

# Количество совершенных паросочетаний в одном семействе ленточных графов<sup>1</sup>

С.Н. Перепечко

Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск

Поступила в редколлегию 18.11.2014

**Аннотация**—Рассматривается задача подсчёта совершенных паросочетаний в двухпараметрическом семействе графов, полученных из прямоугольных решёток путём наложения периодических граничных условий по одной из сторон решётки. Построен набор линейных рекуррентных соотношений для числа паросочетаний при фиксированном значении одного из параметров. Вычислены оценки сверху на порядки этих соотношений. Изучена асимптотика числа паросочетаний как при фиксированном значении одного из параметров, так и для случая, когда оба параметра велики и равны друг другу.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** совершенные паросочетания, задача о димерах, производящие функции, рекуррентные соотношения.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость подсчёта количества совершенных паросочетаний в некотором двухпараметрическом семействе графов естественным образом возникает в одной из классических решёточных моделей статистической механики известной под названием *задача о димерах*. Сложность решения перечислительной задачи приводит к тому, что в приложениях рассматриваются, как правило, либо небольшие графы, порядок которых не превышает нескольких сотен, либо графы специального вида.

Поскольку для получения аналитического решения желательно чтобы структура графов была регулярной и при этом достаточно простой, то, вполне естественно, что в работах раннего периода основное внимание уделялось прямоугольным решёткам  $P_m \times P_n$  и их модификациям. Именно для таких решёток и торов  $C_m \times C_n$  чуть более полувека назад и были найдены первые решения [1–3], позволившие выразить количество совершенных паросочетаний (в дальнейшем просто паросочетаний) непосредственно через параметры семейства  $m$  и  $n$ .

Однако опыт прошедших десятилетий свидетельствует о том, что систематического обобщения использовавшейся в [1–3] техники пфаффианов на другие семейства графов предложено не было. Незначительное количество моделей, допускающих решение вышеуказанным методом, делает актуальным изучение других способов подсчёта, которые, в частности, не всегда будут выдавать решение задачи в виде явных формул.

Один из возможных подходов, основанный на идеях метода матрицы переноса, уже обсуждался в предыдущей работе авторов [4]. К достоинствам данного подхода следует отнести хорошую алгоритмическую проработанность вопросов, связанных с построением самой матрицы. Такие матрицы строятся на основе единых правил для любых полиграфов вида  $H \times P_n$  или  $H \times C_n$ . В то же время сам метод применим лишь к однопараметрическим семействам графов. Если семейство двухпараметрическое, то приходится фиксировать один из параметров,

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета

который в дальнейшем будем обозначать через  $m$ . В более сложных случаях фиксируются все параметры, кроме одного.

При выполнении сформулированных выше требований под решением задачи будем понимать набор производящих функций  $G_m(z)$ , вычисленных для каждого значения  $m$ . Данная работа посвящена изучению свойств  $G_m(z)$  для разрешимого семейства ленточных графов  $P_m \times C_n$ . Выбранное семейство интересно, прежде всего, тем, что позволяет наглядно продемонстрировать возможность существенного изменения свойств производящих функций при изменении граничных условий, наложенных на решётку. При заданных значениях  $m$  и  $n$  для числа паросочетаний в указанных графах характерны такие особенности, которые отсутствуют в родственных семействах прямоугольных решёток  $P_m \times P_n$  и цилиндров  $C_m \times P_n$ .

## 2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОЛУЧЕННЫЕ РАНЕЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Принятая в данной работе система обозначений согласована с [4], поэтому более подробно остановимся только на тех особенностях, которые не упоминались ранее.

Граф  $P_m \times C_n$  может быть получен из прямоугольной решётки путём наложения периодических граничных условий по одному из направлений. Эту процедуру можно представить как процесс «склеивания» двух противоположных сторон решётки путём добавления  $m$  дополнительных рёбер, соединяющих вершины с идентичными номерами в двух крайних цепях  $P_m$ . Построенный подобным образом граф будем называть ленточным или просто *лентой* (по аналогии с лентой Мёбиуса), а для фиксированного параметра  $m$  будет использоваться термин ширина ленты.

Как и ранее, обозначим одним и тем же символом  $K_{m,n}$  число совершенных паросочетаний в графах  $P_m \times C_n$  при чётных значениях  $m$  и в графах  $P_m \times C_{2n}$  при нечётных  $m$ . При фиксированном  $m$  числовая последовательность  $\{K_{m,n}\} = K_{m,n_0}, K_{m,n_0+1}, K_{m,n_0+2}, \dots$  является монотонно возрастающей. В отличие от прямоугольных решёток, где значение  $n_0 = 0$  является общепринятым, для данной модели возможны различные варианты выбора стартового индекса  $n_0$ . Поскольку в рассматриваемых графах  $K_{m,n}$  существенно зависит от чётности параметров, то, с учётом принятого соглашения, на протяжении данной работы будем полагать  $n_0 = 3 - \delta(m)$ , где  $\delta(m)$  — символ нечётности числа равный 1 для нечётных  $m$  и 0 в противном случае.

В то же время приводимые в Электронной энциклопедии целочисленных последовательностей (OEIS) [5] под номерами A102081, A102091 табличные данные для  $\{K_{2,n}\}$  и  $\{K_{3,n}\}$  начинаются со значений  $n_0 = 2 - \delta(m)$ . Однако, формально подставив указанные величины в качестве параметров семейства, мы приходим к тому, что начальным элементом оказывается не граф, а мультиграф  $P_m \times C_2$ . Целесообразность его включения в изучаемое семейство, пусть даже в качестве граничного элемента, вовсе не очевидна, поэтому указанное выше правило представляется более естественным, явно фиксируя тот факт, что минимальная длина цикла в неориентированных графах равна 3.

Ленточные графы являются декартовыми произведениями вида  $H \times C_n$ , поэтому при фиксированном  $m$  последовательности  $\{K_{m,n}\}$  удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям с постоянными коэффициентами. В терминах производящих функций  $G_m(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} K_{m,n} x^n$  отмеченная закономерность соответствует тому, что  $G_m(x)$  рациональна и может быть представлена в виде отношения двух полиномов с целыми коэффициентами, т.е.  $G_m(x) = P_m(x)/Q_m(x)$ . Производящие функции будут всегда строиться на основе рекуррентных соотношений минимального порядка, из чего следует взаимная простота  $P_m(x)$  и  $Q_m(x)$ . Нормировка  $G_m(x)$  ведётся с учётом равенства  $Q_m(0) = 1$ .

При увеличении  $m$  порядки рекуррентных соотношений  $q_m = \deg Q_m(x)$  возрастают экспоненциально, и вывод этих соотношений представляет собой весьма нетривиальную алго-

ритмическую проблему. Максимальный по величине корень характеристического полинома  $x^{4m}Q_m(1/x)$ , который будет обозначаться через  $\lambda(m)$ , позволяет оценить количество паросочетаний при  $n \rightarrow \infty$  величиной  $\tilde{K}_{m,n} \sim C(m)\lambda(m)^n$ .

Формально, явное выражение для числа паросочетаний было получено ещё в работе [6] путём вычисления в символьном виде определителя, к которому сводится пфаффиан. Однако никаких попыток упростить и проанализировать результат, представленный в виде двойного произведения, предпринято не было. Ситуация усугублялась низкой вычислительной эффективностью полученных формул, позволяющих находить число паросочетаний только в графах небольшого порядка, что, по-видимому, и объясняет незначительный интерес к цитированной работе на протяжении более чем десятилетия.

Важным вкладом в развитие быстрых методов подсчёта при небольших значениях ширины ленты стала работа<sup>2</sup> [7]. Использованный авторами операторный подход позволил вывести рекуррентные соотношения для  $\{K_{m,n}\}$  при  $m = 2, 3, 4$ . Именно эта работа цитируется в OEIS в качестве первоисточника при описании последовательностей A102081 и A102091.

