

## Обобщённые коды с локализацией ошибок и минимизация избыточности для заданных входной и выходной вероятностей ошибки<sup>1</sup>

Жилин И. В., Крещук А. А., Зяблов В. В.

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*  
Поступила в редколлегию 29.12.2014

**Аннотация**—В работе рассматриваются коды с обобщённой локализацией ошибок. Для них приводится алгоритм вычисления верхней границы вероятности неправильного декодирования при известных параметрах кода и входной вероятности ошибки. На его основе строится алгоритм выбора параметров кода для заданных типа конструкции и входной и выходной вероятностей ошибки. Приводится нижняя граница вероятности неправильного декодирования. Приведены примеры зависимости вероятности неправильного декодирования от вероятности ошибки на входе и дано объяснение поведения кривых.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, в связи с ограниченностью частотного ресурса и всё более высокими требованиями на скорость передачи данных по сетям связи, в аппаратуре передачи данных всё большее распространение получают сигнально-кодовые конструкции, основанные на модуляциях с большим индексом. В то же время коды коррекции ошибок, применявшиеся в широко распространённых системах, являлись двоичными и могли быть субоптимальны для соответствующих каналов.

В данной работе рассматривается известный тип кодов коррекции ошибок — коды с обобщённой локализацией ошибок [4]. Главное назначение этих кодов — получить очень малое значение вероятности неправильного декодирования.

Они подходят для оптики [5], [6] и позволяют работать уже от входной вероятности ошибки, равной  $10^{-2}$ .

Коды с обобщённой локализацией ошибок (ОЛО-коды) — это класс линейных каскадных кодов [2], [3]. Было показано [7], что они являются частным случаем обобщённых каскадных кодов (ОКК).

Кодовое слово обобщённого каскадного кода обычно представляют в виде матрицы, высота которой равна длине внутренних кодов, а ширина — длине внешних кодов.

ОЛО-коды — это такой тип ОКК, в которых столбцы кодового слова не являются кодовыми словами какого-либо кода. Эта конструкция эффективна только в том случае, когда характер ошибок таков, что в принятой матрице кодового слова большинство столбцов не содержит ошибок. Отсюда легко увидеть, что при работе в дискретном симметричном канале без памяти для выполнения этого условия требуется иметь по-возможности более короткие внутренние коды.

Ключевая особенность ОЛО-кодов — специальный декодер, оптимизированный для декодирования кодов с малой избыточностью, работающих в (относительно) хороших каналах.

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Можно сказать, что этот декодер использует имеющуюся в коде избыточность только для тех частей кодового слова, в которых имеются ошибки.

## 2. КОНСТРУКЦИЯ ОЛО-КОДОВ

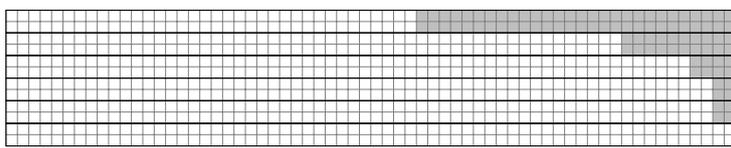
Опишем выбранную нами конструкцию кодов с обобщённой локализацией ошибок. Назовём его *нормальным* ОЛО-кодом.

Кодовым словом *нормального*  $q$ -ичного ОЛО-кода  $\mathbf{C}$  мы будем называть матрицу  $\mathbf{C}$  над полем  $GF(q)$  размеров  $n_A \times n_B$ , где  $n_A$  — длина внутренних кодов, а  $n_B$  — длина внешних кодов.

Обозначим  $\mathbf{H}$  проверочную матрицу системы вложенных внутренних кодов  $\{\mathcal{C}_j^A\}$ . Её элементы принадлежат полю  $GF(q)$ , её размер  $n_A \times n_A$ . Эта должна быть невырождена. Любые первые  $r_A$  строк этой матрицы, где  $r_A$  чётно, составляющие матрицу размера  $r_A \times n_A$ , будут являться матрицей внутреннего кода длины  $n_A$  с  $k_A = n_A - r_A$  информационных символов. Будем нумеровать эти коды следующим образом:  $j$ -й внутренний код — это код, у которого  $r_A = 2j$ . Обозначим числа информационных символов, проверочных символов и расстояния этих кодов как  $k_j^A$ ,  $r_j^A$  и  $d_j^A$  соответственно.

Назовём

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C} =$$


(1)

— матрицей синдромов внутренних кодов. Объединим её строки попарно. Пары строк мы будем называть слоями, а их элементами будем считать подматрицы размера  $2 \times 1$  и рассматривать их как символы над полем  $Q = q^2$ . Тогда слои будут представлять из себя вектор-строки  $\mathbf{s}_j$  длины  $n_B$  над полем  $GF(Q)$ ,  $j = \overline{1, L}$ . Число слоёв  $L = n_A/2$  будем называть *порядком* ОЛО-кода.

Внешние коды *нормального* ОЛО-кода  $\mathcal{C}_j^B$  — коды над полем  $GF(Q)$  длины  $n_B$  и имеют числа информационных символов  $r_j^B$ , скорости  $R_j^B = 1 - r_j^B/n_B$ , числа информационных символов  $k_j^B = n_B - r_j^B$ , кодовые расстояния  $d_j^B$ .

**Определение 1.** ОЛО-код — это множество матриц  $\mathbf{C}$  таких, что слои  $\mathbf{s}_j$ ,  $j = \overline{1, L}$  матрицы  $\mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}$  являются кодовыми словами внешних кодов.

Заданный таким образом ОЛО-код будет линейным кодом над полем  $GF(q)$  длины  $n = n_A n_B$ , его избыточность  $r = \sum_j 2r_j^B$ . Скорость кода  $R = \sum_j 2R_j^B/n_A$ , то есть равна среднему арифметическому скоростей компонентных кодов. Кодовое расстояние ограничено снизу  $d \geq \min_{j=\overline{2, L}} \{d_1^B, d_{j-1}^B, d_j^B\}$  [3].

Следует отметить, что в кодовом слове  $\mathbf{C}$  ОЛО-кода в явном виде не присутствуют кодовые слова ни внутренних, ни внешних кодов. Если быть точным, в столбцах кодового слова  $\mathbf{C}$  ОЛО-кода находятся слова смежных классов внутренних кодов, в то время как выбор смежного класса в  $i$ -м столбце  $\mathbf{C}$  определяется теми символами слов внешних кодов, которые находятся в  $i$ -м столбце матрицы  $\mathbf{S}$  (на  $i$ -х позициях вектор-строк  $\mathbf{s}_j$ ).

