Информационные процессы, Том 14, № 4, 2014, стр. 365–369

Легко вычислимые инварианты для распознавания гиперповерхности[1]

Р. А. Гершгорин, Л. И. Рубанов, А. В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва, Россия
Поступила в редколлегию 29.12.2014

Аннотация—Предлагается способ сокращенного описания алгебраической гиперповерхности с помощью дескрипторов, зависящих от небольшого числа коэффициентов соответствующей полиномиальной формы и инвариантных относительно ортогональных преобразований объемлющего пространства. Такие инварианты, относительно легко вычислимые даже в высоких размерностях, позволяют быстро сравнивать формы гиперповерхностей в общем положении и могут использоваться в качестве признаков в прикладных задачах описания и распознавания объектов, а также для решения комбинаторных задач. Особо рассмотрено преобразование вещественных мультилинейных кубических форм.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: распознавание образов, гиперповерхность, кубическая форма, инвариант, ортогональное преобразование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные кривые и поверхности третьей степени часто используются для аппроксимации и представления данных в сжатом виде. Широко применяются плоские кривые Безье. Однако при анализе трёхмерных изображений, например, получаемых при томографии, представляет интерес изучение двумерных поверхностей, составляющих контурное изображение трёхмерного тела [1]. Близкие задачи возникают и при анализе электрокардиограмм, хотя в этом случае применимы и другие методы математической обработки данных [2]. При одновременном изучении различных свойств больших систем возникают гиперповерхности в пространствах более высоких размерностей. Сравнение таких гиперповерхностей требует быстрого вычисления инвариантов, не зависящих от поворотов и отражений. Число мономов степени d от $n+1$ переменной равно биномиальному коэффициенту C^d_{n+d}. Даже у кубической формы число мономов быстро растёт с увеличением числа переменных. Поэтому особый интерес представляют инварианты, зависящие от небольшого числа коэффициентов, следовательно, легко вычислимые даже в высоких размерностях. Сопоставляя значения такого инварианта, во многих случаях можно быстро выявить существенные отличия формы двух гиперповерхностей. Хотя для строгого доказательства совпадения необходимо вычислять и другие инварианты, совокупность которых полностью определяет гиперповерхность с точностью до ортогональных преобразований координат.

Поскольку алгебраические гиперповерхности однозначно определяются конечным числом своих точек в общем положении, рассматриваемую задачу можно переформулировать как задачу дискретного анализа. Обозначим через $N = C^d_{n+d}-1$. Пусть N точек n-мерного пространства лежат на единственной гиперповерхности степени d. Тогда для другого такого набора из N точек необходимым условием существования ортогонального преобразования пространства,

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-50-00150).

которое отображает один набор на другой, служит совпадение инвариантов гиперповерхностей, на которых лежат точки соответствующих наборов. Вычисление уравнения гиперповерхности в некоторой системе координат сводится к решению системы линейных уравнений. Одновременно проверяется условие единственности гиперповерхности и её степень. Отметим, что в предположении единственности каждый коэффициент уравнения, задающего гиперповерхность, существенно зависит от положения каждой точки набора. Если координаты точек целые, то и коэффициенты уравнения гиперповерхности можно выбрать целыми полиномиально ограниченного размера. Поэтому инвариант такой гиперповерхности может служить сертификатом неизменности взаимного расположения рассматриваемых точек. Близкая задача возникает в геолокации [3]. С другой стороны, рассматриваемый метод позволяет решать некоторые комбинаторные задачи.

Напомним, что неориентированный граф соответствует симметричной матрице смежности, которую можно рассматривать как матрицу коэффициентов квадратичной формы. Её собственные значения инвариантны относительно перестановок координат и одинаковы для изоморфных графов. Это свойство используется в эвристических алгоритмах проверки неизоморфности графов: достаточно указать различие значений любого из инвариантов. Аналогично, гиперграфу соответствует форма более высокой степени, а её инварианты могут быть использованы для доказательства неизоморфности гиперграфов. Поскольку матрицы перестановок ортогональные, любые инварианты ортогональной группы могут быть использованы и для проверки неизоморфности гиперграфов.

Мы предполагаем, что характеристика основного поля равна нулю. Однако многие наши результаты остаются верными и для конечных полей достаточно большой характеристики, что может быть использовано при решении комбинаторных задач, включая построение блочных кодов, исправляющих ошибки. Применение инвариантов, зависящих от небольшого числа коэффициентов формы, имеет важный аналог над полем характеристики два — это двоичные коды с малой плотностью проверок на чётность [4].