При детальном рассмотрении выясняется, что применённый в [7] подход представляет собой один из вариантов символьной модификации метода матрицы переноса в контексте более общей задачи подсчёта всех видов паросочетаний. Рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют  $\{K_{m,n}\}$ , выводятся как частный случай из соотношений для полиномов паросочетаний.

Безусловно, положительной чертой символьных преобразований, выполненных в системе компьютерной алгебры Reduce, являлось практически полное моделирование традиционного ручного вывода соотношений. Однако обратной стороной избранного подхода становится быстрое исчерпание ресурсов доступной оперативной памяти. Фактически уже при  $m = 4$  авторы были вынуждены прибегать к специальным приёмам, чтобы вывести соотношение 14 порядка. В заключении работы им приходится признать, что

In principle, a systematic application of this method can be performed to larger lattices. However, as the size of the lattice increases this strategy will soon come to a dead end.

Для поиска более практичных методов подсчёта авторы [8] вновь обращаются к методу пфаффианов и, рассмотрев отдельно случаи чётных и нечётных значений  $m$ , получают следующее выражение для количества паросочетаний в  $P_m \times C_n$  графах чётного порядка:

$$2^{\delta(m)} \prod_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left( 4 \cos^2 \left( \frac{k\pi}{m+1} \right) + 4 \sin^2 \left( \frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right). \quad (1)$$

Важным шагом вперёд, позволившим получить из (1) выражения, пригодные для проведения расчётов, стало вычисление в символьном виде произведения по индексу  $k$ , выполненное в диапазоне  $2 \leq m \leq 8$ . Ниже приводится пример одной из формул, найденных в [8], для  $m = 5$

$$K_{5,n} = 2 \prod_{j=1}^n \left( 17 - 16 \cos \left( \frac{(2j-1)\pi}{n} \right) + 2 \cos \left( \frac{2(2j-1)\pi}{n} \right) \right). \quad (2)$$

При  $m > 4$ , то есть в той области изменения параметров, для которой не были известны рекуррентные соотношения, выражения аналогичные (2) дали возможность находить решение перечислительной задачи для графов не только малого, но и умеренного порядков. (Формулу для вычисления  $K_{8,n}$  работы [8] следует исправить, поскольку она содержит избыточный множитель 2 перед знаком произведения.)

<sup>2</sup> В своей работе авторы называют ленточные графы торами.

Неприятной особенностью выражения (2) является возрастание числа сомножителей по мере увеличения  $n$ . Однако гораздо более серьёзным недостатком оказывается потребность в неуклонном наращивании точности вычисления тригонометрических функций. Эти функции должны пересчитываться для каждого нового значения  $n$ , делая бесперспективным применение подобного рода формул для подсчёта паросочетаний в больших графах.

### 3. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ $K_{m,n}$

Эффективность явных формул может быть существенно улучшена, если в (1) вычислить произведение, у которого верхняя граница пропорциональна  $n$ . В этом случае количество множителей будет оставаться фиксированным, а затраты на нахождение очередного значения  $K_{m,n}$  будут возрастать только за счёт повышения разрядности вычислений. Однако при таком подходе использованные в [8] способы упрощения результата окажутся неприменимы.

Основной результат данного раздела можно сформулировать в виде

**Утверждение 1.** *Количество совершенных паросочетаний в графах  $P_m \times C_n$  равно*

$$2^{\delta(m)} \prod_{k=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left( c_k^n(m) + 2 + \bar{c}_k^n(m) \right), \text{ если } n \text{ чётно,} \quad (3)$$

$$\prod_{k=1}^{m/2} \left( c_k^n(m) - \bar{c}_k^n(m) \right), \text{ если } n \text{ нечётно, а } m \text{ чётно.} \quad (4)$$

Фигурирующие в (3) и (4) величины определяются соотношениями

$$c_k(m) = \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right)} + \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right), \quad c_k(m)\bar{c}_k(m) = 1. \quad (5)$$

**Доказательство.** Воспользуемся тождеством (6.1.2.7) из справочника [9], положив  $b = 1/a$  и  $x = 0$ . Тогда для любого натурального  $n$  справедливо равенство

$$\prod_{j=1}^n \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2\left(\frac{j\pi}{n}\right) \right) = \left( a^n - \frac{1}{a^n} \right)^2. \quad (6)$$

Будем теперь считать значение  $n$  чётным и сгруппируем множители в левой части (6) таким образом, чтобы в одну из групп попали те из них, у которых индекс  $j$  чётный, а в другую — нечётный. В результате проделанной операции будем иметь

$$\prod_{j'=1}^{n/2} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2\left(\frac{2j'\pi}{n}\right) \right) \cdot \prod_{j=1}^{n/2} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) \right) = \left( a^n - \frac{1}{a^n} \right)^2.$$

Замечая, что, с точностью до замены  $n$  на  $n/2$ , первое произведение совпадает с (6), получаем тождество, необходимое для доказательства соотношения (3)

$$\prod_{j=1}^{n/2} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) \right) = a^n + 2 + \frac{1}{a^n}. \quad (7)$$

Решая уравнение  $a - 1/a = 2 \cos(k\pi/(m+1))$  и выбирая для удобства его положительный корень, который оказывается равным  $c_k(m)$ , подставляем (7) в (1) и приходим к выражению (3). Отметим, что в силу чётности  $n$  выбор другого корня не влияет на результат.

Перейдём ко второму случаю, когда  $n$  нечётно. Разделив обе части (6) на последний множитель левой части, соответствующий значению  $j = n$ , и воспользовавшись формулой приведения  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ , замечаем, что для каждого  $j = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$  существует равный по величине множитель с индексом  $n - j$ . Поскольку обе части модифицированного равенства (6) являются полными квадратами, то после извлечения квадратного корня получаем недостающее тождество

$$\prod_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2 \left( \frac{j\pi}{n} \right) \right) = \frac{a^n - 1/a^n}{a - 1/a}. \quad (8)$$

Для согласованности обозначений при выборе знака в правой части (8) предполагалось выполненным условие  $a > 1$ .

Если ввести обозначение  $n = 2n' - 1$  и также как в предыдущем случае сгруппировать множители по признаку чётности индекса, то приходим к следующему равенству

$$\prod_{j'=1}^{\lfloor (n'-1)/2 \rfloor} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2 \left( \frac{2j'\pi}{n} \right) \right) \cdot \prod_{j=1}^{\lfloor n'/2 \rfloor} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2 \left( \frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right) = \frac{a^n - 1/a^n}{a - 1/a}.$$

Рассмотрим первое произведение более подробно. Ещё раз воспользовавшись вышеупомянутой формулой приведения для  $\sin(x)$  и вводя в качестве индекса новую переменную  $j = n' - j'$ , получаем выражение с требуемым значением аргумента тригонометрической функции

$$\prod_{j'=1}^{\lfloor (n'-1)/2 \rfloor} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2 \left( \frac{(2(n' - j') - 1)\pi}{n} \right) \right) = \prod_{j=n'-1}^{\lfloor n'/2 \rfloor + 1} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2 \left( \frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right).$$

При вычислении граничных значений индексов использовалось тождество

$$\lfloor N/2 \rfloor + \lfloor (N+1)/2 \rfloor = N,$$

которое выполняется для всех натуральных  $N$ . Тогда в последнем произведении величина верхней границы определяется следующим образом:

$$n' - \lfloor (n' - 1)/2 \rfloor = (n' - 1) - \lfloor (n' - 1)/2 \rfloor + 1 = \lfloor n'/2 \rfloor + 1.$$

Объединяя оба произведения в одно и восстанавливая исходный параметр  $n$ , получаем

$$\prod_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left( \left( a - \frac{1}{a} \right)^2 + 4 \sin^2 \left( \frac{(2j-1)\pi}{n} \right) \right) = \frac{a^n - 1/a^n}{a - 1/a}.$$

