

Обобщенные коды с локализацией ошибок с мягким декодированием внутренних кодов

И. В. Жилин, Ф. И. Иванов, В. В. Зяблов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

{zhilin, fii, zyaablov}@iitp.ru

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 30.03.2015

Аннотация—В работе рассмотрены обобщенные коды с локализацией ошибок (ОЛО) как возможные кандидаты для систем передачи информации, к которым предъявляются очень жесткие требования к вероятности ошибочного декодирования (порядка 10^{-15}). В работе приведено описание кодовых конструкций, алгоритма их декодирования. Основная идея данной работы — использование мягкого декодирования коротких внутренних кодов. Показано, что использование данного подхода приводит к лучшим корректирующим характеристикам, чем использование жесткого декодирования внутренних кодов.

Представлен метод построения ОЛО-кодов с минимальной избыточностью, которые, при заданной вероятности ошибки в канале, обеспечивают вероятность ошибочного декодирования меньшую, чем некоторая наперед заданная величина.

Также в работе представлены результаты имитационного моделирования для внутренних кодов при их мягком декодировании по максимуму правдоподобия, а также численные результаты для максимально достижимой скорости ОЛО-кода в зависимости от входного отношения сигнал/шум на кодовый символ.

1. ВВЕДЕНИЕ

При переходе от сетей стандарта 4G к сетям пятого поколения 5G, скорость передачи данных существенно возрастает. Возникающие при этом ограничения на доступную ширину частотной полосы и мощность требуют использования, с одной стороны, модуляций высокого порядка, а с другой — высокоскоростных длинных кодов. При этом к таким кодам предъявляются достаточно жесткие требования к качеству передачи информации: вероятность ошибочной передачи не должна превышать 10^{-15} . Настолько низкая вероятность ошибки делает невозможным исследование корректирующих характеристик кодов методами имитационного моделирования, а значит требуются аналитические методы исследования таких кодовых конструкций.

Поскольку мягкое декодирование высокоскоростных сигнально-кодовых конструкций (СКК) может быть затруднительно (оно использует достаточно сложные вычислительные операции, которые на практике приводят к большим временным затратам), то важным становится вопрос построения кодов, которые имеют хорошие корректирующие характеристики при жестком декодировании. С другой стороны, широко известно, что энергетический выигрыш при мягком декодировании существенно превосходит выигрыш жесткого декодера. Таким образом, коды, которые возможно декодировать жесткими и мягкими алгоритмами декодирования одновременно, могут рассматриваться как хорошие кандидаты для перспективных систем передачи информации.

Так как энергия в каналах передачи информации ограничена, то декодирование перспективных СКК должно приводить к большому энергетическому выигрышу (порядка 11 дБ). Поэтому такая СКК должна быть основана на недвоичном коде с малой избыточностью, алгоритмы кодирования и декодирования которого должны иметь малую сложность, а также должны иметь возможность быть распараллелены. Этим требованиям удовлетворяют коды с малой плотностью проверок (МПП-коды) и обобщенные каскадные коды. Обобщенные коды с локализацией ошибок, по существу — это рассмотрение обобщенных каскадных кодов для высоких скоростей передач [6].

Известно, что корректирующие характеристики МПП-кодов часто ухудшаются с увеличением отношения сигнал/шум (появляется т. н. “полка” — эффект, когда вероятность ошибки слабо изменяется при увеличении отношения сигнал/шум в канале). Кроме того, достаточно затруднительно оценить вероятность ошибочного декодирования для заданной конструкции МПП-кода. Коды Рида-Соломона (РС-коды) обладают хорошими корректирующими характеристиками как при мягком, так и при жестком декодировании, для данного класса кодов возможно рассчитать вероятность ошибки (для декодеров по минимальному расстоянию), но их диапазон длин строго ограничен.

2. КОНСТРУКЦИЯ КОДА

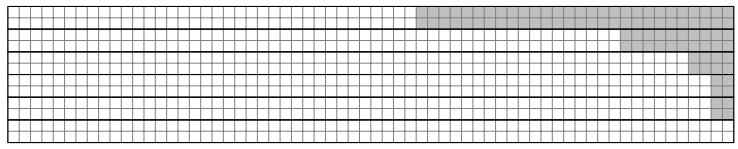
Опишем выбранную нами конструкцию кодов с обобщённой локализацией ошибок. Назовём его *нормальным* ОЛО-кодом.

Кодовым словом *нормального* q -ичного ОЛО-кода $\mathcal{C}$ мы будем называть матрицу $\mathbf{C}$ над полем $GF(q)$ размеров $n_A \times n_B$, где n_A — длина внутренних кодов, а n_B — длина внешних кодов.

Обозначим $\mathbf{H}$ проверочную матрицу системы вложенных внутренних кодов $\{\mathcal{C}_j^A\}$. Её элементы принадлежат полю $GF(q)$, её размер $n_A \times n_A$. Эта должна быть невырождена. Любые первые r_A строк этой матрицы, где r_A чётно, составляющие матрицу размера $r_A \times n_A$, будут являться матрицей внутреннего кода длины n_A с $k_A = n_A - r_A$ информационных символов. Будем нумеровать эти коды следующим образом: j -й внутренний код — это код, у которого $r_A = 2j$. Обозначим числа информационных символов, проверочных символов и расстояния этих кодов как k_j^A , r_j^A и d_j^A соответственно.

Назовём

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C} =$$


(1)

— матрицей синдромов внутренних кодов. Объединим её строки попарно. Пары строк мы будем называть слоями, а их элементами будем считать подматрицы размера 2×1 и рассматривать их как символы над полем $Q = q^2$. Тогда слои будут представлять из себя вектор-строки $\mathbf{s}_j$ длины n_B над полем $GF(Q)$, $j = \overline{1, L}$. Число слоёв $L = n_A/2$ будем называть *порядком* ОЛО-кода.

Внешние коды *нормального* ОЛО-кода $\mathcal{C}_j^B$ — коды над полем $GF(Q)$ длины n_B и имеют числа информационных символов r_j^B , скорости $R_j^B = 1 - r_j^B/n_B$, числа информационных символов $k_j^B = n_B - r_j^B$, кодовые расстояния d_j^B .

Определение 1. ОЛО-код — это множество матриц $\mathbf{C}$ таких, что слои $\mathbf{s}_j$, $j = \overline{1, L}$ матрицы $\mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}$ являются кодовыми словами внешних кодов.

Заданный таким образом ОЛО-код будет линейным кодом над полем $GF(q)$ длины $N = n_A n_B$, его число информационных символов $K = N - \sum_j 2r_j^B$. Скорость кода $R = \sum_j 2R_j^B / n_A$, то есть равна среднему арифметическому скоростей компонентных кодов. Кодовое расстояние ограничено снизу $D \geq \min_{j=\overline{2, L}} \{d_1^B, d_{j-1}^A d_j^B\}$ [4], [13].

Следует отметить, что в кодовом слове $\mathbf{C}$ ОЛО-кода в явном виде не присутствуют кодовые слова ни внутренних, ни внешних кодов. Если быть точным, в столбцах кодового слова $\mathbf{C}$ ОЛО-кода находятся слова смежных классов внутренних кодов, в то время как выбор смежного класса в i -м столбце $\mathbf{C}$ определяется теми символами слов внешних кодов, которые находятся в i -м столбце матрицы $\mathbf{S}$ (на i -х позициях вектор-строк $\mathbf{s}_j$).

3. АЛГОРИТМ КОДИРОВАНИЯ

Кратко опишем алгоритм несистематического кодирования ОЛО-кода.