Квадратичной форме соответствует симметричная матрица, след которой равен сумме коэффициентов квадратичной формы за исключением мультилинейных членов. Как известно, след не меняется при ортогональных преобразованиях координат. Формам высших степеней тоже можно сопоставить многочлены от коэффициентов немультилинейных членов, инвариантные при ортогональных преобразованиях. Такие инварианты являются естественным обобщением понятия следа.

Напомним, что над полем комплексных чисел неприводимая кубическая форма от трёх переменных приводима линейной заменой координат к виду без мономов от двух переменных, когда соответствующая проективная кривая гладкая [5]. Для общей поверхности приводимость к такому виду доказана в [6, 7]. Кроме того, для кубик малых размерностей известны различные представления [8], позволяющие судить об их свойствах, однако для больших размерностей известно очень мало.

Обозначим через Δ оператор Лапласа

$$\Delta f = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$$

Он инвариантен относительно ортогональных преобразований координат.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Дана кубическая форма. Существует такое нетривиальное алгебраическое выражение от её коэффициентов, инвариантное при ортогональных преобразованиях координат, которое не зависит от коэффициентов при мультилинейных мономах.*

Доказательство. Применяя оператор Лапласа к форме

$$f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k^3 + \sum_{j \neq k} \beta_{jk} x_j^2 x_k + \sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} \gamma_{ijk} x_i x_j x_k,$$

получим инвариантную линейную форму

$$\frac{1}{2}\Delta f = \sum_{k=0}^{n} \left(3\alpha_k + \sum_{j \neq k} \beta_{jk} \right) x_k.$$

Возводя эту форму в квадрат, вновь применяя оператор Лапласа и отбрасывая числовой множитель, получим инвариантное числовое выражение

$$\sum_{k=0}^{n} \left(3\alpha_k + \sum_{j \neq k} \beta_{jk} \right)^2,$$

которое не зависит от коэффициентов γ_{ijk}. Теорема доказана.

Так получаются и другие инварианты, но уже зависящие от коэффициентов γ_{ijk}, например, $\Delta\Delta\Delta(f^2)$. Линейная комбинация этого инварианта и описанного в Теореме 1 даёт инвариант

$$\frac{\Delta\Delta\Delta(f^2) - 6\Delta((\Delta f)^2)}{48} = 6\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 + 2\sum_{j \neq k} \beta_{jk}^2 + \sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} \gamma_{ijk}^2.$$

Этот метод легко распространить на формы высших степеней. Применяя m раз оператор Лапласа к форме степени $2m+1$, получим инвариантную линейную форму. Далее, применяя оператор Лапласа к квадрату этой линейной формы, получим скалярный инвариант. С другой стороны, применяя оператор Лапласа к квадратичной форме, получим удвоенный след её матрицы. Аналогично, применяя m раз оператор Лапласа к форме степени $2m$, мы также получим инвариант, который зависит лишь от небольшого числа её коэффициентов.

Мы применим описанный инвариант для анализа кубических форм вида

$$f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k^3 + \sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} \gamma_{ijk} x_i x_j x_k,$$

где исчезают все коэффициенты $\beta_{jk} = 0$ при членах от двух переменных.

Кубика в $\mathbb{P}^n$, заданная формой вида

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x_k^3 + \sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} \gamma_{ijk} x_i x_j x_k,$$

т. е. при $\alpha_n = 0$, особая. Действительно, в точке с однородными координатами $(0 : \cdots : 0 : 1)$ форма f и все её первые производные обращаются в нуль. Следовательно, если гладкая кубика задана формой указанного вида (при $\beta_{jk} = 0$), то $\alpha_k \neq 0$ для каждого индекса k. Для особых гиперповерхностей число нулевых коэффициентов α_k может зависеть от выбора координат. Обозначим через ε корень многочлена $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1$. Тогда

$$(x + y + z)(x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)(x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

В случае ортогональных преобразований над полем вещественных чисел ситуация меняется.