После подстановки в качестве  $a$  того же значения, что и в случае чётных  $n$ , можно вычислить произведение по индексу  $j$  в (1). Так как нечётность  $n$  подразумевает чётность  $m$ , то количество паросочетаний может быть записано в виде

$$\prod_{k=1}^{m/2} \frac{c_k^n(m) - \bar{c}_k^n(m)}{2 \cos(k\pi/(m+1))}. \quad (9)$$

Для завершения доказательства воспользуемся тождеством (6.1.2.3) из справочника [9]. После подстановки параметров выясняется, что при чётных  $m$  величина  $\prod_{k=1}^{m/2} 2 \cos(k\pi/(m+1)) = 1$ . Тем самым, от знаменателя в (9) можно избавиться, и мы приходим к выражению (4).  $\square$

Из рассуждений, использовавшихся при доказательстве утверждения 1, следует

**Следствие 1.** *Количество совершенных паросочетаний в ленточных графах существенно зависит от чётности параметров  $m$  и  $n$ .*

**Следствие 2.** *При чётных  $m$  последовательность  $\{K_{m,n}\}$  распадается на две независимые подпоследовательности, элементы которых вычисляются по различным формулам.*

Отметим, что хотя в родственных семействах графов  $P_m \times P_n$  и  $C_m \times P_n$  также проявляются эффекты чётности, однако при фиксированном  $m$  все значения  $K_{m,n}$  рассчитываются по единой формуле. Умение эффективно распознавать подобные ситуации в моделях, не допускающих явного решения, позволяет значительно сократить усилия, необходимые для вывода рекуррентного соотношения. Ниже приводится пример явной формулы для случая  $m = 4$

$$K_{4,n} = \begin{cases} \left( \left( \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}+\sqrt{5}+1}}{4} \right)^n - \left( \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}}{4} \right)^n \right), & \text{если } n \text{ нечётно,} \\ \left( \left( \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}}{4} \right)^n - \left( \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}}{4} \right)^n \right), & \\ \left( \left( \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}+\sqrt{5}+1}}{4} \right)^n + 2 + \left( \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}}{4} \right)^n \right), & \\ \left( \left( \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}}{4} \right)^n + 2 + \left( \frac{\sqrt{22-2\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}}{4} \right)^n \right), & \text{если } n \text{ чётно.} \end{cases} \quad (10)$$

Выражение (10) удовлетворяет соотношению 14 порядка, полученному в [7].

В работах прошлых лет [8, 10] неоднократно обращалось внимание на то, что в различных семействах решёточных графов среди  $K_{m,n}$  довольно часто встречаются числа весьма специального вида. Среди них много полных квадратов и кратных им величин. Не являются исключением и рассматриваемые нами ленточные графы. Причина подобного явления становится понятной, если обратиться к соотношению (3).

Обсудим более подробно ситуацию, когда ширина ленты  $m = 5$ . Тогда количество паросочетаний в графах  $P_5 \times C_{2n}$  может быть вычислено по формуле

$$K_{5,n} = 2 \left( \left( \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2} \right)^n + \left( \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} \right)^n \right)^2 \left( \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n + \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n \right)^2. \quad (11)$$

Если теперь построить новую последовательность

$$A_n = \left( \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2} \right)^n + \left( \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2} \right)^n,$$

каждый член которой образуется из двух геометрических прогрессий, то нетрудно вывести рекуррентное соотношение второго порядка  $A_n = 5A_{n-1} - A_{n-2}$ . Этому соотношению удовлетворяют как чётная, так и нечётная подпоследовательности  $\{A_n\}$ . Поскольку два первых элемента чётной подпоследовательности являются целыми числами (5 и 23), то и все остальные элементы тоже будут целыми. Первые члены нечётной подпоследовательности пропорциональны  $\sqrt{7}$ . В силу однородности соотношения это свойство будет иметь место и для остальных членов. Таким образом, связанный с  $A_n$  множитель выражения (11) либо сам является полным квадратом, либо представим в виде  $7\bar{K}^2$  для некоторого целого  $\bar{K}$ .

Повторяя аналогичные рассуждения для оставшегося множителя (11), находим рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют чётная и нечётная подпоследовательности

$$B_n = \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n + \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n.$$

Как и в предыдущем случае получаем соотношение с целыми коэффициентами  $B_n = 3B_{n-1} - B_{n-2}$ . Начальные члены чётной подпоследовательности также оказываются целыми (3 и 7), а нечётной — пропорциональными  $\sqrt{5}$ . С учётом того, что указанные свойства будут сохраняться и для всех остальных  $B_n$ , опять приходим к двум возможным вариантам представления последнего множителя в (11). В одном из них он будет являться полным квадратом, а во втором — числом вида  $5\hat{K}^2$ .

Подводя итоги, сформулируем полученный результат в следующем виде:

**Лемма 1.** *Последовательность  $\{K_{5,n}\}$  состоит из чисел, которые либо являются удвоенными полными квадратами, либо представимы в виде  $70\hat{K}^2$  для некоторого целого  $\hat{K}$ .*

Стоит отметить, что формула (2), формально эквивалентная (11), не выявляет указанные выше числовые характеристики элементов  $\{K_{5,n}\}$ .

Так как соотношение (3) применимо не только к графам с нечётной шириной ленты, то, с учётом обращения в 1 множителя  $2^{\delta(m)}$ , можно рассчитывать на обнаружение полных квадратов в последовательностях  $\{K_{m,n}\}$  при чётных значениях  $m$  и  $n$ . Приведём несколько примеров для случая  $m = 6$ :  $K_{6,4} = 41^2$ ,  $K_{6,6} = 13^4$ ,  $K_{6,8} = 769^2$ . По мере увеличения параметра  $m$  формальное обоснование подобных закономерностей будет становиться всё более громоздким.

Для полного согласования результатов данного раздела с OEIS нам необходимо вычислить количество паросочетаний в мультиграфе  $P_m \times C_2$ . Обозначая указанную величину через  $M_m$ , заметим, что для нахождения  $M_m$  можно в заданном мультиграфе выделить подграф  $P_{m-1} \times C_2$  и определить  $M_{m-1}$ . После чего двумя способами выбрать одно из кратных рёбер, соединяющих крайние вершины двух цепей  $P_m$  с одинаковыми индексами. Вторая возможность заключается в том, чтобы подсчитать паросочетания в подграфе  $P_{m-2} \times C_2$ . Затем каждое найденное паросочетание дополняется двумя рёбрами, связывающими  $m-1$  и  $m$  вершины каждой из цепей  $P_m$ . Таким образом, величина  $M_m$  удовлетворяет рекуррентному соотношению второго порядка  $M_m = 2M_{m-1} + M_{m-2}$ .

Чтобы решить полученное соотношение, его необходимо дополнить начальными данными. Нетрудно убедиться в том, что  $M_2 = 5$ . Действительно, в этом мультиграфе одно паросочетание образуется двумя цепями  $P_2$ , а 4 остальных выбором одного из кратных рёбер, соединяющих крайние вершины двух различных цепей. При вычислении  $M_3$  выбор одного из кратных рёбер позволяет найти уже  $2^3 = 8$  паросочетаний. Остальные получаются при выборе рёбер соединяющих крайнюю и среднюю вершины каждой из цепей  $P_3$  с одинаковыми индексами. Недостающим ребром является одно из кратных рёбер на противоположном конце цепей. Построив подобным образом ещё 4 паросочетания, приходим к тому, что  $M_3 = 12$  и, следовательно,

**Лемма 2.** *При  $m \geq 2$  количество совершенных паросочетаний в мультиграфе  $P_m \times C_2$  равно  $((\sqrt{2} + 1)^{n+1} - (-1)^{n+1}(\sqrt{2} - 1)^{n+1})/2^{3/2}$ .*

#### 4. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Для вывода рекуррентных соотношений и связанных с ними производящих функций на основе (3) и (4) вычислялись достаточно длинные начальные отрезки последовательностей  $\{K_{m,n}\}$ , из которых впоследствии и реконструировались интересующие нас зависимости. Все необходимые детали процесса вывода подробно описаны в [4], что позволяет сразу же приступить к обсуждению полученных результатов.