Рассмотрим информационную матрицу $\mathbf{I}$ над $GF(q)$ которая имеет тот же размер и так же разделена на слои $\mathbf{I}_j$, как и матрица $\mathbf{S}$. Первые k_j^B символы $\mathbf{I}_j$ содержат информационные символы, остальные r_j^B — нулевые. На рисунке (2) белые квадраты соответствуют информационным символам, а темная область — нулям.

$$\mathbf{I} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{[Grid with white and black squares]} & (2) \\ \hline \end{array}$$

Для того, чтобы получить кодовое слово ОЛО-кода, вначале закодируем слои матрицы $\mathbf{I}$ внешними кодами. Кодеры внешних кодов используют информационные символы, игнорируя нули, и возвращают строки $\mathbf{s}_j$ которые являются кодовыми словами, соответствующими информационным символам. $\mathbf{s}_j$ являются компонентами матрицы $\mathbf{S}$.

Определим операцию кодирования как $\mathbf{S} = \text{Enc}_B\{\mathbf{I}\}$.

Для того, чтобы получить кодовое слово ОЛО-кода, требуется умножить полученную на предыдущем этапе матрицу на $\mathbf{H}^{-1}$: $\mathbf{C} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{S}$. Как было ранее отмечено, $\mathbf{H}$ должна быть невырождена.

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad (3)$$

Описанная выше процедура является простейшим способом описания кодирования ОЛО-кода, однако она не обладает наименьшей возможной сложностью. В самом деле, так как мы используем РС-коды в качестве компонентных кодов, операция кодирования может быть реализована при помощи существующих РС-кодеров. Это также позволяет динамически выбирать скорости внешних кодов и таким образом подбирать кодовую конструкцию для текущих характеристик канала.

4. МЯГКОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ КОДОВ

Рассмотрим передачу j -ого внутреннего кода через канал без памяти и с мягким выходом. Каждый символ c_i переданного слова $\mathbf{c}_j$ будет принят как мягкое значение. Это значение может быть представлено в виде вещественного вектора над $\mathbb{R}^q$:

$$\mathbf{v}_i = (Pr\{c_i = 0\}, Pr\{c_i = 1\}, \dots, Pr\{c_i = q - 1\}),$$

где $Pr\{c_i = k\}$, $k = 0..q-1$ — вероятность того, что $c_i = k$. Ясно, что

$$\sum_{k=0}^{q-1} Pr\{c_i = k\} = 1.$$

Таким образом, принятое слово мы будем рассматривать как вектор мягких значений.

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_{n_A}).$$

С этого момента и далее мы будем оперировать только мягкими значениями, не используя их внутреннюю структуру.

Так как переданные слова являются представителями смежных классов (включая само кодовое пространство), декодер внутреннего должен знать смежный класс, в котором он будет декодировать. Цель декодера — найти слово из смежного класса, которое будет ближайшим к переданному. Таким образом, декодер имеет два входных параметра: первый — номер смежного класса, и второй — принятое слово. Он возвращает слово из заданного смежного класса, ближайшее к принятому. Обозначим операцию декодирования j -го внутреннего кода следующим образом:

$$\mathbf{v}_j = Dec_A[\mathbf{s}_j]\{\mathbf{v}\} \quad (4)$$

где $\mathbf{s}_j$ — номер смежного класса, $\mathbf{v}$ — принятое слово, и $\mathbf{v}_j$ — результат декодирования (вектор над $GF(q)$). Номер смежного класса $\mathbf{s}_j$ очевидно является синдромом принятого слова $\mathbf{c}_j$: $\mathbf{s}_j = \mathbf{H}_j \mathbf{c}_j$.

В данной работе будет рассматриваться декодирование коротких внутренних кодов по максимуму правдоподобия. Можно отметить, что в зависимости от скорости кода декодирование по максимуму правдоподобия может происходить разными способами. При малой скорости кода более выгодным является перебор кодовых слов, обеспечивающий сложность $O(nq^k)$. При высоких скоростях оптимальным является декодирование по решётке, сложность которого ограничена $O(nq^r)$, где $r = n - k$ — число проверочных символов. Границы сложности декодирования кодов по решётке можно найти в [15]. Декодирование по решётке q -ичных кодов описано в [16].

Поскольку нам требуется декодировать по решётке не сам код, а его смежный класс, алгоритм декодирования будет иметь небольшие отличия. Опишем алгоритм.

Для работы декодера требуется построение синдромной решётки. Она представляет из себя граф, который строится следующим образом. Для q -ичного кода (n, k) решётка содержит $(n+1) \times q^r$ вершин. Вершины разбиты на q^r ярус, каждый из которых пронумерован определённым значением синдрома. Также она разбита на $(n+1)$ секций, i -я секция решётки, $i \in \overline{1, n}$, соответствует состоянию декодера после приёма (обработки) i -го кодового символа. Секция с $i = 0$ является начальным состоянием.

Между вершинами решётки идут рёбра, соответствующие возможным изменениям состояния синдрома. Очевидно, что если синдром имеет заданное состояние, то после приёма очередного символа возможен переход в одно из q возможных состояний. Значение состояния после приёма i -го символа v_i определяется как $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i-1} + C_i\{\mathbf{H}\}v_i$, где $C_i\{\mathbf{H}\}$ — i -й столбец проверочной матрицы рассматриваемого кода.

В случае мягкого декодирования вместо детерминированных значений речь идёт о вероятностном распределении по возможным значениям синдрома на каждом состоянии. Пришедшее из канала мягкое значение задаёт распределение вероятностей q возможных переходов из каждого из q^r состояний $\mathbf{s}_{i-1}$ в q^r состояний $\mathbf{s}_i$. Отсюда можно сделать наблюдение, что из каждой вершины выходит и в каждую из них входит по q рёбер. Это нарушается только в начале, т.

Схематичное изображение решётки приведено на рис. 1.

