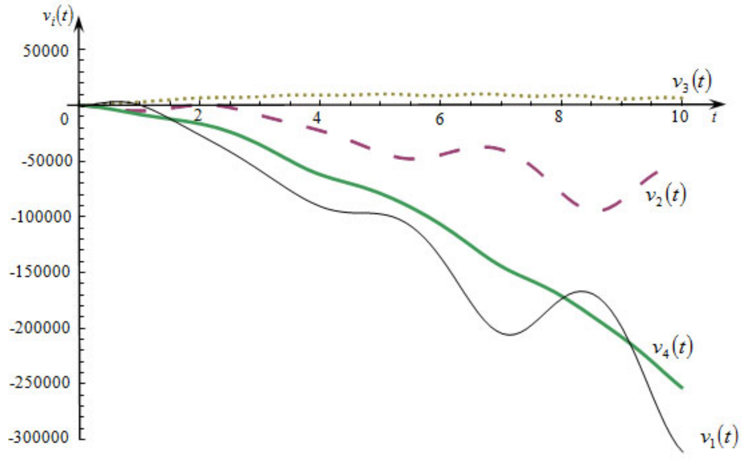


**Рис. 3.** Изменение ожидаемых доходов в СМО $S_i$,$i = \overline{1,n}$.

Сравнивая построенные графики доходов СМО сети (рис. 2 и рис. 3), можно сделать следующие выводы. По графикам видно, что расходы в случае мощной компьютерной атаки на центральный сервер (центральный сервер функционирует в режиме высокой нагрузки и количество запросов к нему гораздо больше, чем каналов обслуживания этого сервера, а периферийные компьютеры функционируют так, что в них в среднем очередей запросов не наблюдается) превосходят расходы, чем в случае, когда в ИТС присутствуют вирусы (отрицательные заявки); Для центрального сервера в случае мощной компьютерной атаки расходы растут быстрее. Но следует заметить, что в режиме, когда в ИТС циркулируют вирусы, они также несут убытки центральному серверу и периферийным компьютерам. Для периферийных компьютеров расходы больше при мощной DDoS-атаке, чем в случае наличия вирусов в сети.

## 4. ОПТИМИЗАЦИЯ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ

Для рассматриваемой сети МО можно сформулировать оптимизационную задачу, связанную с максимизацией доходов сети в целом. Введем следующие обозначения: $d_i$ – затраты на содержание одной заявки в $i$-ой СМО (в очереди и на обслуживании), $E_i$ – затраты на содержание одной линии обслуживания в $i$-ой СМО, $i = \overline{1, n}$. Критерий оптимизации имеет вид (17), а задача оптимизации – (18):

$$W(T, m) = W(T, m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{1}{T - t_0} \int\limits_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \left(v_i(t) - d_i N_i(t) - E_i m_i\right) dt, \tag{17}$$

$$\begin{cases} W(T, m_1, m_2, \ldots, m_n) \to \max\limits_{m_1, m_2, \ldots, m_n}, \\ m_i \le a_i, \; i = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{18}$$

где $a_i$ – некоторые заданные целые числа, $v_i\,(t)$ – ожидаемый (средний) доход системы $S_i$ за время $t$, $i = \overline{1, n}$.

С учетом выражения (10) для $v_i\,(t)$ критерий оптимизации может быть записан виде

$$\begin{aligned} W(T, m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{1}{T - t_0} \int\limits_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ \int\limits_{0}^{t} \Bigg[ -\mu_i\,(\tau) \min\left(N_i(\tau), m_i\right) \times \\ \times \left( b_{i0} p_{i0}(\tau) + \sum_{j=1}^{n} \left( a_{ij} p_{ij}^{+}(\tau) + \bar{a}_{ij} p_{ij}^{-}(\tau) \right) \right) + \\ + \sum_{\substack{j = 1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ji} p_{ji}^{+}(\tau) \mu_j\,(\tau) \min\left(N_j(\tau), m_j\right) + a_{0i} \lambda_{0i}^{+}(\tau) - \bar{a}_{0i} \lambda_{0i}^{-}(\tau) + c_i \Bigg] d\tau - \\ - d_i N_i(t) - E_i m_i \Bigg\}\, dt. \end{aligned} \tag{19}$$

В другой ситуации, когда для центральной СМО выполняется условие $\forall t\; k_n(t) > m_n > 0$, а в периферийных СМО в среднем нет очередей, то с учетом (11)–(13) критерий оптимизации примет вид

$$W(T, m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{1}{T - t_0} \int\limits_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{0}^{t} \left[ -\mu_i(\tau) \left( a_{in} p_{in}^{+}(\tau) + \bar{a}_{in} p_{in}^{-}(\tau) \right) N_i(\tau) + \right.\right.$$

$$+ a_{ni} \mu_n(\tau) m_n p_{ni}^{+}(\tau) + a_{0i} \lambda_{0i}^{+}(\tau) - \bar{a}_{0i} \lambda_{0i}^{-}(\tau) + c_i -$$

$$\left. - m_n \mu_n(\tau) \left( b_{n0} p_{n0}(\tau) + \sum_{j=1}^{n-1} \left( a_{nj} p_{nj}^{+}(\tau) + \bar{a}_{nj} p_{nj}^{-}(\tau) \right) \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} a_{jn} \mu_j(\tau) N_j(\tau) p_{jn}^{+}(\tau) + c_n \right] d\tau -$$

$$- d_i \int\limits_{0}^{t} \left[ -\mu_i(\tau) N_i(\tau) + \mu_n(\tau) m_n \left( p_{ni}^{+}(\tau) + p_{ni}^{-}(\tau) \right) + \lambda_{0i}^{+}(\tau) + \lambda_{0i}^{-}(\tau) + \right.$$

$$\left.\left. \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(\tau) N_i(\tau) - \mu_n(\tau) m_n \right] d\tau - E_i m_i \right\} dt. \tag{20}$$

Заметим, что (20) – это задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП). О методах решения таких задач изложено, например, в [9, 10].