В ходе проделанной работы все расчёты, включая нахождение элементов  $K_{m,n}$  и построение  $G_m(x)$ , были выполнены в 64-битовой версии системы компьютерной алгебры Maple 17. Сделанный выбор полностью исключил проблемы, связанные с обработкой чисел большой

разрядности. Поскольку основной целью проделанной работы являлся вывод аналитических выражений, то, фактически, узким местом вычислительного процесса стала эффективность алгоритмов нахождения рекуррентных соотношений. Имевшиеся в распоряжении автора вычислительные ресурсы не позволяли строить соотношения, порядок которых существенно превышал 6500. В результате удалось детально изучить те семейства графов, у которых ширина ленты не превышала 15, а также случай  $m = 17$ . Если же вести речь только о вычислении некоторых отдельно взятых значений  $K_{m,n}$ , то расчёты можно проводить и для таких  $m$ , которые в несколько раз превышают указанные выше величины.

Для  $m \leq 4$  найденные соотношения и табличные данные совпали с теми, которые приводятся в OEIS и работах [7, 8]<sup>3</sup>. Все остальные рекуррентные соотношения и производящие функции ранее в литературе не встречались. Ниже приводится один из простейших примеров, в котором для краткости использовано обозначение  $K_{5,n} = a_n$

$$a_n - 24a_{n-1} + 192a_{n-2} - 703a_{n-3} + 1320a_{n-4} - 1320a_{n-5} + 703a_{n-6} - 192a_{n-7} + 24a_{n-8} - a_{n-9} = 0.$$

Решение этого соотношения может быть найдено по формуле (11) для всех  $n \geq 2$ .

Несколько более сложных зависимостей для других значений  $m$  были помещены в приложение А. Размеры всех аналитических выражений подобного вида будут стремительно возрастать даже при незначительном увеличении ширины ленты. Причина такого поведения кроется в экспоненциальной зависимости порядка рекуррентного соотношения от параметра  $m$ . При нечётных  $m$  оценка порядка сверху находится непосредственно из формулы (3) и приводит к значению  $q_m \leq 3^{\lfloor m/2 \rfloor}$ . Если теперь обратиться ко второму столбцу таблицы приложения В, то легко убедиться в том, что для графов, у которых ширина ленты  $m \leq 17$ , указанная оценка почти всегда оказывается точной.

Для выяснения условий, при которых будет иметь место строгое неравенство, заметим, что в явных формулах для числа паросочетаний в ленточных графах и в графах  $P_m \times P_n$  используется один и тот же набор коэффициентов  $c_k(m)$ . В соответствии с леммой 1 работы [4] уменьшение порядка может наблюдаться в тех случаях, когда  $m = 7k - 1, k = 1, 2, \dots$ , что является следствием существования соотношений специального вида. Единственным нечётным значением  $m$ , подпадающим под данное требование, является  $m = 13$ . Понижение порядка с 729 до 513 свидетельствует о важности изучения особых случаев для данного семейства графов.

Для чётных  $m$  получить точную верхнюю оценку  $q_m$  значительно сложнее. Руководствуясь следствием 2 предыдущего раздела, необходимо разделить  $\{K_{m,n}\}$  на две подпоследовательности и для каждой из них оценить порядок рекуррентного соотношения. Если, например, проделать указанные преобразования для ленты шириной 4, то, после введения обозначений  $\tilde{a}_n = K_{4,2n+1}$ ,  $\bar{a}_n = K_{4,2n}$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n - 11\tilde{a}_{n-1} + 25\tilde{a}_{n-2} - 11\tilde{a}_{n-3} + \tilde{a}_{n-4} &= 0, \\ \bar{a}_n - 19\bar{a}_{n-1} + 133\bar{a}_{n-2} - 451\bar{a}_{n-3} + 817\bar{a}_{n-4} - 817\bar{a}_{n-5} + \\ 451\bar{a}_{n-6} - 133\bar{a}_{n-7} + 19\bar{a}_{n-8} - \bar{a}_{n-9} &= 0. \end{aligned}$$

Решениями этих соотношений являются соответствующие фрагменты формулы (10).

Оценки порядков соотношений для всех чётных  $m$  находятся непосредственно из утверждения 1. В случае чётной подпоследовательности порядок не превышает  $3^{\lfloor m/2 \rfloor}$ , а для нечётной — только  $2^{\lfloor m/2 \rfloor}$ . Перед объединением обе подпоследовательности должны быть прорежены нулями, что приводит к удваиванию порядка. Фактически, полученная подобным образом оценка

<sup>3</sup> В таблице 1 из [8], содержащей начальные отрезки последовательностей  $\{K_{5,n}\}$  и  $\{K_{6,n}\}$ , имеется опечатка. Значение  $K_{5,6}$  указано неверно.



$q_m \leq 2(3^{\lfloor m/2 \rfloor} + 2^{\lfloor m/2 \rfloor})$  является завышенной, так как главные члены асимптотических разложений  $\{K_{m,2n}\}$  и  $\{K_{m,2n+1}\}$  одинаковы и совпадают с асимптотикой числа паросочетаний в семействе прямоугольных решёток  $P_m \times P_n$ .

В терминах производящих функций, ассоциированных с данными подпоследовательностями, отмеченная особенность означает наличие у знаменателей этих функций общего множителя степени  $2^{\lfloor m/2 \rfloor}$ , на величину которой может быть уменьшена приведенная выше оценка в общем случае. Для особых значений  $m$ , удовлетворяющих условиям леммы 1 из [4], наблюдается значительное понижение порядка  $\{K_{m,2n}\}$ , которое, в свою очередь, приводит к уменьшению  $q_m$ . В изученный диапазон ширин лент попало только одно особое чётное  $m = 6$ .

Предложенное уточнение оценки, также как и другие, более тонкие, но громоздкие рассуждения, не меняют асимптотику порядка соотношения при больших  $m$ , которая сохраняет первоначальный вид  $q_m \sim 2 \cdot 3^{\lfloor m/2 \rfloor}$ . Фактические значения  $q_m$ , приведенные в таблице, хорошо согласуются с данной оценкой.

**Таблица 1.** Порядки рекуррентных соотношений для чётных  $m$

| Семейство графов | порядок $\{K_{m,2n+1}\}$ | порядок $\{K_{m,2n}\}$ | порядок $\{K_{m,n}\}$ | Семейство графов    | порядок $\{K_{m,2n+1}\}$ | порядок $\{K_{m,2n}\}$ | порядок $\{K_{m,n}\}$ |
|------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------|---------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------|
| $P_4 \times C_n$ | 4                        | 9                      | 14                    | $P_{10} \times C_n$ | 32                       | 243                    | 454                   |
| $P_6 \times C_n$ | 6                        | 19                     | 32                    | $P_{12} \times C_n$ | 64                       | 729                    | 1394                  |
| $P_8 \times C_n$ | 16                       | 81                     | 146                   | $P_{14} \times C_n$ | 128                      | 2187                   | 4246                  |

Сопоставление  $q_m$  с аналогичными величинами для прямоугольных решёток [4] и цилиндров [11] свидетельствует о том, что вид граничных условий оказывает существенное влияние на показатель геометрической прогрессии, с которой возрастают порядки рекуррентных соотношений. Для решёток  $P_m \times P_n$  характерна единая оценка  $q_m \leq 2^{\lfloor m/2 \rfloor}$ , не зависящая от чётности параметра  $m$ . В цилиндрах  $C_m \times P_n$  с нечётным значением  $m$  порядок  $q_m$  изменяется с такой же скоростью, как и для решёток. В то же время для чётных  $m$  характерно радикальное упрощение структуры рекуррентных соотношений и понижение порядка  $q_m$  до значений, не превышающих  $2^{\delta(m/2)} \cdot 3^{\lfloor m/4 \rfloor}$ .