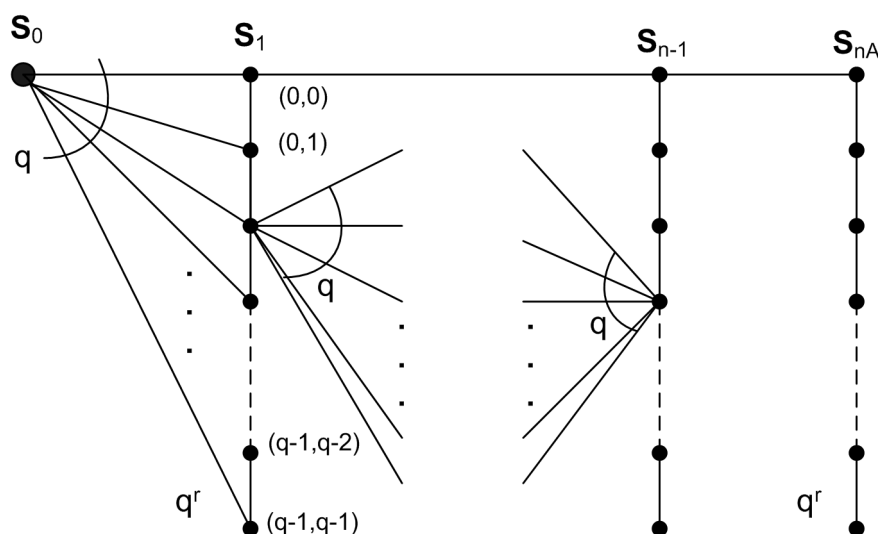


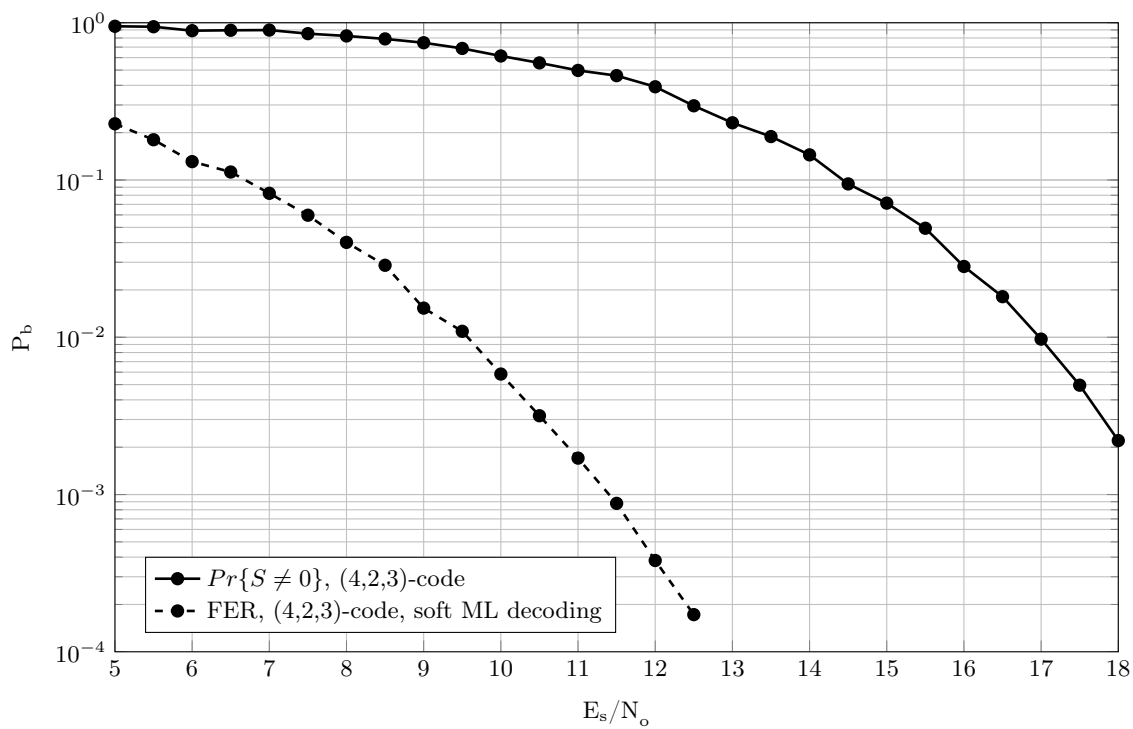
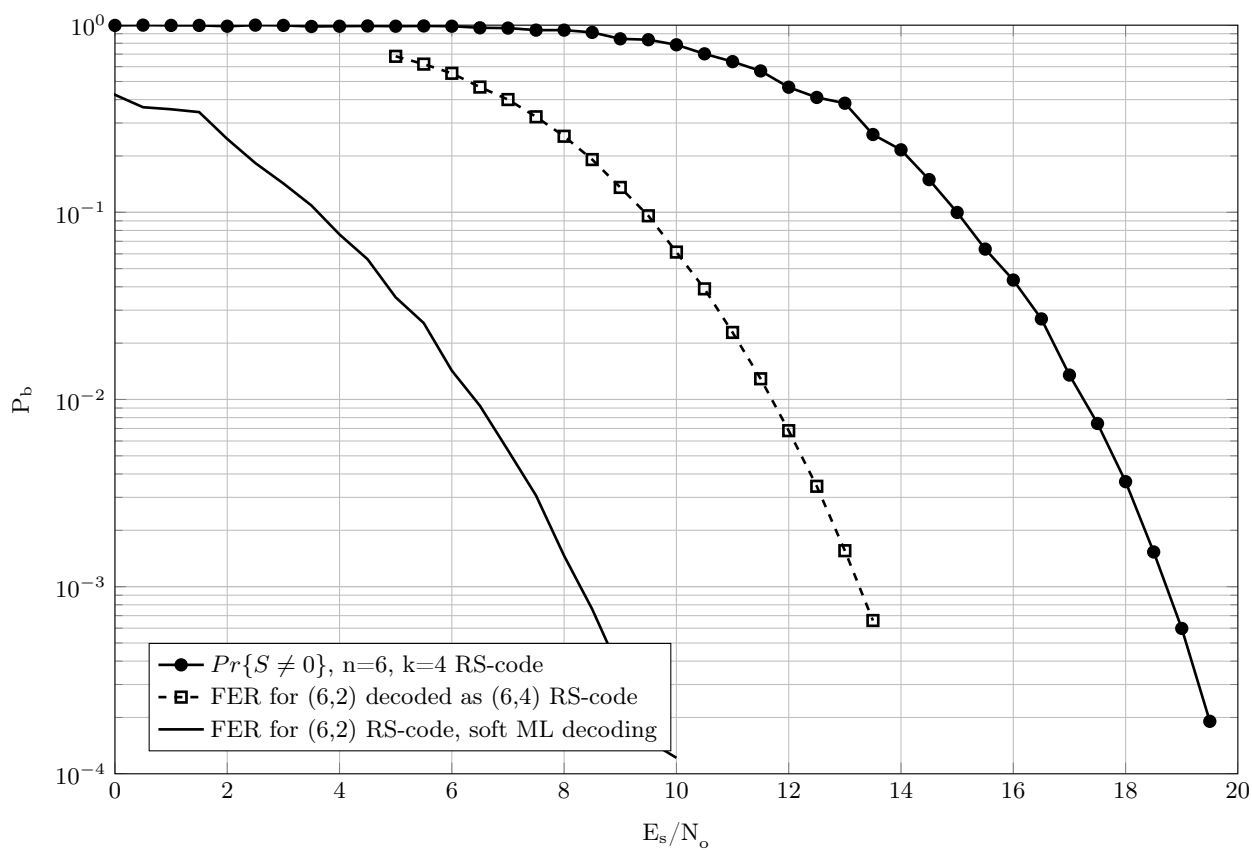
Рис. 1. Схематичное изображение синдромной решётки.

Если требуется декодировать сам код, итоговое слово соответствует пути, приходящему на n -й секции в нулевое состояние, то есть соответствующее нулевому синдрому. Так как нас интересует декодирования в смежных классах, мы будем выбирать путь, приходящий не в нулевое состояние, а в соответствующее смежному классу, заданному на входе декодера.

Пусть требуется построить ОЛЮ-код порядка $L = 2$. Так как $L = n_A/2$, то внутренние коды имеют длину $n_A = 4$. В этом случае мы имеем следующую систему внутренних кодов: первый код имеет параметры $(4, 2, 3)$, а второй $(4, 0, \infty)$. Под последним кодом мы будем понимать код нулевой скорости (т.е. код, состоящий из единственного нулевого слова). $(4, 2, 3)$ -РС код мы будем декодировать по мягкому максимуму правдоподобия.

Теперь рассмотрим второй пример. Построим ОЛО-код порядка $L = 3$. Система внутренних кодов состоит из трех укороченных РС-кодов длины $n_A = 6$. Данные коды имеют следующие параметры:

- $(n_A, k, d) = (6, 4, 3)$

Рис. 2. Входные вероятности внешних кодов, $L = 2$ Рис. 3. Вероятности на входе внешних кодов для ОЛЮ-кода с $L = 3$

- Вообще говоря, для оценки корректирующих свойств ОЛО-кода, нас не интересует конкретный тип декодера внутреннего кода. Единственное, что существенно — это вероятность ошибки каждого кода системы вложенных внутренних кодов для заданного канала. Определим p_{Aj} как вероятность неправильного декодирования j -го внутреннего кода. Эти вероятности впоследствии будут использованы для вывода верхней границы вероятности неправильного декодирования всей конструкции ОЛО-кода целиком.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ТОМ 15 № 2 2015

Теорема 1. Пусть p_{Bj} — верхняя граница вероятности ошибки для j -ого внешнего кода, $j = \overline{1, L}$. Тогда, для вероятности ошибки p ОЛО-кода $\mathcal{C}$ выполняются следующие соотношения:

$$p \leq p_B = \min \left\{ \sum_{j=1}^L p_{Bj}, 1 \right\} \quad (12)$$

где L — число слоев ОЛО-кода, p_B — верхняя граница на вероятность неправильного декодирования.