При этом спектр расстояний смежного класса и, как следствие, его корректирующая способность, в точности совпадают с таковыми у внутреннего кода.

Ниже рассмотрим конструкцию, где качестве внутренних и внешних кодов используются МДР-коды.



- С использованием полученной на предыдущем шаге алгоритма матрицы  $\mathbf{S}_j''$ , с помощью  $j$ -х внутренних кодов можно исправить ошибки в столбцах матрицы  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V}_j = Dec_A[\mathbf{S}_j'']\{\mathbf{V}\} \tag{6}$$

Учитывая конструкцию системы вложенных внутренних кодов, можно указать как минимум две возможности для исправления ошибок с их помощью. С одной стороны, можно вычислить синдромы ошибок как разности  $\mathbf{S}_j'' - \mathbf{S}_j'$ , по ним найти представителей смежных классов и вычесть их из столбцов матрицы  $\mathbf{V}$ . Эта операция может быть записана в виде следующего выражения:

$$\mathbf{V}_j = Dec_A\{\mathbf{V} - \mathbf{H}_j^{-1}(\mathbf{S}_j'' - \mathbf{S}_j')\} + \mathbf{H}_j^{-1}(\mathbf{S}_j'' - \mathbf{S}_j') \tag{7}$$

где  $\mathbf{H}_j^{-1}$  — матрица, содержащая первые  $2j$  столбцов матрицы  $\mathbf{H}^{-1}$ , а  $Dec_A\{\}$  — операция декодирования внутренних кодов.

С другой стороны, можно декодировать эти смежные классы непосредственно, например, по решётке.

Таким образом, если  $j$ -й внутренний код способен исправить ошибки кратности  $t_j^A$  и менее, то по итогам декодирования внутренних кодов на этой итерации в матрице  $\mathbf{V}_j$  останутся только столбцы без ошибок и столбцы с ошибками кратности более  $t_j^A$ .

- После исправления ошибок с помощью последнего,  $L$ -го слоя, декодирование останавливается. Матрица  $\mathbf{V}_L$  является результатом декодирования.

#### 4. ГРАНИЦЫ ВЕРОЯТНОСТИ НЕПРАВИЛЬНОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ

##### 4.1. Верхняя граница вероятности неправильного декодирования для ДСК

Повторим ключевые особенности алгоритма декодирования, которые потребуются для того, чтобы написать верхнюю оценку вероятности *неправильного декодирования*<sup>1</sup> ОЛО-кода.

- Декодирование — процесс из  $L$  итераций.
- Внутренние коды на  $j$ -й итерации исправляют ошибки кратности  $t_j^A = j$  и менее.
- Внешние коды имеют избыточности  $r_j^B$  и способны исправлять ошибки кратности  $t_j^B \leq \lfloor r_j^B/2 \rfloor$ .

Оценим вероятность ошибки декодирования ОЛО-кода для  $q$ -ичного симметричного канала без памяти с вероятностью ошибки на символ, равной  $p$ .

В таком случае, учитывая, что высота столбца равна  $n_A$ , вероятность того, что в столбце произойдёт не менее  $t$  ошибок, равна:

$$p_+\{t\} = \sum_{i=t}^{n_A} C_{n_A}^i p^i (1-p)^{n_A-i} \tag{8}$$

В нашем случае  $t_j^A = j$ , то есть  $j$ -й внутренний код способен исправлять ошибки кратности  $j$  и менее. Это значит, что так как на  $(j - 1)$  итерации были исправлены ошибки кратности  $(j - 1)$  и менее, то на  $j$ -й итерации останутся только ошибки кратности  $j$  и более. Это значит, что число столбцов с неправильными синдромами в  $\mathbf{S}_j'$ , которые должны быть исправлены на  $j$ -й итерации декодирования, будет определяться вероятностью появления столбцов с  $j$  и

<sup>1</sup> То есть вероятность отказа от декодирования или перехода в неправильное кодовое слово.

более ошибок<sup>2</sup>. Вероятность появления не менее  $t_j^B + 1$  ошибок в  $\mathbf{s}_j$  можно оценить аналогично тому, как вычисляется вероятность появления  $j$  и более ошибок в столбце.

Обозначим

$$p_{Aj} \leq p_+\{j\} \quad (9)$$

— вероятность того, что на  $j$ -й итерации декодирования выбранный столбец матрицы  $\mathbf{S}'_j$  будет содержать ошибку. Для всех столбцов эти вероятности одинаковы.

Тогда вероятность ошибки  $j$ -го внешнего кода можно оценить сверху величиной

$$p_{Bj} = \sum_{i=t_j^B+1}^{n_B} C_{n_B}^i p_{Aj}^i (1 - p_{Aj})^{n_B-i} \quad (10)$$

Вероятность ошибки кодовой конструкции в целом будет вероятностью того, что хоть один из внешних кодов декодируется неправильно. Сформулируем этот результат в виде теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $p_{Bj}$  — оценка сверху вероятности неправильного декодирования  $j$ -го внешнего кода,  $j = \overline{1, L}$ . Тогда для вероятности  $p$  неправильного декодирования кода  $\mathcal{C}$  справедлива граница:

$$p \leq p_B = \min\left\{\sum_{j=1}^L p_{Bj}, 1\right\} \quad (11)$$

где  $L$  — число слоёв ОЛО-кода,  $p_B$  — оценка сверху вероятности неправильного декодирования.

**Доказательство.** Рассмотрим следующую систему событий.

Пусть  $\bar{A}_j$  — событие “произошло  $> t_j^B$  ошибок веса  $\geq j$  в столбцах”, его вероятность вычисляется согласно формуле (10),  $P\{\bar{A}_j\} = p_{Bj}$ .

Вероятность  $P\{\bar{A}_j A_{j-1} \dots A_1\}$  говорит о том, что на первых  $j - 1$  итерациях декодирования число столбцов с ошибками веса  $\geq j - 1$  не превосходило того количества, которое заведомо на соответствующих итерациях исправляется, и при этом число столбцов с ошибками веса  $\geq j$  больше, чем то, которое гарантированно исправляется на  $j$ -й итерации декодирования. Как известно, она не больше любой из них, в частности,  $P\{\bar{A}_j A_{j-1} \dots A_1\} \leq P\{\bar{A}_j\}$ .