Принимая во внимание сделанные выше замечания, можно говорить о том, что с точки зрения вывода рекуррентных соотношений семейство ленточных графов оказывается значительно сложнее двух других родственных семейств, благодаря высокой скорости роста как самого порядка  $q_m$ , так и входящих в эти соотношения коэффициентов. Не менее интересен и тот факт, что в структурно близких графах эффекты чётности носят разнонаправленный характер. Если в цилиндрах выбор чётного  $m$  существенно уменьшает  $q_m$  по сравнению со смежным нечётным значением  $m$ , то в лентах ситуация прямо противоположная. В данной работе это привело к тому, что удалось вычислить  $q_{17}$ , в то время как точное значение  $q_{16}$  осталось неизвестным.

Завершая обсуждение рекуррентных соотношений, остановимся ещё на одной особенности точных решений, которая вытекает из результатов данного раздела. В некоторых работах физической направленности для расчёта параметров модели авторы нередко накладывают на семейство решёточных графов периодические граничные условия с целью облегчить промежуточные вычисления. Однако, пример ленточных графов свидетельствует о том, что в результате подобной трансформации свойства решений вовсе не обязаны упрощаться.

Рассмотрим теперь свойства полиномов  $P_m(z)$  и  $Q_m(z)$ , на основе которых строятся производящие функции  $G_m(z)$ . В отличие от прямоугольных решёток числители  $P_m(z)$  не обладают какими-либо свойствами симметрии, поскольку начальное значение индекса  $n_0$  в последовательностях  $\{K_{m,n}\}$  отлично от 0. Для всех  $m$ , изученных в ходе выполнения работы, выполнялось условие  $P_m(z) = z^{n_0} \bar{P}_m(z)$ , где  $\bar{P}_m(z)$  — неприводимый в  $\mathbb{Z}[z]$  многочлен.

В свойствах  $Q_m(x)$  прослеживаются аналогии с графами  $P_m \times P_n$ . Это вполне естественно, так как в том и другом случаях в явных формулах использован один и тот же набор коэффициентов  $c_k(m)$ . Если  $m$  нечётно, либо делится на 4, то имеет место равенство  $Q_m(z) = -z^{q_m} Q_m(1/z)$ . При выполнении условия  $m \bmod 4 = 2$  ситуация неоднозначна. Если для  $m = 2, 6$  справедливо соотношение  $Q_m(-z) = z^{q_m} Q_m(1/z)$ , то при  $m = 10, 14$  знак правой части следует изменить на противоположный:  $Q_m(-z) = -z^{q_m} Q_m(1/z)$ .

Наибольший интерес представляет статистика неприводимых множителей  $Q_m(z)$ . Как известно, в семействе  $P_m \times P_n$  знаменатели  $G_m(z)$  факторизуются лишь при таких  $m$ , которые удовлетворяют условию  $m = 7k - 1, k = 1, 2, \dots$ . В ленточных графах ситуация обратная. Все  $Q_m(z)$  разлагаются на большое количество множителей, степени и количество которых приводится в приложении В.

Каждая пара чисел, заключённых в квадратные скобки, имеет вид [степень, количество]. Так, например,  $Q_6(z)$  раскладывается на 2 множителя первой степени и 10 множителей степени 3. В этом нетрудно убедиться, обратившись к приложению А, где приводится явное выражение для  $G_6(z)$ .

В последнем столбце таблицы приложения В указаны также те множители  $Q_m(z)$ , степени которых не превосходят 2. Выполнить полную факторизацию  $Q_m(z)$  удалось для всех  $m \leq 15$ . При  $m = 17$  непосредственной проверкой было установлено наличие множителя  $1 - z$  и ещё одного множителя степени 256, являющегося знаменателем  $G_{17}(z)$  для семейства прямоугольных решёток  $P_{17} \times P_{2n}$ . Следует отметить, что  $1 - z$  является делителем  $Q_m(z)$  при всех  $m$ .

Изучение неприводимых множителей позволяет выявить периодичность свойств  $Q_m(z)$ , которые трудно, а порой и просто невозможно, обнаружить опираясь лишь на явные выражения для  $K_{m,n}$ . В качестве простых примеров, приведенных в приложении В, можно заметить, что для чётных  $m$  среди делителей  $Q_m(z)$  всегда встречается  $1 + z$ . Менее очевидно то, что при  $m = 4k - 1, k = 1, 2, \dots$  одним из неприводимых множителей является  $1 - 4z + z^2$ .

Формальное обоснование некоторых свойств  $Q_m(z)$  на любые  $m$  может оказаться нетривиальным. В частности, все полученные в данной работе  $Q_m(z)$  делятся на соответствующие знаменатели производящих функций для прямоугольных решёток, в том числе и в тех случаях, когда эти знаменатели приводимы. Аналогичная по постановке задача возникает и внутри самого семейства ленточных графов. При чётных  $m$  знаменатель производящей функции подпоследовательности  $\{K_{m,2n}\}$  делится на соответствующий знаменатель  $\{K_{m,2n+1}\}$ . Если данная гипотеза справедлива, то из неё сразу же вытекает оценка сверху на порядок соотношения  $q_m \leq 2 \cdot 3^{\lfloor m/2 \rfloor}$ .

Некоторые из обсуждавшихся в данном разделе рекуррентных соотношений и производящих функций не удалось разместить в основном тексте работы по причине их громоздкости. Так, например, размер текстового файла, в котором хранится соотношение для последовательности  $\{K_{17,n}\}$  составляет около 18МВ. Автор готов предоставить все имеющиеся данные любому заинтересованному читателю.

## 5. АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ПАРОСОЧЕТАНИЙ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ $m$

Раскрывая скобки в выражениях (3) и (4), формулу для числа паросочетаний можно преобразовать к виду  $K_{m,n} = \sum_j \alpha_j(m) \lambda_j^n(m)$ , в котором  $\lambda_j(m)$  являются корнями характеристического полинома  $z^{q_m} Q_m(1/z)$ . Все эти корни являются вещественными и простыми, поэтому при больших  $n$  для оценки  $K_{m,n}$  достаточно ограничиться максимальным из них. Считая, что  $\max_j \lambda_j(m)$  достигается при  $j = j^*$  и положив  $\lambda(m) = \lambda_{j^*}(m)$ ,  $C(m) = \alpha_{j^*}(m)$ , сосредоточимся на вычислении асимптотики  $\tilde{K}_{m,n} = C(m) \lambda(m)^n$ .

Коэффициент  $C(m)$  находится непосредственно из (3) и оказывается равным  $2^{\delta(m)}$ . Для нахождения  $\lambda(m)$  заметим, что явные формулы, по которым рассчитываются  $K_{m,n}$ , как в ленточных графах, так и в прямоугольных решётках, опираются на один и тот же набор значений  $c_k(m)$ . В таком случае, вводя, по аналогии с [4], функцию  $\Lambda(m) = \prod_{j=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} c_j(m)$ , можно представить  $\lambda(m)$  в следующем виде:  $\lambda(m) = \Lambda(m)^{1+\delta(m)}$ .