7. ПОИСК ИЗБЫТОЧНОСТЕЙ КОДОВ-КОМПОНЕНТОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ЗАДАННУЮ ВЫХОДНУЮ ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ ПРИ ЗАДАННОЙ ВХОДНОЙ

Пусть нам заданы базовые параметры кода (q, n_A, n_B, L, t_j^A) , вероятности P_{Aj} и требуемая вероятность неправильного декодирования $p_f = p_B$. Требуется найти избыточности внешних кодов-компонентов для того, чтобы обеспечить требуемую вероятность ошибки.

Алгоритм поиска оптимальных скоростей компонентных кодов состоит из следующих шагов:

- Зная P_{Aj} , вычислим верхнюю границу на p_j — вероятности появления ошибочных символов в S'_j , которые должны быть исправлены на j -ом шаге декодирования j -ым внешним кодом.
- Далее требуется ограничить вероятность ошибки каждого из внешних кодов. Очевидно, что если $\forall j : p_{Bj} \leq p_B/L$, то вероятность ошибки кодовой конструкции не превысит требуемой p_B .
- Поэтому следует найти такие t_j^B , которые обеспечат выполнение условия $p_{Bj} \leq p_B/L$.
- Количество проверочных символов в кодах вычислить как $r_j^B = \min(2t_j^B, n_B)$.

На данном этапе нам известны параметры кода, которые обеспечивают требуемые характеристики выходной вероятности ошибки при заданной входной, но могут быть неоптимальны. В данном случае требуется провести оптимизацию параметров кода. Это можно сделать следующим образом:

- Для набора r_j^B , полученного на предыдущем шаге, построить все альтернативные наборы $\{\hat{r}_j^B\}_k$ следующим образом:
 $\hat{r}_{jk}^B = r_j^B, j \neq k;$
 $\hat{r}_{jk}^B = r_j^B - 2, j = k$
 для $k = \overline{1, L}$
- Для каждого из этих наборов вычислить вероятность ошибки в соответствии с алгоритмом, описанным в параграфе 6.
- Выбрать тот набор, вероятность ошибки которого наименьшая.
- Если полученная вероятность меньше требуемой p_f , то повторить эту же операцию. Если больше, то выполнить аналогичную, но не с уменьшением, а с увеличением корректирующей способности кодов.
- Алгоритм останавливается, если после двух шагов набор r_j^B не изменился.

8. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе мы используем описанный выше метод оптимизации и полученные оценки для построения ОЛО-кода для заданной выходной вероятности ошибки и входном отношении сигнал/шум на кодовый символ. Расчеты проведены для канала с аддитивным белым

гауссовским шумом (АБГШ) с амплитудной модуляцией КАМ-16. Мы рассмотрим эффективность (с точки зрения максимально достижимой скорости для заданной выходной вероятности) для предложенной конструкции и сравним полученные результаты с конструкцией ОЛО-кода, предложенного в [13].

Как уже было отмечено ранее, в данной статье мы используем мягкое декодирование по максимум правдоподобия для внутренних кодов длин $n_A = 4$ и $n_A = 6$. Внутренние коды — укороченные коды Рида-Соломона над $GF(2^4)$. В обоих случаях длина внешнего кода $n_B = 256$. Внешние коды также являются кодами Рида-Соломона (расширенными), но заданы над полем $GF(2^8)$. Таким образом, длины полученных ОЛО-кодов равны 4096 и 6144 бит соответственно. Для случая, когда $n_A = 4$, количество слоев равно $L = 4$, а для $n_A = 6$ имеем $L = 3$.

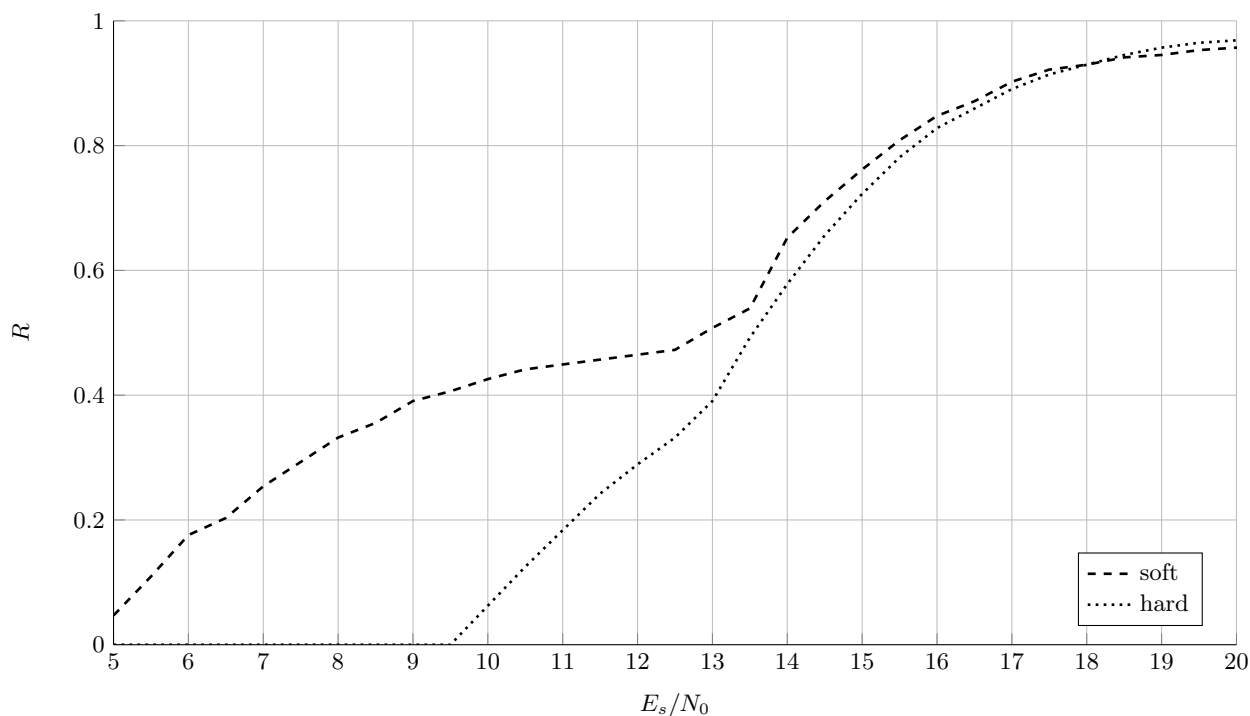


Рис. 4. Скорости ОЛО-кодов в зависимости от входного отношения сигнал/шум на кодовый символ E_s/N_0 для АБГШ с модуляцией КАМ-16, код длины 4096. Коды построены для одинаковой целевой вероятности неправильного декодирования, равной 10^{-15} .

В таблице 8 представлены параметры найденных ОЛО-кодов в зависимости от входного отношения сигнал/шум на кодовый символ для канала с модуляцией КАМ-16. В таблице использованы следующие обозначения:

- $R(s, L)$ — скорость ОЛО-кода с мягким декодированием внутреннего кода
- $R(h, L)$ — скорость ОЛО-кода с жестким декодированием внутреннего кода
- L — число слоев

Требуемая выходная вероятность: $p_f = 10^{-15}$. Графическая иллюстрация данной таблицы приведена на рисунках 4 и 5.