**Пример 4.1.** Найдем решение задачи (18). Зададим вектор затрат на содержание одной заявки в $i$-ой СМО и вектор затрат на содержание одной линии обслуживания соответственно в виде: $d = \{d_i\}_{1\times n} = \{1000\ ,\ 500\ ,\ 300\ ,\ 1000\}$, $E = \{E_i\}_{1\times n} = \{5000\ ,\ 7000\ ,\ 10\ 000\ ,\ 3000\}$, $i = \overline{1,\ 4}$. Пусть также $a = \{a_i\}_{1\times n} = \{10\ ,\ 12\ ,\ 15\ ,\ 13\}$.

Решение задачи можно получить с помощью математических пакетов Maple или Mathematica. К примеру, в пакете “Mathematica” есть встроенная функция ”LinearProgramming” в которой запрограммирован метод ветвей и границ [11], а в пакете ”Maple” есть аналогичная ”LPSolve”-функция [12]. С помощью этих функций получим, что при описанных выше параметрах (пример 3.1) $\max W = 113\ 700$, при $m_i^* = 1,\ i = \overline{1,\ 3}$, $m_4^* = 3$; $\min W = -300\ 000$, при $m^{**} = \{m_i^{**}\}_{1\times n} = \{3, 3, 3, 5\}$.

В случае компьютерной атаки на ИТС решение задачи ЦЛП с учетом данных из примера 3.2, имеет вид: $\max W = 10\ 500$, при $m_1^* = 1$, $m_2^* = 1$, $m_3^* = 1$, $m_4^* = 3$; $\min W = -305\ 600$, при $m^{**} = \{m_i^{**}\}_{1\times n} = \{1, 3, 3, 1\}$.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье проведено исследование открытой марковской G-сети с доходами и многолинейными системами обслуживания в переходном режиме. Интенсивности входящих потоков положительных и отрицательных заявок, интенсивности их обслуживания и вероятности переходов заявок между СМО зависели от времени. Доходы от переходов между состояниями сети являлись случайными величинами с заданными средними значениями. Предложена методика нахождения ожидаемых доходов многолинейных систем сети. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании изменения доходов в ИТС при DDoS-атаке на нее, а также при прогнозировании расходов с учетом поступления в нее вирусов. Рассмотрены примеры нахождения ожидаемых доходов в ИТС. Предложена методика решения оптимизационной задачи, связанной с максимизацией ожидаемых доходов сети. Дальнейшие исследования в этом направлении связаны с получением аналогичных результатов для сетей с заявками различных типов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Gelenbe E. Product form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*, 1991, Vol. 28, pp. 656–663.
2. Бочаров П. П., Вишневский В. М. G-сети: развитие теории мультипликативных сетей. *Автоматика и телемеханика*, 2003, № 5, стр. 46–74.
3. Маталыцкий М. А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении. *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 10, стр. 97–113.
4. Науменко В. В., Маталыцкий М. А. Анализ марковских сетей с доходами, положительными и отрицательными заявками. *Информатика*, 2014, № 1, стр. 5–14.
5. Matalytski M., Naumenko V. Zastosowanie HM-sieci kolejkowych dla wyznachenia objetosci pamieci systemow informacyjnych. *Studia Informaticay*, 2014, Vol. 35, ss. 63–69.
6. Pervasive Technology Labs at Indiana University Types of DDoS Attacks. *Distributed Denial of Service Attacks (DDoS).* Advanced Networking Management Lab (ANML), 2013, December 3, 2009, Archived from the original on 2010-09-14, retrieved December 11, 2013.
7. Sofroniou M., Knapp R. Advanced numerical differential equation solving in mathematica. *Wolfram Mathematica ® Tutorial Collection*, 2008.
8. Матросов А. В. *Решение задач высшей математики и механики.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2001
9. Balinski M. Integer Programming: Methods, Uses, Computations. *Management Science*, 1965, №. 3, pp. 253–313.
10. Шевченко В. Н. *Линейное и целочисленное линейное программирование.* Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004.
11. Wolfram Research. *Wolfram Mathematica Constrained optimization.* Wolfram Research, Inc., 2008.
12. Paul E. *Linear and nonlinear programming with Maple: An interactive, applications-based approach.* Fishback, 2009.


# Analysis and Optimization of G-Network with Many-Lines Systems and Incomes


**Naumenko V. V.**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus*



**Abstract:** It is investigated an open G-Markov queueing network with many-lines queueing systems and incomes in the case when the input parameters and service messages and also the transition probabilities of messages between many-lines systems are dependent on time. The method for finding the expected incomes of the systems in the network were proposed, the expressions for the average number of messages in the systems were obtained. The optimization problem associated with maximization of incomes were formulated and described it solution.



**KEYWORDS:** G-network, many-lines systems, expected incomes, an optimization problem, information and telecommunication networks.