Теорема 2. *Дана мультилинейная кубическая форма. Если после ортогонального преобразования координат получившаяся форма снова не содержит мономов, зависящих от двух переменных, то она также не содержит мономов, зависящих от одной переменной, то есть форма остаётся мультилинейной.*

Доказательство. Определённый при доказательстве Теоремы 1 инвариант мультилинейной кубической формы равен нулю. Если при ортогональном преобразовании координат все коэффициенты β_{jk} остаются нулевыми, то и сумма квадратов $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2$ равна нулю. А это возможно только при равенстве нулю каждого α_k. То есть форма остаётся мультилинейной.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Другой метод вычисления инвариантов — вычисление собственных значений симметричных тензоров [9, 10], точнее, *E-eigenvalues* по терминологии из [9]. Отметим, что в работах [9, 11] также обсуждается и другое определение собственных значений, неинвариантных при ортогональных преобразованиях.

Определитель матрицы выражается через следы её степеней. Аналогично, используя предложенное обобщение для следа, можно получать другие инварианты для форм высших степеней (или соответствующих симметричных тензоров). При этом след, зависящий лишь от небольшого числа коэффициентов формы, легко вычислим. Следовательно, вычислимы и некоторые другие инварианты. В то же время их вычисление на основе комбинации собственных значений представляет собой алгоритмически трудную задачу из-за экспоненциально большого числа различных собственных значений для форм степени три и выше [10].

Хотя рассмотренный нами инвариант может совпадать у форм, принадлежащих разным орбитам ортогональной группы, вероятность случайного совпадения можно оценить сверху с помощью леммы Шварца–Зиппеля [12]. Поскольку инвариант имеет степень два, эта вероятность мала даже в случае, когда коэффициенты форм выбираются из небольшого множества значений. Если коэффициенты формы выбирать целыми из множества $\{0, \ldots, m-1\}$, то эта вероятность не больше $\frac{2}{m}$.

Авторы благодарят И. В. Латкина за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чочиа П. А. Переход от 2D- к 3D-изображениям: модификация двухмасштабной модели и алгоритмов обработки. *Информационные процессы*, 2014, том 14, № 3, стр. 242–255.

2. Григорьев Ф. Н., Гуляев Ю. В., Дворникова С. Н., Коздоба О. А., Кузнецов Н. А. Задача распознавания образов для диагностики сердечнососудистых заболеваний по данным ЭКГ. *Информационные процессы*, 2014, том 14, № 2, стр. 178–184.

3. Голубев Г. К., Потапов В. Г. О статистических задачах в геолокации. *Проблемы передачи информации*, 2013, том 49, № 3, стр. 57–85.

4. Иванов Ф. И., Зяблов В. В. Коды с малой плотностью проверок на четность, основанные на тройках Штейнера и матрицах перестановок. *Проблемы передачи информации*, 2013, том 49, № 4, стр. 41–56.

5. Прасолов В. В., Соловьев Ю. П. *Эллиптические функции и алгебраические уравнения.* М.: Факториал, 1997.

6. Emch A. On a new normal form of the general cubic surface. *American Journal of Mathematics*, 1931, vol. 53, № 4, pp. 902–910.

7. Emch A. Properties of the cubic surface derived from a new normal form. *American Journal of Mathematics*, 1939, vol. 61, № 1, pp. 115–122.

8. Iliev A., Manivel L. On cubic hypersurfaces of dimensions 7 and 8. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2014, vol. 108, pp. 517–540.

9. Qi L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor. *Journal of Symbolic Computation*, 2005, vol. 40, pp. 1302–1324.

10. Cartwright D., Sturmfels B. The number of eigenvalues of a tensor. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, vol. 438, № 2, pp. 942–952.

11. Hu Sh., Huang Zh.-H., Ling Ch., Qi L. On determinants and eigenvalue theory of tensors. *Journal of Symbolic Computation*, 2013, vol. 50, pp. 508–531.

12. Schwartz J. T. Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities. *Journal of the ACM*, 1980, vol. 27, pp. 701–717.

Easy computable invariants for hypersurface recognition

Gershgorin R. A., Rubanov L. I., Seliverstov A. V.

The constricted description of algebraic hypersurface is proposed. The descriptors depend on a small number of coefficients of the corresponding polinomial form and are invariant with respect to orthogonal transformations of the enveloping space. These invariants can be computed with relative ease even at high dimension, thus allowing for quick comparison of the shape of hypersufraces at general position. The invariants may serve as features in the applied problems of object description and recognition, and are useful for combinatorial problems solution as well. The transformation of real multilinear cubic forms is specifically considered.

KEYWORDS: pattern recognition, hypersurface, cubic form, invariant, orthogonal transformation