Следует отметить, что при построении кода с малой скоростью скорость первых внешних кодов обращается в ноль, то есть эти коды не содержат информационных символов. Это эквивалентно отсутствию этих внешних кодов. В этом случае в столбцах передаются слова не

E_s/N_0	p_s	R (s,2)	R (h,2)	R (s,3)	R (h,3)
5	$5.37 \cdot 10^{-1}$	0.0469	0	0.2292	0
6	$4.80 \cdot 10^{-1}$	0.1758	0	0.263	0
7	$4.19 \cdot 10^{-1}$	0.2539	0	0.2865	0
8	$3.54 \cdot 10^{-1}$	0.332	0	0.3099	0
9	$2.87 \cdot 10^{-1}$	0.3906	0	0.4219	0.0286
10	$2.22 \cdot 10^{-1}$	0.4258	0.0625	0.5104	0.1198
11	$1.62 \cdot 10^{-1}$	0.4492	0.1836	0.5677	0.2083
12	$1.09 \cdot 10^{-1}$	0.4648	0.2891	0.6042	0.3672
13	$6.75 \cdot 10^{-2}$	0.5078	0.3906	0.6276	0.4844
14	$3.72 \cdot 10^{-2}$	0.6523	0.5781	0.6745	0.6094
15	$1.78 \cdot 10^{-2}$	0.7617	0.7227	0.7917	0.75
16	$7.15 \cdot 10^{-3}$	0.8477	0.8281	0.8672	0.849
17	$2.32 \cdot 10^{-3}$	0.9023	0.8906	0.9167	0.9089
18	$5.73 \cdot 10^{-4}$	0.9297	0.9297	0.9505	0.9427

Таблица 1. Скорости ОЛО-кодов в зависимости от входного отношения сигнал/шум на кодовый символ E_s/N_0 для АГБШ с модуляцией КАМ-16

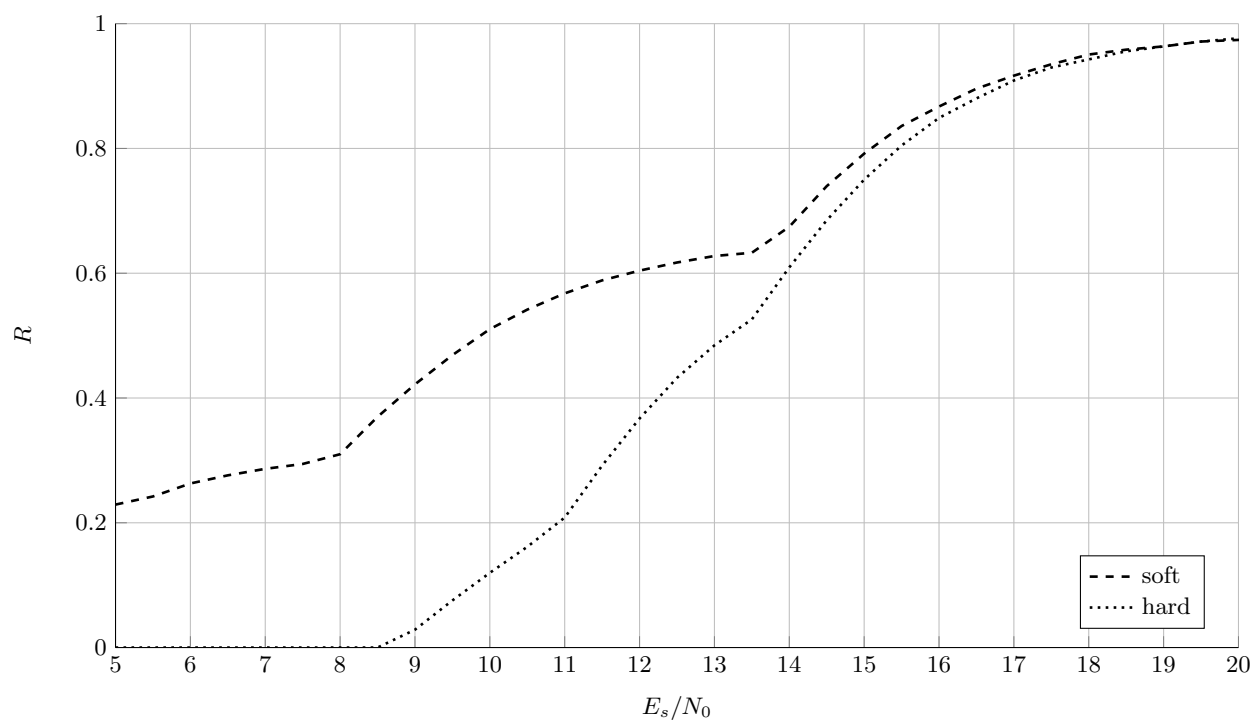


Рис. 5. Скорости ОЛО-кодов в зависимости от входного отношения сигнал/шум на кодовый символ E_s/N_0 для АГБШ с модуляцией КАМ-16, код длины 6144. Коды построены для одинаковой целевой вероятности неправильного декодирования, равной 10^{-15} .

смежных классов, а самих внутренних кодов. В этом случае декодировать внешний код не требуется, и декодирование внутренних кодов может происходить сразу же. Такой код уже не является обобщённым кодом с локализацией ошибок; по-сути, речь идёт о применении описанных выше алгоритма декодирования и методов расчёта к обобщённым каскадным кодам.

Переходы, где скорость одного из компонентных кодов обращается в ноль при ухудшении отношения соотношения сигнал/шум, видны на рис. 4 и 5 как точки, в которых резко изменяется наклон кривой. Так, на рис. 4 код для мягкого декодирования является ОЛО-кодом при $E_s/N_0 > 13.5$ дБ и обобщённым каскадным в противном случае. На рис. 5 наблюдается аналогичное поведение, а при $E_s/N_0 < 8$ дБ в ноль обращается скорость не только первого, но и второго внешнего кода.

Стоит также отметить, что при низких соотношениях сигнал/шум и, как следствие, высоких вероятностях ошибки на символ, есть широкая область, где построение кода для жёсткого декодирования невозможно (кривая скорости при этих значениях ложится на ось абсцисс). В качестве примера можно привести $E_s/N_0 = 9$ дБ для конструкции длины 4096 (см. рис. 4), где скорость кода с мягким декодированием внутренних кодов около 0.4, а с жёстким равна нулю.

Зафиксируем описанную в работе конструкцию ОЛО-кода, когда $L = 2$, а также входную вероятность ошибки (которая является функцией от отношения сигнал/шум на информационный символ) и построим зависимость между максимально достижимой скоростью ОЛО-кода и требуемой выходной вероятностью ошибки.