Она будет являться оценкой сверху вероятности неправильного декодирования на  $j$ -й итерации  $P\{\bar{D}_j\}$ :  $P\{\bar{D}_j\} \leq P\{\bar{A}_j A_{j-1} \dots A_1\} \leq P\{\bar{A}_j\}$

Пусть  $\bar{D}$  — событие неправильного декодирования исходного ОЛО-кода  $\mathcal{C}$ . Его вероятность:

$$P\{\bar{D}\} = P\left\{\bigcup_{j=1}^L \bar{D}_j\right\} \leq \sum_{j=1}^L P\{\bar{D}_j\} \leq \sum_{j=1}^L P\{\bar{A}_j\}. \quad (12)$$

Из этой формулы непосредственно следует сумма в формуле (11).

Так как вероятность не может быть больше 1, остаётся ограничить эту сумму 1, что приводит к формуле (11), ч. т. д.

<sup>2</sup> Некоторые такие столбцы дают правильные синдромы, но для целей получения оценки сверху это несущественно.

4.2. Нижняя граница вероятности неправильного декодирования для ДСК

Для вычисления нижней границы неправильного декодирования мы будем строить такие слова ошибок, которые, с одной стороны, будут обладать достаточно большой вероятностью, и с другой, заведомо не смогут быть декодированы.

Ограничимся оценкой вероятности неправильного декодирования первого внешнего кода. Конструкция слова ошибки будет строиться следующим образом: пусть произошла ошибка  $\mathbf{E} = \mathbf{V} - \mathbf{C}$ , в которой есть не менее, чем  $\lfloor (d_1^B - 1)/2 \rfloor$  столбцов веса 1. Любой столбец слова ошибки веса 1 приводит к появлению на входе первого внутреннего кода ошибки в той же позиции, что и номер этого столбца.

Первый внутренний код не может иметь на входе стирания, так 0-й внутренний код не декодируется (он имеет скорость 1) и, как следствие, не даёт отказов от декодирования. Первый внешний код способен исправлять не более, чем  $t_1^B = \lfloor (d_1^B - 1)/2 \rfloor$  ошибок. Это значит, что если столбцов веса 1 будет не менее, чем  $t_1^B + 1$ , то на входе декодера первого внутреннего кода появится не менее, чем  $t_1^B + 1$  ошибок и он не будет декодирован правильно (то есть либо даст отказ от декодирования, либо декодирование будет ошибочно).

Вероятность появления такого слова легко может быть вычислена. Вероятность того, что в столбце произойдёт ровно 1 ошибка, равна:

$$p_{\{1\}} = n_A p (1 - p)^{n_A - 1} \tag{13}$$

Тогда вероятность ошибки  $j$ -го внешнего кода можно оценить снизу величиной

$$p'_{B1} = \sum_{i=t_B^{(j)}+1}^{n_B} C_{n_B}^i p_{\{1\}}^i (1 - p_{\{1\}})^{n_B - i} \tag{14}$$

Сформулируем результат этого параграфа в виде теоремы.

**Теорема 2.** Для вероятности  $p$  неправильного декодирования кода  $\mathcal{C}$  справедлива граница:

$$p \geq p_B = p'_{B1} \tag{15}$$

**Доказательство.** Пусть  $\bar{B}_1$  - событие “произошло  $> t_1^B$  ошибок веса 1 в столбцах”, его вероятность вычисляется согласно формуле (14).

Вероятность  $p'_{B1} = P\{\bar{B}_1\}$  говорит о том, что на первой итерации декодирования число столбцов с ошибками веса не меньше того количества, которое не может быть исправлено на первой итерации. Она будет являться оценкой снизу вероятности неправильного декодирования на 1-й итерации  $P\{\bar{D}_1\}$ :  $P\{\bar{D}_1\} \geq P\{\bar{B}_1\}$

Пусть  $\bar{D}$  – событие неправильного декодирования исходного ОЛО-кода  $\mathcal{C}$ , а  $\bar{D}_j$  – событие неправильного декодирования на  $j$ -й итерации. Тогда:

$$P\{\bar{D}\} = P\left\{ \bigcup_{j=1}^L \bar{D}_j \right\} \geq \min_j P\{\bar{D}_j\} \geq \min_j P\{\bar{B}_j\} \geq P\{\bar{B}_1\}. \tag{16}$$

Из этой формулы непосредственно следует формула (15).

4.3. Поиск избыточностей кодов-компонентов, обеспечивающих заданную выходную вероятность ошибки при заданной входной

Пусть нам заданы базовые параметры кода  $(q, n_A, n_B, L, t_j^A)$ , входная вероятность ошибки  $p_s$  и требуемая вероятность неправильного декодирования  $p_f = p_B$ , и требуется найти избыточности кодов-компонентов для того, чтобы обеспечить требуемую вероятность ошибки.

По описанию алгоритма декодирования выше можно построить процедуру поиска избыточностей внешних кодов.

- Для каждого слоя мы, зная корректирующие способности внутренних кодов, можем вычислить вероятности  $p_{Aj}$  появления столбцов с ошибками кратности  $j$  и более, которые потребуется исправить на  $j$ -й итерации алгоритма с помощью  $j$ -го внешнего кода.
- Далее требуется ограничить вероятность ошибки каждого из внешних кодов. Очевидно, что если  $\forall j : p_{Bj} \leq p_B/L$ , то вероятность ошибки кодовой конструкции не превысит требуемой  $p_B$ .

Поэтому следует, с использованием формулы 10, произвести поиск таких  $t_j^B$ , которые обеспечат выполнение условия  $p_{Bj} \leq p_B/L$ .

- Количество проверочных символов в кодах вычислить как  $r_j^B = \min(2t_j^B, n_B)$ .
- На данном этапе нам известны параметры кода, которые обеспечивают требуемые характеристики выходной вероятности ошибки при заданной входной, но могут быть неоптимальны. В данном случае требуется провести оптимизацию параметров кода. Это можно сделать следующим образом:

- Для набора  $r_j^B$ , полученного на предыдущем шаге, построить все альтернативные наборы  $\{\hat{r}_j^B\}_k$  следующим образом:
 
$$\hat{r}_{jk}^B = r_j^B, j \neq k;$$

$$\hat{r}_{jk}^B = r_j^B - 2, j = k$$
 для  $k = \overline{1, L}$
- Для каждого из этих наборов вычислить вероятность ошибки в соответствии с алгоритмом, описанным в параграфе 4.1.
- Выбрать тот набор, вероятность ошибки которого наименьшая.
- Если полученная вероятность меньше требуемой  $p_f$ , то повторить эту же операцию. Если больше, то выполнить аналогичную, но не с уменьшением, а с увеличением корректирующей способности кодов.
- Алгоритм останавливается, если после двух шагов набор  $r_j^B$  не изменился.