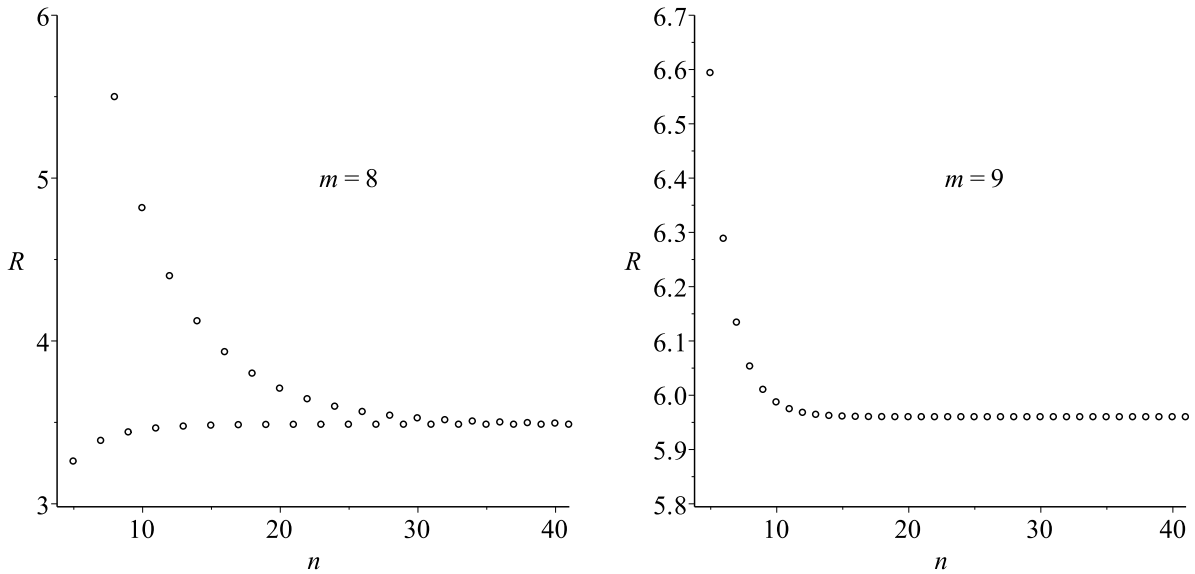
По причине того, что при увеличении порядка графа количество паросочетаний стремительно возрастает удобно анализировать не саму зависимость  $\tilde{K}_{m,n}$ , а её логарифм  $\ln \tilde{K}_{m,n} = \ln C(m) + n \ln \lambda(m) = \delta(m) \ln 2 + n(1 + \delta(m)) \ln \Lambda(m)$ . Для больших  $m$  в [4] было получено разложение

$$\ln \Lambda(m) = \frac{G\bar{m}}{\pi} - \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{24\bar{m}}(1 - 3\delta(m)) + O\left(\frac{1}{\bar{m}^3}\right), \tag{12}$$

в котором  $\bar{m} = m + 1$ . Символом  $G \approx 0.915\,965\,595$  обозначена постоянная Каталана. Из (12), в частности, следует, что когда оба параметра велики, то

$$\ln \tilde{K}_{m,n} \sim mn(1 + \delta(m)) \frac{G}{\pi} - n(1 + \delta(m)) \left( \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{G}{\pi} \right). \tag{13}$$

Порядок слагаемых, отброшенных в последнем выражении, зависит от величины  $\xi = m/n$ .



**Рис. 1.** Отношение числа паросочетаний в графе  $P_m \times C_n$  к числу паросочетаний в графе  $P_m \times P_n$  при фиксированном  $m$ .

Из равенства значений  $\lambda(m)$  для ленточных графов и прямоугольных решёток следует, что отношение  $R$  числа паросочетаний в указанных графах при  $n \rightarrow \infty$  зависит только от  $m$ . Величина  $R(m)$  может быть найдена из отношения коэффициентов  $C(m)$  в семействах  $P_m \times C_n$  и  $P_m \times P_n$ . С учётом выражений (7) и (3) работы [4] получаем следующий результат:

$$R(m) = \frac{2^{\delta(m)} \sqrt{D_m^2}}{\Lambda(m)}, \quad D_m^2 = \frac{(\sqrt{2} + 1)^{m+1} + (-1)^{\delta(m)} (\sqrt{2} - 1)^{m+1}}{2^{3/2+\delta(m)}}. \tag{14}$$

Вычислим несколько частных значений, показанных на рис. 1:  $R(8) \approx 3.484\,442$ ,  $R(9) \approx 5.959\,146$ . Причины более быстрого выхода на асимптотику при нечётных  $m$  подробно рассмотрены в

подразделе 5.1 [4]. Таким образом, при выполнении условия  $n \gg 1$ , зная число паросочетаний в графе одного семейства, можно оценить их количество в графе с теми же значениями параметров из другого семейства.

В графах с большой шириной ленты  $R(m)$  ведёт себя как показательная функция. Действительно, из (12) следует, что при  $m \rightarrow \infty$  асимптотика  $\Lambda(m)$  имеет вид

$$\Lambda(m) \sim \frac{e^{\frac{G(m+1)}{\pi}}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}.$$

Если учесть, что второе слагаемое в числителе  $D_m^2$  стремится к 0, то после его отбрасывания получим

$$D_m^2 \sim \frac{(\sqrt{2}+1)^{m+1}}{2^{3/2+\delta(m)}}.$$

После подстановки этих выражений в  $R(m)$  результат может быть представлен в виде

$$R(m) \sim \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2^{3/2-\delta(m)}}} \left( \sqrt{\sqrt{2}+1} e^{-G/\pi} \right)^{m+1}.$$

Численное значение основания степени  $(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{2}} e^{-G/\pi} \approx 1.161$ . Вычислив по этой формуле  $R(8)$  и  $R(9)$ , получаем величины 3.536 и 5.805, хорошо согласующиеся с точными значениями.

## 6. ПАРОСОЧЕТАНИЯ В БОЛЬШИХ ГРАФАХ ПРИ $m = n$

Оценка числа паросочетаний в ленточных графах при произвольных соотношениях между параметрами  $m$  и  $n$  представляет собой достаточно сложную задачу. Для применения формул предыдущего раздела формально требуется выполнение условия  $n \gg m$ . Если же  $n \approx m$  и при этом оба параметра велики, то среди корней характеристического полинома будет много таких, которые по абсолютной величине близки к  $\lambda(m)$ . Данное обстоятельство не приводит к изменению двух первых слагаемых разложения (13), однако для получения количественных оценок требуются другие подходы.

В силу серьёзных трудностей, стоящих на пути вывода двухпараметрических разложений общего вида, ещё в одной из ранних работ [12] рассматривалась возможность изучения больших решёточных графов на основе однопараметрических асимптотик путем введения параметра  $\xi = m/n$ . При фиксированном  $\xi$  можно достаточно просто вычислить следующий член разложения (13) и получить компактные расчётные формулы для нахождения  $\tilde{K}_{m,n}$ . (Зависимость коэффициентов разложения от  $\xi$  часто называют термином *shape dependence*.)

Задачей данного раздела является детальное обсуждение случая  $\xi = 1$ . Сделанный выбор не случаен. Сравнение  $\tilde{K}_{m,m}$  с найденным в [12] асимптотическим разложением для семейства  $P_m \times P_n$  позволяет оценить эффект от наложения на решётку периодических граничных условий без привлечения громоздкого аппарата эллиптических тэта-функций. Более того, именно в этом случае происходит существенное упрощение промежуточных вычислений, и коэффициенты разложений принимают наиболее простой вид.