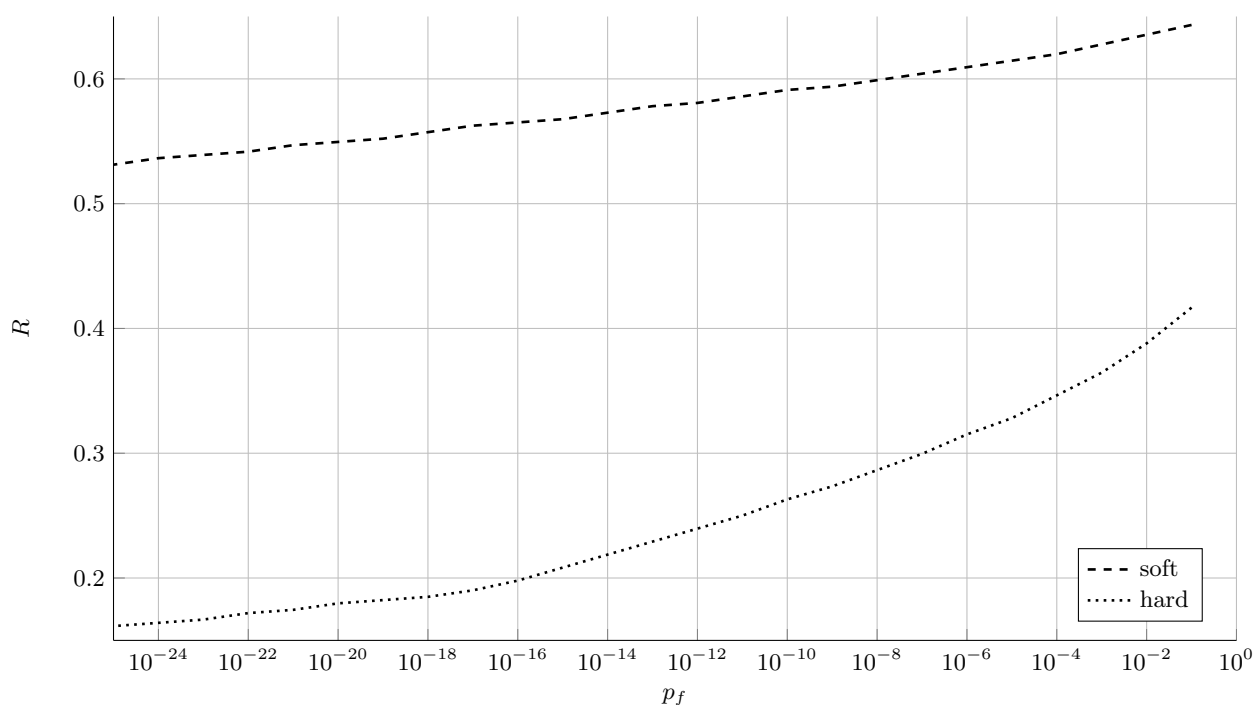


Рис. 6. Зависимость между максимально достижимой скоростью кода и требуемой выходной вероятностью ошибки на блок для входной вероятности $E_s/N_0 = 11$ дБ ($p_s = 0.1617$) для ОЛО-кодов с жестким декодированием и кодов с мягким декодированием внутренних кодов

Как видно из рисунков рис. 6–8 чем больше входная вероятность ошибки, тем большим преимуществом в плане максимально достижимой скорости обладают коды с мягким внутренним декодированием. Более того, чем ниже требуемая выходная вероятность при заданной входной, тем больше разница в скорости. Таким образом, ОЛО-коды с мягким декодированием

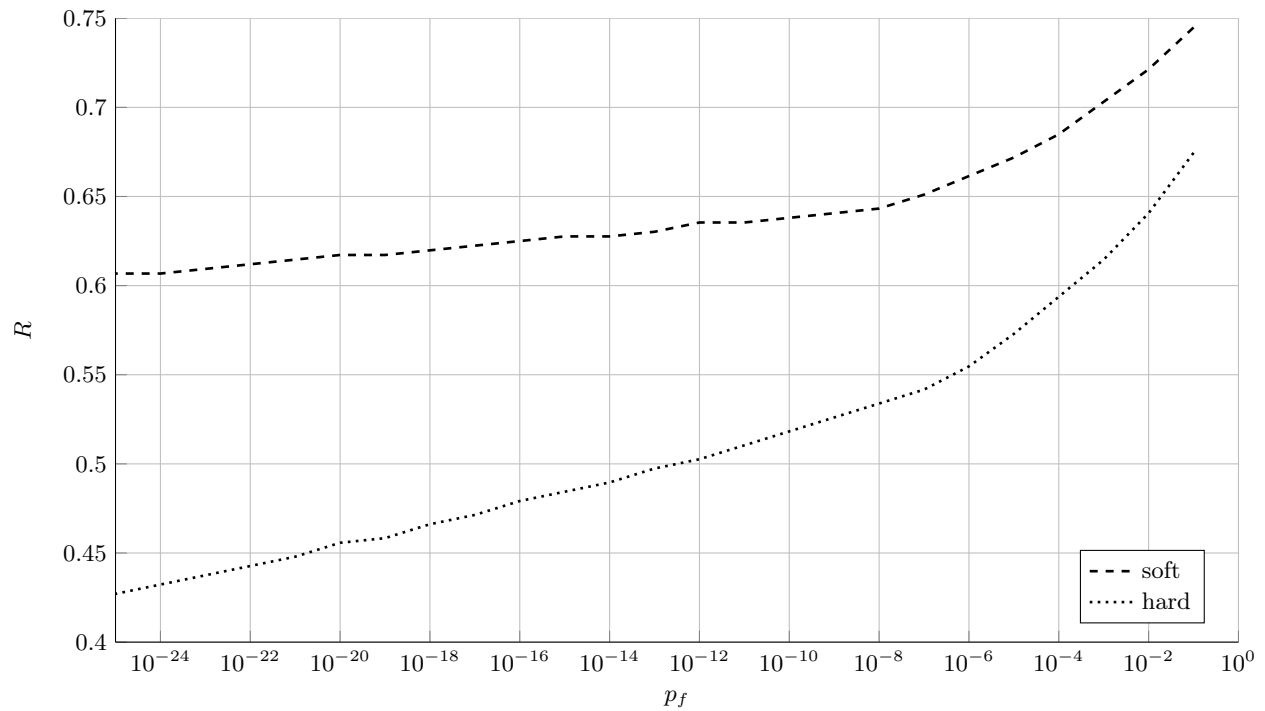


Рис. 7. Зависимость между максимально достижимой скоростью кода и требуемой выходной вероятностью ошибки на блок для входной вероятности $E_s/N_0 = 13$ дБ ($p_s = 0.0675$) для ОЛО-кодов с жестким декодированием и кодов с мягким декодированием внутренних кодов

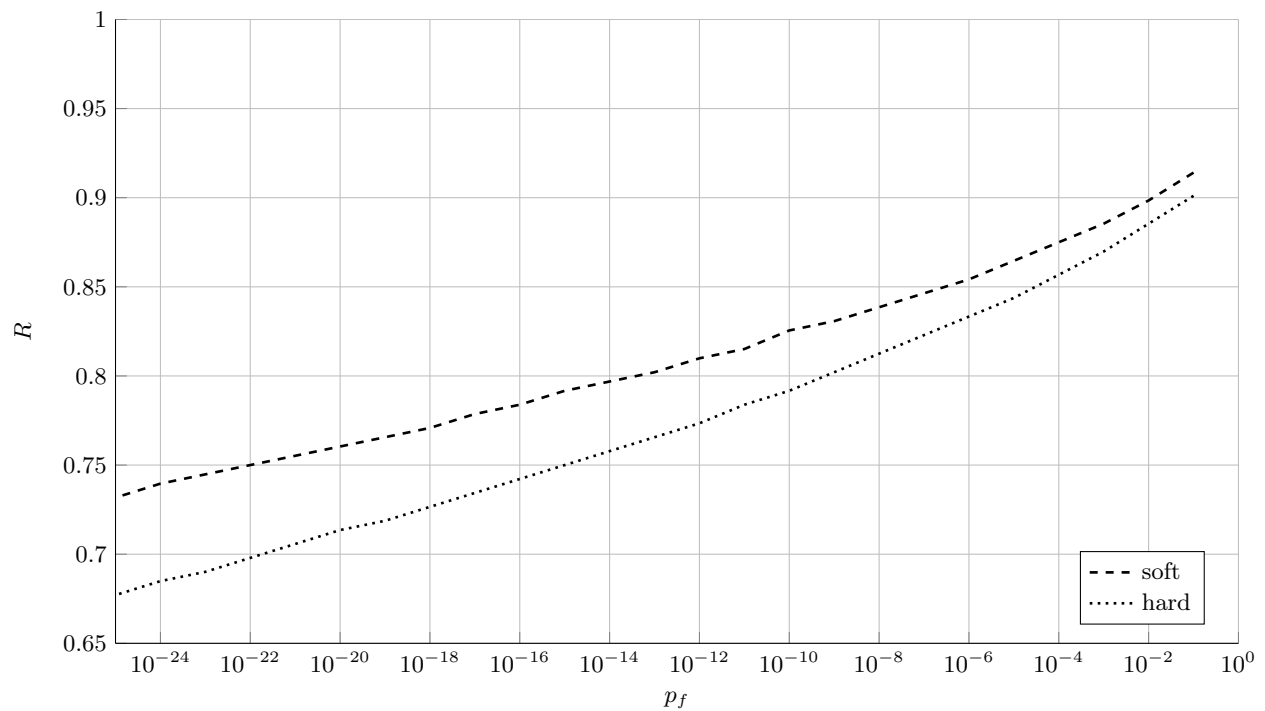


Рис. 8. Зависимость между максимально достижимой скоростью кода и требуемой выходной вероятностью ошибки на блок для входной вероятности $E_s/N_0 = 15$ дБ ($p_s = 0.0178$) для ОЛО-кодов с жестким декодированием и кодов с мягким декодированием внутренних кодов

внутренних кодов целесообразно использовать как в случае, когда требуется получить очень низкую выходную вероятность ошибки, так и в случае, когда входная вероятность ошибки достаточно велика.