## 5. КОДИРОВАНИЕ

В данной части остановимся на способах кодирования ОЛО-кодов. В части 5.1 сначала описано несистематическое кодирование. В части 5.2 описано систематическое кодирование.

### 5.1. Несистематическое кодирование

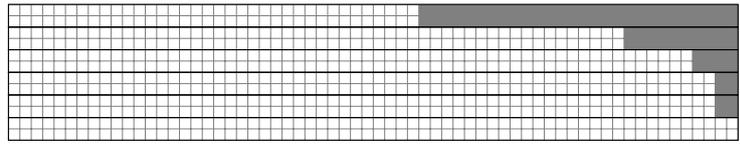
Кодировать можно совсем просто. Пусть на входе алгоритма кодирования есть  $q$ -ичная матрица  $\mathbf{I}$ , имеющая такой же размер и такое же разбиение на слои  $\mathbf{I}_j$ , как и матрица  $\mathbf{S}$ . В каждом из слоёв  $\mathbf{I}_j$  первые  $k_j^B$  символов — информационные, а последние  $r_j^B$  — нулевые (в (17) элементы с информационными символами обозначены белым цветом, с нулевыми — тёмно-серым):

$$\mathbf{I} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[Grid with 10 rows and 100 columns, where the last 20 columns of each row are shaded dark grey]} \\ \hline \end{array} \quad (17)$$

Для того, чтобы получить кодовое слово ОЛО-кода, требуется сначала закодировать внешними кодами строки (слои) матрицы  $\mathbf{I}$ . Кодеры внешних кодов используют в качестве информационных те символы, которые стоят на соответствующих местах в вектор-строках  $\mathbf{I}_j$ , и



$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{I} =$$



The diagram shows a grid representing a matrix. The grid is 10 rows high and 100 columns wide. The first 70 columns are white, and the last 30 columns are shaded grey. This represents a matrix with a specific block structure.

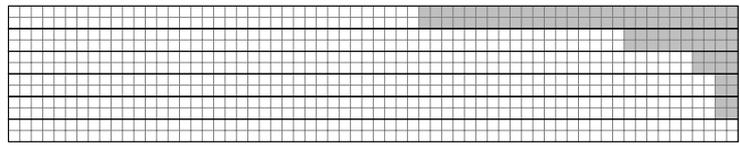
(22)

Благодаря верхней треугольной форме матрицы  $\mathbf{U}$  структура матрицы  $\mathbf{R}$  будет совпадать со структурой матрицы  $\mathbf{I}$ . После этого  $\mathbf{R}$  нужно закодировать внешними кодами аналогично кодированию матрицы  $\mathbf{I}$  в несистематическом случае.

Так же, как выше, обозначим эту операцию следующим образом:  $\mathbf{S} = \text{Enc}_B\{\mathbf{R}\}$ . После выполнения этой операции элементы на местах информационных символов в матрицах  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{S}$  совпадут, а на местах проверочных символов в матрице  $\mathbf{S}$  будут проверочные символы внешних кодов.

После этого получившуюся матрицу остаётся умножить на  $\mathbf{U}^{-1}$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \text{Enc}_B\{\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}\} =$$



The diagram shows a grid representing a matrix. The grid is 10 rows high and 100 columns wide. The first 70 columns are white, and the last 30 columns are shaded grey. This represents a matrix with a specific block structure.

(23)

Таким образом, мы можем сформулировать

**Утверждение 2.** Для систематического кодирования матрицы  $\mathbf{I}$  с информационными символами требуется выполнить следующую операцию:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \text{Enc}_B\{\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}\} \quad (24)$$

**Доказательство.** Легко показать, что она будет удовлетворять определению кодового слова ОЛО-кода:  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \text{Enc}_B\{\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}\} = \mathbf{S}$ , и в слоях  $\mathbf{S}$  по построению находятся кодовые слова внешних кодов.

Благодаря верхней треугольной форме матрицы  $\mathbf{U}$  в результате получившейся процедуры на местах информационных символов матрицы  $\mathbf{C}$  будут те же символы, что и в матрице  $\mathbf{I}$ .

## 6. АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ КОДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Исходя из конструкции кода, алгоритма декодирования и метода расчёта избыточностей кодов-компонентов можно сделать несколько выводов.

При фиксированной длине кодовой конструкции является целесообразным использование по-возможности коротких внутренних кодов и длинных внешних. (Малых  $n_A$  и больших  $n_B$ .) Это будет способствовать улучшению производительности кодов двумя путями.

Во-первых, при увеличении длины внутренних кодов  $n_A$  при заданной входной вероятности ошибки  $p_s$  увеличивается вероятность ошибки в столбце. При малых  $p_s$  она примерно равна  $p_i \approx n_A p_s$ , то есть пропорциональна  $n_A$ .

Во-вторых, увеличение длины внешних кодов позволяет естественным образом уменьшить долю ошибок, которую требуется исправить. Под долей ошибок  $\tau$  подразумевается отношение

числа ошибок  $t$  к длине кода  $n$ ,  $\tau = t/n$ . Это легко объяснимо на примере предельного случая, когда  $n \rightarrow \infty$ : при фиксированной вероятности ошибки  $p$  средняя доля ошибок будет равна  $p$ , а среднеквадратичное отклонение —  $\sigma = \sqrt{p(1-p)/n}$ . Для обеспечения малой вероятности неправильного декодирования требуется заложить  $\tau = p + x\sigma$ , где  $x$  зависит от требуемой вероятности ошибки. В случае малых  $n$  существенное влияние имеет слагаемое, отвечающее за среднеквадратичное отклонение. Это продемонстрировано на рис. 1, где показаны кривые вероятности того, что случайная величина с биномиальным распределением с параметрами  $p = 10^{-1}$  и  $n \in \{50, 110, 250\}$  будет иметь относительное значение больше, чем отложенной на оси абсцисс. Из кривых видно, что если требуется достичь вероятности ошибки не более  $10^{-15}$ , то коду длины  $n = 50$  придётся исправлять долю ошибок, равную  $\tau = 0.54$ , а при  $n = 250$  только  $\tau = 0.28$ .