При  $\xi = 1$  из чётности порядка графа, являющегося необходимым условием существования совершенных паросочетаний, следует чётность параметра  $m$ . С учётом данного обстоятельства находим из (3) количество паросочетаний

$$K_{m,m} = \prod_{k=1}^{m/2} \left( c_k^m(m) + 2 + \bar{c}_k^m(m) \right) = \Lambda(m)^m \left( \prod_{k=1}^{m/2} (1 + \bar{c}_k^m(m)) \right)^2 = \Lambda(m)^m \Delta(m)^2.$$

Для построения асимптотики следует оценить величину  $\Delta(m)$  при больших  $m$ . Непосредственно это сделать затруднительно, поскольку  $c_{\frac{m}{2}}(m) \rightarrow 1$  при  $m \rightarrow \infty$ . Однако, если искать произведение, перемножая множители в обратном порядке, то, вводя новую индексную переменную на основе соотношения  $k = m/2 + 1 - j$  и воспользовавшись формулой приведения  $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ , получим

$$\Delta(m) = \prod_{j=1}^{m/2} (1 + b_j^m(m)), \text{ где } b_j(m) = \sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi(2j-1)}{2(m+1)}\right)} - \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2(m+1)}\right).$$

Поскольку

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_{\frac{m}{2}}(m) = \sqrt{2} - 1 < 1,$$

то, удерживая только главный член асимптотического разложения  $b_j^m(m) \sim e^{-(2j-1)\pi/2}$  и переходя к пределу, приводим результат к виду

$$\Delta = \Delta(\infty) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + e^{-(2j-1)\pi/2}\right). \quad (15)$$

К достоинствам избранного подхода следует отнести то, что бесконечные произведения вида (15) выражаются через особые значения модулей полных эллиптических интегралов. Блок примеров в конце 21 главы [13] содержит следующее тождество

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^6 = \frac{2q^{1/4}}{\sqrt{k}k'}, \quad (16)$$

в котором параметры  $q$  и  $k$  связаны соотношением  $q = \exp(-\pi\mathbf{K}'(k)/\mathbf{K}(k))$ . Положив  $q = e^{-\pi/2}$ , получаем уравнение  $\mathbf{K}(k) = 2\mathbf{K}'(k)$ . В монографии [13] рассмотрен и ряд важных случаев, когда корни таких уравнений могут быть вычислены точно. Так, например, в главе 22.81 показано, что при  $k = \operatorname{tg}^2(\pi/8)$  имеет место равенство  $\mathbf{K}'(k) = 2\mathbf{K}(k)$ . Поскольку  $k$  и  $k'$  входят в (16) симметрично, то можно воспользоваться указанным значением и после упрощений привести правую часть к виду

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + e^{-\pi(2n-1)/2})^6 = 2^{3/8}(1 + \sqrt{2})^{3/2}e^{-\pi/8}.$$

Извлекая кубические корни из обеих частей полученного равенства, находим значение  $\Delta^2 = 2^{1/8}\sqrt{1 + \sqrt{2}}e^{-\pi/24}$ , завершая вычисление асимптотики. Таким образом, было показано, что

**Лемма 3.** При больших  $m$  количество совершенных паросочетаний в графе  $P_m \times C_m$  оценивается величиной  $2^{1/8}\sqrt{1 + \sqrt{2}}e^{-\pi/24}\Lambda(m)^m$ .

Анализируя знак следующего члена асимптотического разложения  $b_j^m(m)$  можно убедиться в том, что утверждение леммы представляет собой оценку снизу. О скорости приближения к полученной асимптотике лучше всего судить по графику, показанному на рис. 2 слева. На этом графике изображена зависимость от  $m$  отношения полученной оценки к величине  $K_{m,m}$ .

Опираясь на результаты [4], была получена аналогичная оценка  $\tilde{K}_{m,m}^P$  для числа паросочетаний на прямоугольных решётках  $P_m \times P_m$

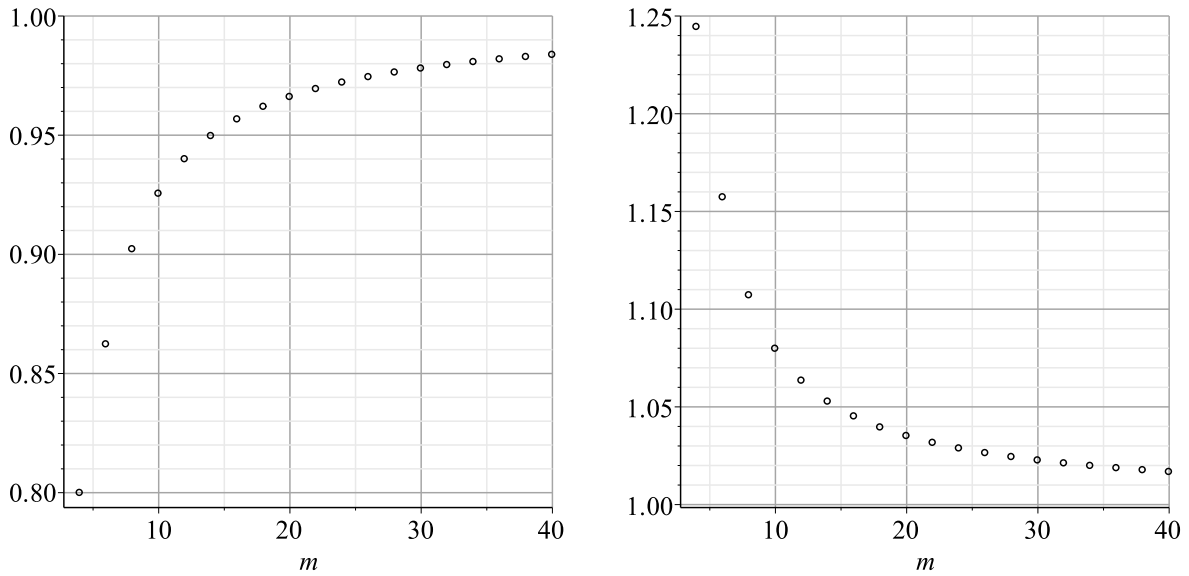
$$\tilde{K}_{m,m}^P = 2^{1/4}e^{-\pi/24} \frac{\Lambda(m)^{m+1}}{\sqrt{D_m^2}}.$$

Если воспользоваться асимптотическими разложениями типа (12), то выражение для  $\ln \tilde{K}_{m,m}^P$  совпадёт<sup>4</sup> с формулами (7.16–7.18) работы [12]. Однако при сравнении числа паросочетаний в различных семействах графов целесообразность перехода к таким разложениям неочевидна.

Разделив асимптотическую оценку из леммы 3 на величину  $\tilde{K}_{m,m}^P$ , замечаем, что с учётом чётности параметра  $m$  полученная величина пропорциональна  $R(m)$

$$\tilde{R}(m) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2^{1/8}} \frac{\sqrt{D_m^2}}{\Lambda(m)} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2^{1/8}} R(m). \tag{17}$$

Обозначим через  $\hat{R}(m)$  отношение числа паросочетаний в графе  $P_m \times C_m$  к аналогичной величине в графе  $P_m \times P_m$ . Тогда  $\hat{R}(m) \rightarrow \tilde{R}(m)$  при  $m \rightarrow \infty$ . Нормированная зависимость  $\hat{R}(m)/\tilde{R}(m)$ , показанная на рис. 2 справа, позволяет получить представление о том, при каких  $m$  можно пользоваться соотношением (17).



**Рис. 2.** Асимптотика паросочетаний в ленточных графах  $P_m \times C_m$ . Слева: отношение оценки снизу из леммы 3 к точному числу паросочетаний. Справа: зависимость  $\hat{R}(m)/\tilde{R}(m)$ .

Числовой коэффициент в формуле (17), а точнее его обратная величина  $2^{1/8}/\sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 0.7018445$ , имеет уже достаточно продолжительную историю. Получив аналогичное (17) соотношение, связывающее число паросочетаний на ленте Мёбиуса с числом паросочетаний в ленточном графе, авторы [14] предпочли не упрощать полученный результат, а ограничиться его приближённым значением. Можно предположить, что и некоторые другие зависимости, представленные громоздкими комбинациями тэта-функций, могут быть существенно упрощены, если воспользоваться приёмами, изложенными в данном разделе.

<sup>4</sup> В силу того, что коэффициент при  $(m+n)$  в формуле (7.16) указан некорректно, то совпадение станет полным после удаления избыточной степени  $1/2$ .

А. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ И РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ЧИСЛА  
СОВЕРШЕННЫХ ПАРСОЧЕТАНИЙ В СЕМЕЙСТВЕ ЛЕНТОЧНЫХ ГРАФОВ

$P_m \times C_n$  ПРИ  $m = 6, 7$

$$G_6(z) = \frac{P_6(z)}{Q_6(z)}$$

$$P_6(z) = z^3 (91 + 1590z - 4048z^2 - 69300z^3 + 50780z^4 + 1164101z^5 - 138254z^6 - 10058547z^7 - 1562576z^8 + 50264529z^9 + 13812974z^{10} - 155013203z^{11} - 47809304z^{12} + 306988809z^{13} + 89155840z^{14} - 399510007z^{15} - 96791692z^{16} + 345081045z^{17} + 62203726z^{18} - 197547813z^{19} - 23125568z^{20} + 74027795z^{21} + 4550826z^{22} - 17725337z^{23} - 329540z^{24} + 2608475z^{25} - 24182z^{26} - 221705z^{27} + 4727z^{28} + 9737z^{29} - 170z^{30} - 169z^{31})$$

$$Q_6(z) = (1-z)(1+z)(1+3z-4z^2+z^3)(1-4z+3z^2+z^3)(1+5z+6z^2+z^3) \\ (1-6z+5z^2-z^3)(1-3z-4z^2-z^3)(1+4z+3z^2-z^3)(1-2z-z^2+z^3) \\ (1-z-2z^2+z^3)(1+2z-z^2-z^3)(1+z-2z^2-z^3)$$

$$K_{7,n} = a_n$$

$$a_n - 115 a_{n-1} + 5405 a_{n-2} - 141311 a_{n-3} + 2340480 a_{n-4} - 26387440 a_{n-5} + \\ 211922672 a_{n-6} - 1250743680 a_{n-7} + 5547609085 a_{n-8} - 18800479799 a_{n-9} + \\ 49279781945 a_{n-10} - 100802153475 a_{n-11} + 161906144256 a_{n-12} - 204997737760 a_{n-13} + \\ 204997737760 a_{n-14} - 161906144256 a_{n-15} + 100802153475 a_{n-16} - 49279781945 a_{n-17} + \\ 18800479799 a_{n-18} - 5547609085 a_{n-19} + 1250743680 a_{n-20} - 211922672 a_{n-21} + \\ 26387440 a_{n-22} - 2340480 a_{n-23} + 141311 a_{n-24} - 5405 a_{n-25} + 115 a_{n-26} - a_{n-27} = 0$$

В. СТРУКТУРА ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ  $Q_m(z)$

| Семейство графов    | Порядок соотн. | Статистика неприводимых множителей (множители, степень которых меньше 3)                    |
|---------------------|----------------|---|
| $P_2 \times C_n$    | 4              | [1, 2], [2, 1]<br>$(1-z)(1+z)(1-z-z^2)$   |
| $P_3 \times C_{2n}$ | 3              | [1, 1], [2, 1]<br>$(1-z)(1-4z+z^2)$   |
| $P_4 \times C_n$    | 14             | [1, 2], [4, 3]<br>$(1-z)(1+z)$  |
| $P_5 \times C_{2n}$ | 9              | [1, 1], [2, 2], [4, 1]<br>$(1-z)(1-3z+z^2)(1-5z+z^2)$                                       |
| $P_6 \times C_n$    | 32             | [1, 2], [3, 10]<br>$(1-z)(1+z)$   |
| $P_7 \times C_{2n}$ | 27             | [1, 1], [2, 1], [4, 2], [8, 2]<br>$(1-z)(1-4z+z^2)$   |
| $P_8 \times C_n$    | 146            | [1, 2], [2, 2], [6, 2], [8, 2], [12, 4], [16, 1], [24, 2]<br>$(1-z)(1+z)(1-z-z^2)(1+z-z^2)$ |

|                        |       |   |
|------------------------|-------|---|
| $P_9 \times C_{2n}$    | 81    | $[1, 1], [4, 4], [8, 2], [16, 3]$<br>$(1 - z)$  |
| $P_{10} \times C_n$    | 454   | $[1, 2], [10, 2], [20, 4], [32, 1], [40, 4], [80, 2]$<br>$(1 - z)(1 + z)$   |
| $P_{11} \times C_{2n}$ | 243   | $[1, 1], [2, 3], [4, 7], [8, 10], [16, 6], [32, 1]$<br>$(1 - z)(1 - 3z + z^2)(1 - 4z + z^2)(1 - 5z + z^2)$              |
| $P_{12} \times C_n$    | 1 394 | $[1, 2], [12, 4], [16, 2], [24, 4], [48, 8], [64, 1], [96, 4], [192, 2]$<br>$(1 - z)(1 + z)$                            |
| $P_{13} \times C_{2n}$ | 513   | $[1, 1], [3, 6], [6, 19], [8, 1], [12, 19], [24, 6]$<br>$(1 - z)$   |
| $P_{14} \times C_n$    | 4 246 | $[1, 2], [2, 2], [4, 8], [8, 14], [16, 32], [32, 32], [64, 26], [128, 7]$<br>$(1 - z)(1 + z)(1 - z - z^2)(1 + z - z^2)$ |
| $P_{15} \times C_{2n}$ | 2 187 | $[1, 1], [2, 1], [4, 2], [8, 4], [16, 8], [32, 11], [64, 10], [128, 6], [256, 1]$<br>$(1 - z)(1 - 4z + z^2)$            |
| $P_{17} \times C_{2n}$ | 6 561 | $[1, 1], [256, 1]$ другие множители неизвестны<br>$(1 - z)$   |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kasteleyn P.W. The statistics of dimers on a lattice. *Physica*, 1961, vol. 27, pp. 1209–1225.
2. Temperley H.N.V., Fisher M.E. Dimer problem in statistical mechanics — an exact result. *Philosophical Magazine*, 1961, vol. 6, pp. 1061–1063.
3. Fisher M.E. Statistical mechanics of dimers on a plane lattice. *Physical Review*, 1961, vol. 124, pp. 1664–1672.
4. Караваев А.М., Перепечко С.Н. Производящие функции в задаче о димерах на прямоугольных сеточных графах. *Информационные процессы*, 2013, том 13, №4, стр. 374–400.
5. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. The OEIS Foundation, режим доступа: <http://oeis.org>.
6. McCoy B.M., Wu T.T. *The two-dimensional Ising model*. Cambridge, MA: Harv. Univ. Press, 1973.
7. Hosoya H., Motoyama A. An effective algorithm for obtaining polynomials for dimer statistics. Applications of operator technique on the topological index to two- and three dimensional rectangular and torus lattices. *Journal of Mathematical Physics*, 1985, vol. 26, No.1, pp. 157–167.
8. Narumi H., Hosoya H., Murakami H. Generalized expression for the numbers of perfect matching of cylindrical  $m \times n$  graphs. *Journal of Mathematical Physics*, 1991, vol. 32, No.7, pp. 1885–1889.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*. М.: Наука, 1981.
10. Hosoya H. Matchings and symmetry of graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 1986, vol. 12, No.1–2, pp. 271–290.
11. Karavaev A.M., Perepechko S.N. Dimer problem on cylinders: recurrences and generating functions. *Mathematical Modeling and Computational Physics. Books of Abstracts of the International Conference*. Dubna: JINR, 2013, pp. 98–99.
12. Ferdinand A.E. Statistical mechanics of dimers on a quadratic lattice. *Journal of Mathematical Physics*, 1967, vol. 8, No.12, pp. 2332–2339.
13. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. *Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции*. М.: ГИФМЛ, 1963, изд. второе.
14. Lu W.T., Wu F.Y. Dimer statistics on the Möbius strip and the Klein bottle. *Physics Letters A*, 1999, vol. 259, pp. 108–114.



## The number of perfect matchings in one kind of strip graphs

S.N.Perepechko

We consider the problem of counting perfect matchings in a two-parameter family of graphs obtained from the rectangular lattices by imposing periodic boundary conditions along one side of the grid. A set of linear recurrences for the number of matchings was found when one of the parameters was fixed. Upper bounds on the orders of these recurrences were evaluated. The asymptotics of the number of matchings were examined for a fixed value of one of the parameters, as well as for the case when both parameters are large and equal to each other.

**KEYWORDS:** perfect matchings, dimer problem, generating functions, molecular freedom.