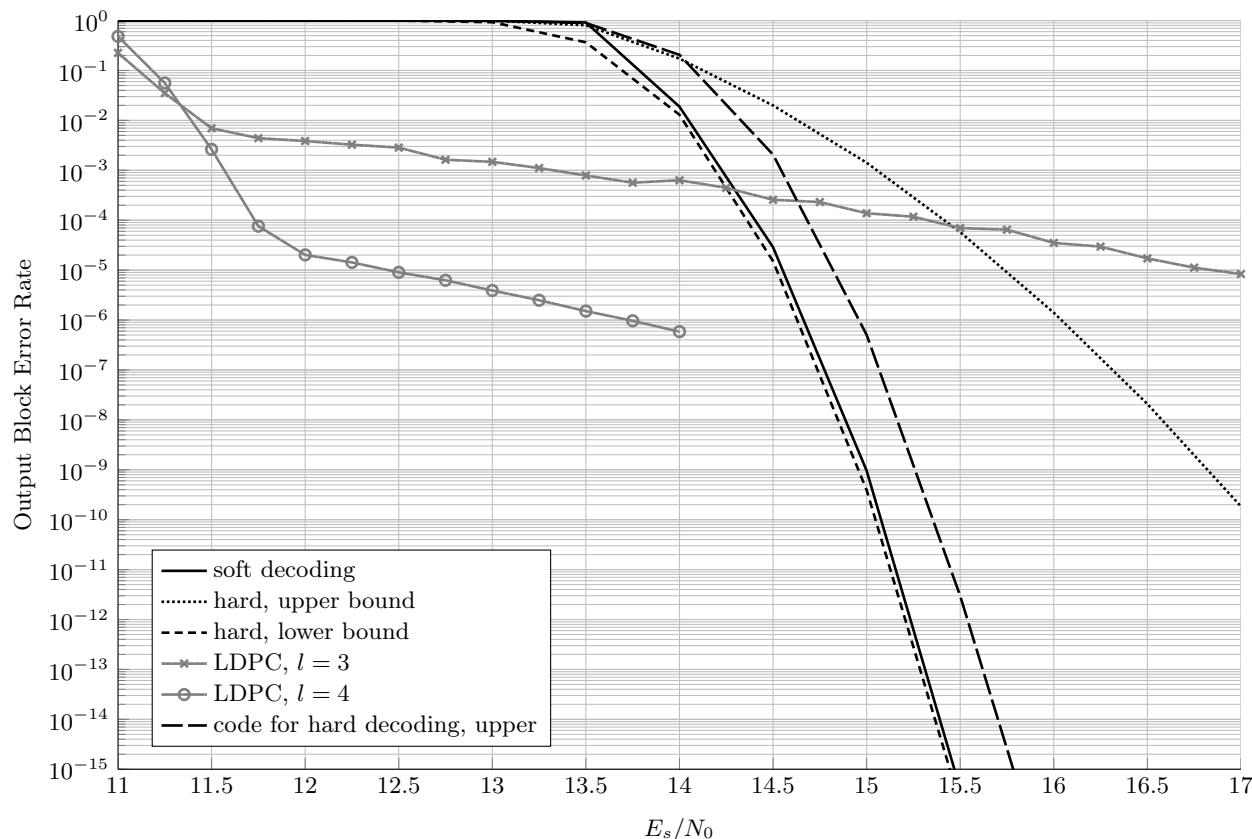


Рис. 9. Зависимость между вероятностью ошибки на блок (FER) от входного отношения сигнал/шум E_s/N_0 для предложенных кодов $n = 4096$ с мягким внутренним декодированием (сплошная линия) $R = 0.8$, верхняя и нижняя оценки вероятности ошибки ОЛО-кодов, предложенных в [13], результаты моделирования для МПП-кодов Галлагера при числе единиц в столбце $l \in \{3, 4\}$, $R = 0.8$

С помощью предложенного метода выбора избыточностей внешних компонентных кодов были построены коды длины $n = 4096$ и $n = 6144$.

Результаты декодирования ОЛО-кода длины 4096 представлены на рис. 9. На нем можно видеть сравнение кривой эффективности декодирования этого кода предложенным мягким декодером с верхней и нижней оценками на вероятность неправильного декодирования этого же кода при жестком декодировании [13]. Верхняя граница обозначена “точной” линией, а нижняя — пунктирной. Легко увидеть, что численные результаты предложенного в данной статье метода декодирования очень близки к нижней границе. Однако, не доказано, что полученная нижняя граница точна. Верхняя граница на вероятность неправильного декодирования кода, имеющего такую же скорость, но с конструкцией, оптимизированной для жесткого декодирования, показана штриховой линией. Видно, что она хуже, чем у кода с мягким декодированием, но ведет себя значительно лучше, чем верхняя граница на вероятность неправильного декодирования первого кода жестким алгоритмом. Также представлены результаты моделирования двух МПП-кодов Галлагера [17]. Оба кода являются регулярными: вес каждого столбца для первого кода равен $l = 3$, а для второго — $l = 4$. Скорости кодов равны $R = 0.8$.

Аналогичные результаты для ОЛО-кода длины 6144 представлены на рис. 10.