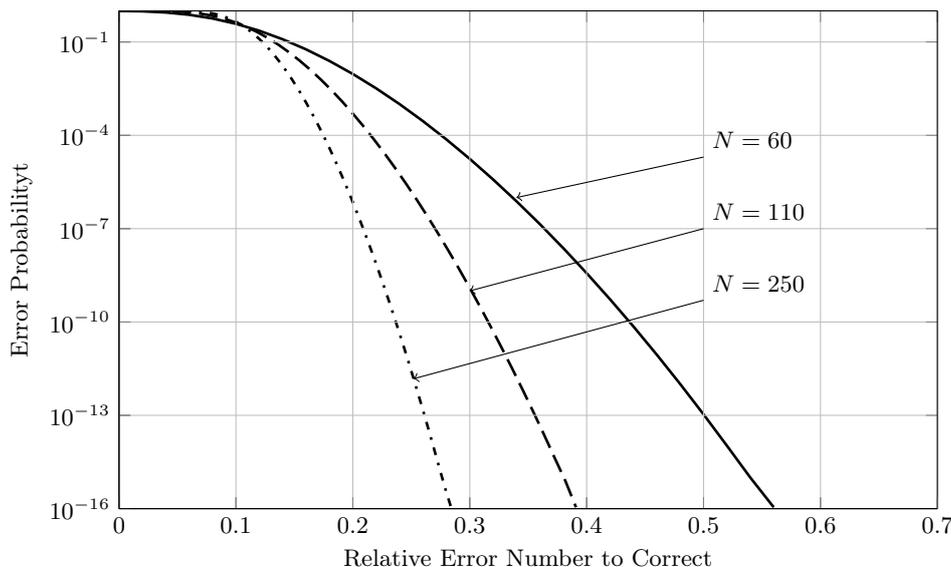


Рис. 1. Вероятность события, что доля ошибок не превысит заданный порог, для трёх разных длин кодов.

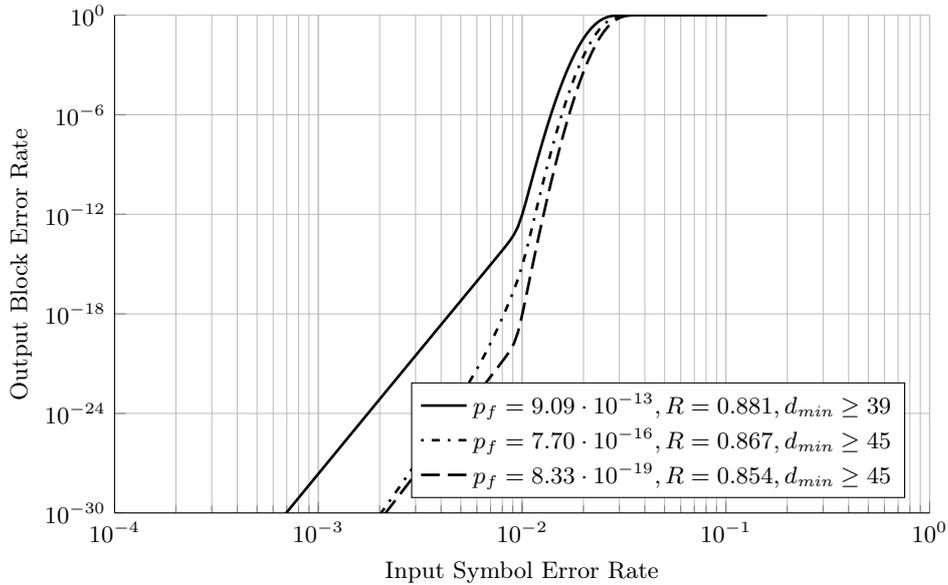
### 7. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ КОДОВ

Построим, применив алгоритм из параграфа 4.3, коды со следующими параметрами: базовое поле  $GF(16)$ , длина внутренних кодов  $n_A = 16$ , длина внешних  $n_B = 256$ . Полная длина кода получается  $n = 16384$  бита. Зададим уровень входной вероятности ошибки, равный  $p_s = 10^{-2}$  и построим конструкции для трёх требуемых выходных вероятностей ошибки  $p_f \in \{10^{-12}, 10^{-15}, 10^{-18}\}$ .

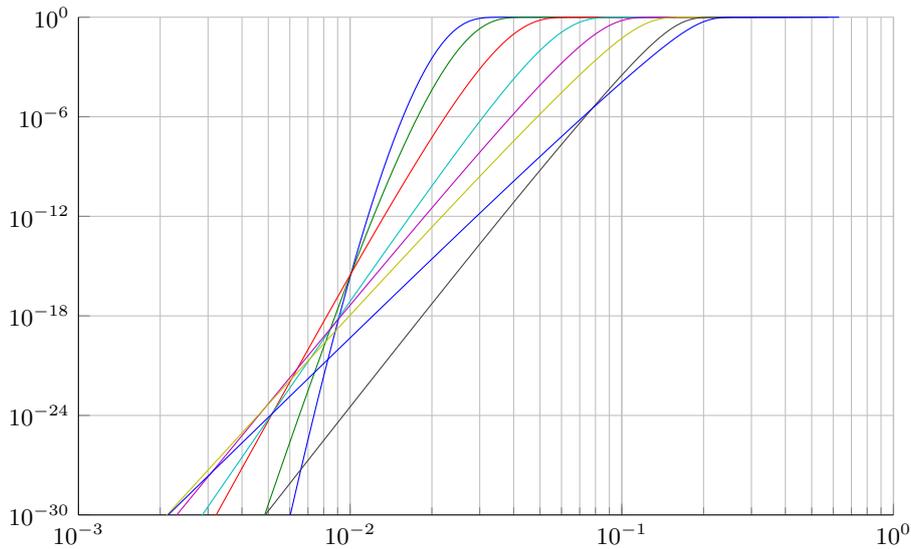
Скорости полученных кодов равны  $R \in \{0.881, 0.867, 0.854\}$ , оценка на расстояние  $d_{min} \geq d \in \{39, 45, 45\}$ . Графики вероятностей ошибки для этих кодов приведены на рис. 2.

По серии графиков на рис. 2 легко видеть, что точка перегиба кривой вероятности ошибки всегда находится в области целевых параметров входной и выходной вероятностей ошибки.

На рис. 3 отдельные кривые соответствуют вероятностям ошибочного декодирования отдельных слоёв; из них легко видеть, что вероятность ошибочного декодирования конструкции в целом, как правило, обусловлена вероятностью ошибки наихудшего слоя. При этом следует отметить, что при вероятностях ошибки больше целевых таким слоем, как правило, является первый, а при меньших — один из промежуточных.



**Рис. 2.** Вероятности ошибки отдельных внешних кодов в зависимости от входной вероятности ошибки для кода, построенного с целевыми  $p_s = 10^{-2}$ ,  $p_f \in \{10^{-12}, 10^{-15}, 10^{-18}\}$ . Параметры конструкции:  $q = 16$ ,  $n_A = 16$ ,  $n_B = 256$ ,  $n = 4096$ .



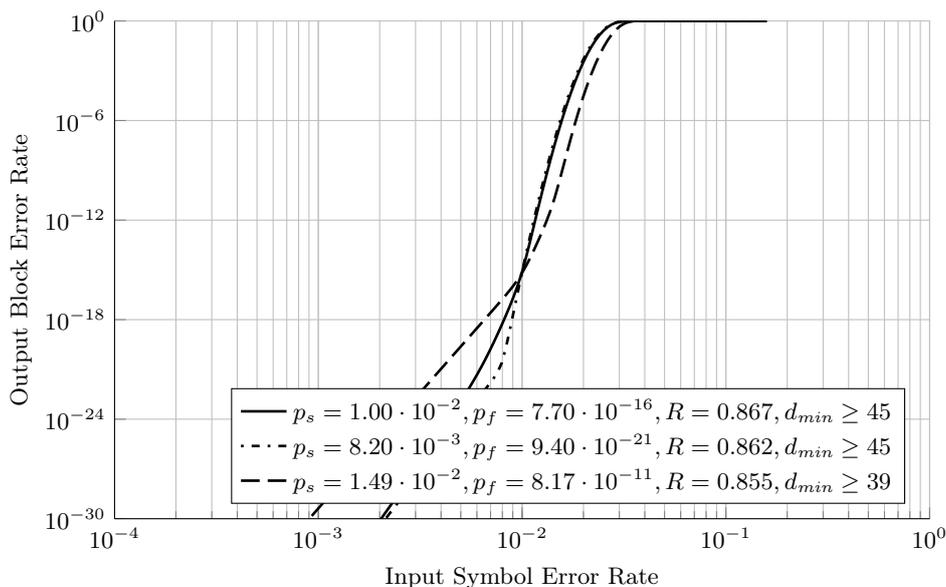
**Рис. 3.** Вероятности ошибки отдельных внешних кодов в зависимости от входной вероятности ошибки для кода, построенного с целевыми  $p_s = 10^{-2}$ ,  $p_f = 10^{-15}$ , итоговые  $R = 0.867$ ,  $p_f = 7.70 \cdot 10^{-16}$ ,  $d_{min} \geq 45$ . Параметры конструкции:  $q = 16$ ,  $n_A = 16$ ,  $n_B = 256$ ,  $n = 4096$ .

По поведению серии кривых наиболее хорошо видно, что при заданной выходной вероятности ошибки предложенный алгоритм проводит оптимизацию параметров внешних кодов таким образом, чтобы каждый из них достигал требуемую вероятность неправильного декодирования при минимальной его избыточности. Благодаря этому в районе целевой вероятности ошибки видно пересечение нескольких кривых, остальные кривые проходят ниже. При уменьшении входной вероятности ошибки (движении справа налево по оси абсцисс графика) до  $p_s$  вероятность неправильного декодирования, как правило, мажорируется вероятностью неправильного декодирования первого внешнего кода, а после неё — одного из промежуточных

внешних кодов. Как правило, это тот код, у которого наихудшая скорость убывания вероятности неправильного декодирования. В самой точке наблюдается перегиб. Следует отметить, что после точки перегиба вероятность неправильного декодирования достаточно быстро падает при уменьшении входной вероятности ошибки.

Предложенный алгоритм даёт код с наилучшей скоростью при заданных входной и выходной вероятностях. Коды, построенные для других входных и выходных вероятностей и обеспечивающие ту же  $p_f$  при той же  $p_s$  дадут худшую скорость.

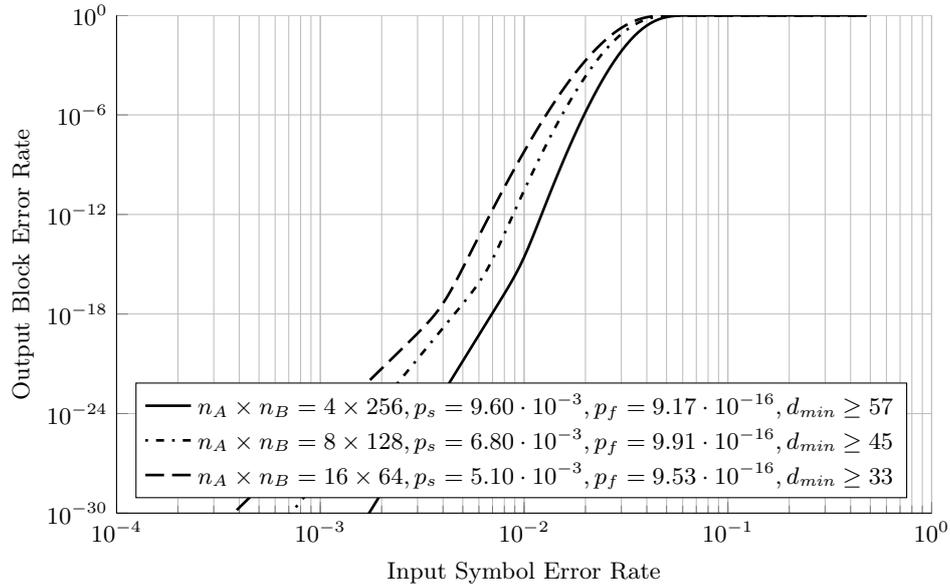
Это легко показать, построив несколько кодов, оптимизированных под различные параметры, но дающие одинаковые вероятности ошибки в выбранной точке. Пример такого построения показан на рис. 4. В данном случае ставилась задача построить коды, которые будут обладать одинаковыми вероятностями неправильного декодирования  $p_f = 10^{-15}$  при входной вероятности ошибки  $p_s = 10^{-2}$ , но оптимизировать их под различные целевые  $p_f \in \{10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-20}\}$ , подбирая параметр  $p_s$ . Получившиеся параметры кодов равны  $p_s = 10^{-2}$ ,  $p_f = 7.7 \cdot 10^{-16}$ ,  $R = 0.867$ ,  $d_{min} \geq 45$  для оптимального, а также  $p_s = 8.2 \cdot 10^{-3}$ ,  $p_f = 9.4 \cdot 10^{-21}$ ,  $R = 0.862$ ,  $d_{min} \geq 45$  и  $p_s = 1.49 \cdot 10^{-2}$ ,  $p_f = 8.17 \cdot 10^{-11}$ ,  $R = 0.855$ ,  $d_{min} \geq 39$ . Очевидно, что код, построенный сразу для целевых параметров, имеет наибольшую скорость. Дополнительная избыточность внешних кодов, если ОЛО-код построен для других параметров, используется по-разному. Если требуется более эффективная работа в области больших входных вероятностей ошибки, то она идёт на увеличение избыточности первых внешних кодов. В противном случае, если требуется достижение более низких вероятностей неправильного декодирования, то эта избыточность используется для улучшения промежуточных кодов.



**Рис. 4.** Вероятности ошибки кодов с одинаковой вероятностью неправильного декодирования  $p_f \leq 10^{-15}$  при входной вероятности ошибки  $p_s = 10^{-2}$ , построенных с разными целевыми  $p_s$  и  $p_f$ . Параметры конструкции:  $q = 16$ ,  $n_A = 16$ ,  $n_B = 256$ ,  $n = 4096$ .

Тот факт, что для наилучшей работы кодовой конструкции требуется наименьшая длина внутренних кодов и наибольшая — внешних, можно проиллюстрировать на примере. Нами были построены три кода с одинаковой полной длиной  $n_A \times n_B = 1024$  16-ричных символа с различными соотношениями длин внутренних и внешних кодов,  $n_A \times n_B \in \{4 \times 256, 8 \times 128, 16 \times 64\}$ . Целевой выходной вероятностью ошибки была задана  $p_f = 10^{-15}$ , входные вероятности ошибки  $p_s \in \{9.6 \cdot 10^{-3}, 6.8 \cdot 10^{-3}, 5.1 \cdot 10^{-3}\}$  были подобраны таким образом, чтобы скорость

построенных кодов была равна  $R = 0.8 \pm 0.002$ . Результат представлен на рис. 5. Из этой серии графиков легко видно, что наилучшими характеристиками обладает именно конструкция с параметрами  $n_A \times n_B = 4 \times 256$ .



**Рис. 5.** Вероятности ошибки кодов с одинаковой полной длиной и различной длиной внутренних кодов. Целевые выходные вероятности ошибки  $p_f = 10^{-15}$ , целевые входные вероятности ошибки подбирались таким образом, чтобы получить равные скорости кодов  $R = 0.8 \pm 0.002$ . Параметры конструкции:  $q = 16$ ,  $n = 1024$ .

В то же время, если построить набор кодов с одинаковыми параметрами входной и выходной вероятностей ошибки, но разными длинами кодов-компонентов, то их скорости будут существенно отличаться, а поведение будет практически идентично. Серия таких кривых показана на рис. 6.

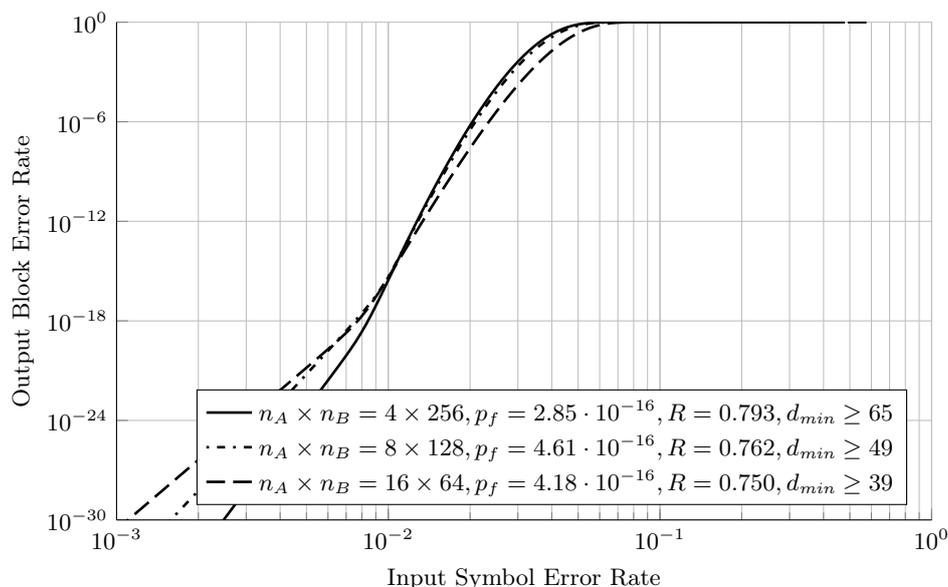
Пример построения нижней границы вероятности неправильного декодирования показан на рис. 7. Видно, что при вероятностях выше точки с целевыми параметрами нижняя граница близка к верхней, т. к. в данном случае неправильное декодирование происходит, как правило, именно из-за неправильного декодирования первого внешнего кода.

## 8. ВЫВОДЫ

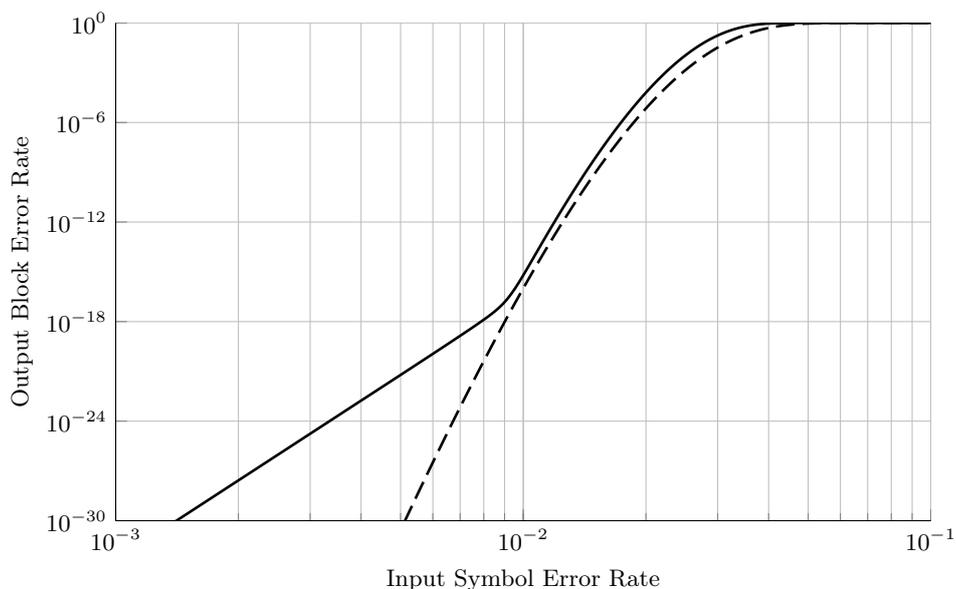
В работе рассмотрена конструкция кода с обобщённой локализацией ошибки и приведено описание верхней и нижней границ вероятности его неправильного декодирования. Предложен алгоритм выбора скоростей внешних кодов, для того, чтобы полученный ОЛО-код имел вероятность неправильного декодирования не выше заданной для указанной входной вероятности ошибки.

Стоит отметить, что важным достоинством предложенной конструкции является так же и то, что она основана на широко используемых кодах Рида-Соломона, которые реализованы в составе программных библиотек для цифровых сигнальных процессоров или ядер ИС (IP core) для программируемых логических интегральных схем.

Применение кодеров и декодеров внешних кодов с динамически настраиваемой избыточностью позволит динамически изменять параметры конструкции в зависимости от качества канала, в котором на данный момент работает система передачи данных.



**Рис. 6.** Вероятности ошибки кодов с одинаковой полной длиной и различной длиной внутренних кодов, построенных с целевыми входной вероятностью ошибки  $p_s = 10^{-2}$  и выходной  $p_f = 10^{-15}$ . Параметры конструкции:  $q = 16$ ,  $n = 1024$ .



**Рис. 7.** Верхняя и нижняя границы вероятности неправильного декодирования входной вероятности ошибки для кода, построенного с целевыми  $p_s = 10^{-2}$ ,  $p_f = 10^{-15}$ . Полученная вероятность неправильного декодирования при входной вероятности ошибки  $p_s = 10^{-2}$  ограничена  $1.01 \cdot 10^{-16} \leq p_f \leq 6.18 \cdot 10^{-16}$ . Параметры конструкции:  $q = 16$ ,  $n_A = 8$ ,  $n_B = 256$ ,  $n = 2048$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М: Наука, 1966
2. Блох Э. Л., Зяблов В. В., Линейные каскадные коды, М.:Наука, 1982. — 230 с.
3. Блох Э. Л., Зяблов В. В., Обобщённые каскадные коды, М.:Связь, 1976. — 240 с.
4. Зяблов В. В., Новая трактовка кодов для локализации ошибок, их корректирующие свойства и алгоритмы декодирования, М.:Наука, 1972. — 10 с.

5. Kobozeva I. G., Zyablov V. V., "Using GEL Codes for Optical Channel", труды XII симпозиума по проблемам избыточности в информационных системах, 2009, — с. 126–127.
6. Некучаев А. О., Зяблов В. В., "Проект "Континент": новый подход для передачи данных по магистральным ВОЛС", Фотон-Экспресс, 12008, N 3 — с. 40–42.
7. Zyablov V., Maucher J., Bossert M., On the equivalence of generalized concatenated codes and generalized error location codes, IEEE Transactions on Information Theory, volume 46(2), March 2000., pages 642- 649.
8. Зяблов В. В., Кобозева И. Г., Исследование сигнально-кодовых конструкций на основе трехмерных кодов с локализацией ошибок. Информационные процессы, Том 13, No 1, 2013, стр. 1–18.
9. J. K. Wolf, B. Elspas, "Error-Locating Codes — A New Concept in Error Control", IEEE Trans. On Information Theory, ИТ-9, N 2, 1965.
10. J. K. Wolf, "On an Extended Class of Error-Locating Codes," Information and Control, N 8, 1965.
11. Achim Fahrner, Helmu Griesser, Robert Klarer, Victor V. Zyablov, "Low-Complexity GEL Codes for Digital Magnetic Storage Systems," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 40, no. 4, July 2004
12. A. Fahrner, H. Griesser, R. Klarer, and V. V. Zyablov, "Generalized error-locating codes for digital magnetic storage systems," Proc. 5th Int. ITG 2004 Conf. Source Channel Coding (SCC), Erlangen, Germany, Jan. 14–16, 2004, pp. 219–226.
13. Афанасьев В. Б., Габидулин Э. М., "Кодирование в радиоэлектронике," М.: Радио и связь, 1986. — 176 с.
14. Жилин И. В., Иванов Ф. И., Рыбин П. С., Зяблов В. В., ОЛО-коды на основе двоичных МПП-кодов. Сборник трудов 36-й конференции молодых ученых и специалистов "Информационные технологии и системы", 2013, Калининград, стр. 485-489.
15. Igor Zhilin, Victor Zyablov, LDPC Code Construction as a Generalized Concatenated Code, proceedings of the 2014 XIV International Symposium "Problems of Redundancy in Information and Control Systems", ISBN 978-5-8088-0909-3
16. Крещук А. А., Зяблов В. В. Обобщённая каскадная система с вложенными пространственно-временными кодами для систем ММО // Информационные процессы. 2014. Т. 14, № 2. С. 160–177.
17. A. A. Kreshchuk, V. V. Zyablov, "Generalized concatenated system with embedded space-time codes for ММО systems," Journal of Communications Technology and Electronics, 2014, vol. 59, issue 12, pp. 1489–1500.

## Generalized Error Location Codes and Minimization of Redundancy for Given Input and Output Error Rates

Zhilin I. V., Kreshchuk A. A., Zyablov V. V.

Generalized error location codes are discussed in this work. Upper bound of block error rate for given code parameters is given. It is used by the algorithm for search of outer codes' rates given input error rate and desired output block error rate. Lower bound of block error rate is given. Several examples of codes' constructed by this algorithm are given. Their error rates are studied using proposed bounds.

**KEYWORDS:** GEL code, GCC code, error rate bound.