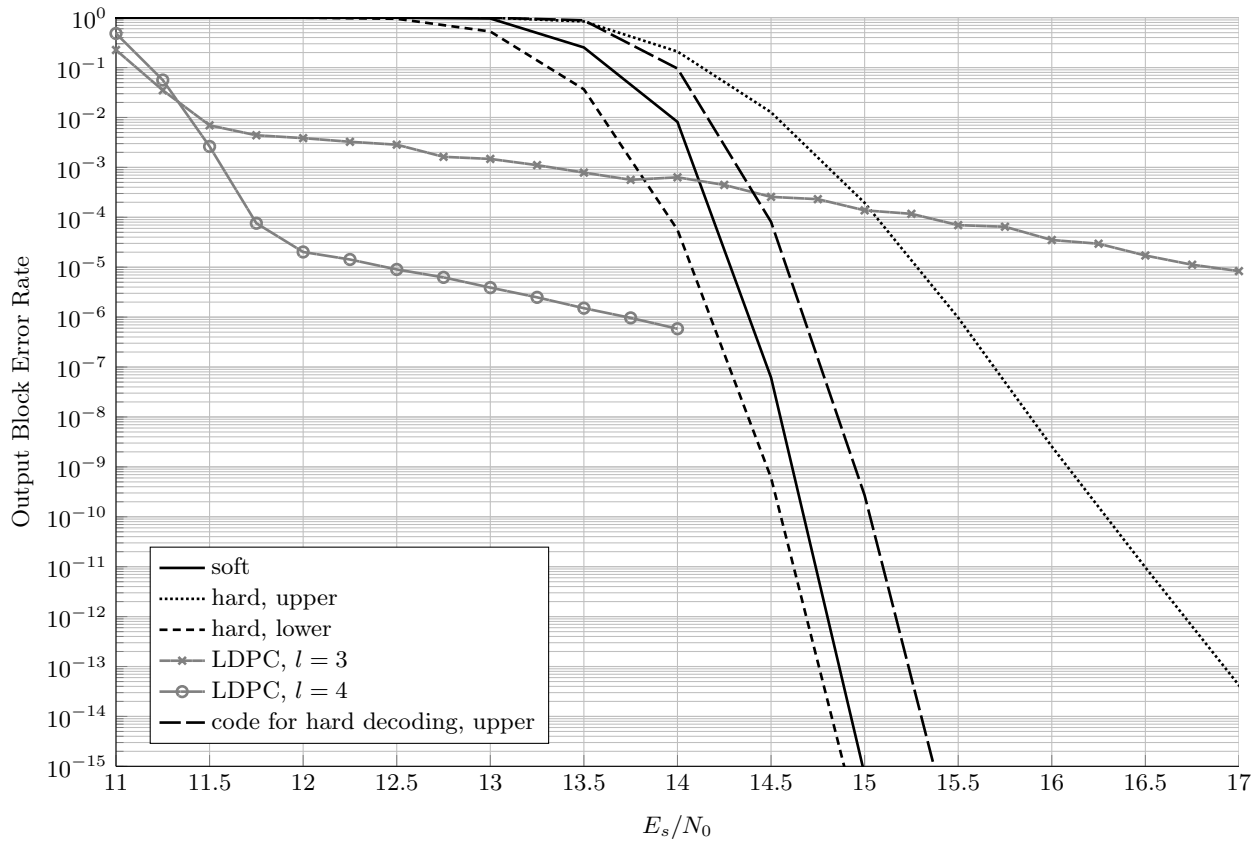


Рис. 10. Зависимость между вероятностью ошибки на блок (FER) от входного отношения сигнал/шум E_s/N_0 для предложенных кодов $n = 6144$ с мягким внутренним декодированием (сплошная линия) $R = 0.8$, верхняя и нижняя оценки вероятности ошибки ОЛО-кодов, предложенных в [13], результаты моделирования для МПП-кодов Галлагера при числе единиц в столбце $l \in \{3, 4\}$, $R = 0.8$

Полученные результаты позволяют нам сделать вывод, что предложенная конструкция ОЛО-кода вместе с методом ее декодирования может быть эффективно использована для достижения очень малой выходной вероятности ошибки: то есть в каналах с достаточно низкой вероятностью ошибки.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен новый метод декодирования ОЛО-кодов, когда короткие внутренние коды декодируются мягко по максимуму правдоподобия, а внешние — с использованием декодера по минимальному расстоянию. В работе приведен метод выбора избыточностей внешних кодов так, чтобы гарантировать заданную вероятность ошибки для заданного отношения сигнал/шум.

Полученные численные результаты позволяют сделать вывод о том, что коды, построенные предложенным в работе методом, имеют меньшую избыточность (а значит большую скорость) чем коды, оптимизированные для жесткого декодирования. В частности, эти коды позволяют работать при таких соотношениях сигнал/шум, где код для жёсткого декодирования не может быть построен.

Также было показано, что для высоких отношений сигнал/шум, ОЛО-коды по своим корректирующим характеристикам существенно превосходят МПП-коды с теми же параметрами.

Под корректирующими характеристиками в данном случае имеется ввиду вероятность ошибки на блок в зависимости от отношения сигнал/шум на кодовый символ.

Авторам неизвестна никакая другая кодовая конструкция, которая бы позволяла строить достаточно длинные коды над конечными полями небольшой мощности, обладающие алгоритмами кодирования и декодирования низкой сложности, и при этом гарантирующие, что вероятность их неправильного декодирования будет меньше, чем наперед заданная величина для некоторой входной вероятности ошибки из канала.

Последнее замечание позволяет нам избежать компьютерного моделирования предложенных кодовых конструкций, что существенно увеличивает скорость разработки современных систем связи.

Следует также отметить, что рассмотренные в работе конструкции имеют одни и те же алгоритмы кодирования и декодирования, независимо от их скорости, а изменение это изменение производится благодаря перестройке кодеров и декодеров внешних кодов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Wolf and B. Elspas, "Error-Locating Codes — A New Concept in Error Control", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 9, no. 2, pp. 113–117, 1963.
2. J. Wolf, "On an Extended Class of Error-Locating Codes", *Information and Control*, vol. 8, no. 2, pp. 163–169, 1965.
3. V. Zyablov, *A new interpretation for the error-locating codes, their error correction capabilities and decoding algorithms*. Moscow, U.S.S.R: Nauka, 1972. In Russian.
4. E. Blokh and V. Zyablov, *Generalized concatenated codes*. Moscow, U.S.S.R: Svyaz', 1976. In Russian.
5. E. Blokh and V. Zyablov, *Linear concatenated codes*. Moscow, U.S.S.R: Nauka, 1982. In Russian.
6. J. Maucher, V. Zyablov and M. Bossert, "On the equivalence of generalized concatenated codes and generalized error location codes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, no. 2, pp. 642–649, 2000.
7. Tom Richardson, *Error Floors of LDPC Codes*, Flarion Technologies, Bedminster, NJ 07921.
8. Pascal O. Vontobel, Ralf Koetter, *Graph-Cover Decoding and Finite-Length Analysis of Message-Passing Iterative Decoding of LDPC Codes*, arXiv:cs/0512078v1 [cs.IT].
9. A. Fahrner, H. Griesser, R. Klarer and V. Zyablov, "Low-complexity GEL codes for digital magnetic storage systems", *IEEE Trans. Magnet.*, vol. 40, no. 4, pp. 3093–3095, 2004.
10. I. Kobozeva and V. Zyablov, "Using GEL Codes for the Optical Channel", in *Proc. of XII International Symposium on Problems of Redundancy in Information and Control Systems*, St. Petersburg, Russia, May 2009.
11. I. Kobozeva and V. Zyablov, "Investigation of signal-code structures based on 3D error-locating codes", *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 58, no. 6, pp. 648–660, 2013.
12. V. Zyablov and I. Kobozeva, "Estimation of the wrong decoding probability for the generalized error-locating codes", *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy (Information and Control Systems)*, no. 1(62), pp. 47–53, 2013. In Russian.
13. I. Zhilin, A. Kreshchuk, V. Zyablov, "Generalized Error Location Codes and Minimization of Redundancy for Given Input and Output Error Rates", accepted for publication in *Journal of Communications Technology and Electronics*.
14. J. K. Wolf, "Efficient maximum likelihood decoding of linear block codes using a trellis" *Information Theory, IEEE Transactions on*. vol. 24, no. 1, pp. 76–80, 1978.
15. В. В. Зяблов, В. Р. Сидоренко, "Границы сложности декодирования линейных блочных кодов с помощью решеток", *Пробл. передачи информ.*, 29:3 (1993), стр. 3–9

16. В. В. Зяблов, В. Г. Потапов, В. Р. Сидоренко, “Декодирование в список максимального правдоподобия с помощью кодовой решетки”, *Пробл. передачи информ.*, 29:4 (1993), стр. 3–10
17. Gallager, Robert G. “Low-density parity-check codes.” *IEEE Trans. Inform. Theory* vol. 8, no. 1, pp. 21-28, 1962

Generalized Error Location Codes with Soft Decoding of Inner Codes

Zhilin I. V., Ivanov F. I., Zyablov V. V.

In this paper we consider a generalized error-locating code (GEL-code) as a possible candidate for data transmission systems that require strict conditions on wrong decoding probability (less than 10^{-15}). The paper describes the construction of the GEL-code and its decoding algorithm. The main idea is to implement a soft decoding of short inner codes. It will be shown that such approach results in better performance than hard decision decoding of inner codes.

We present a method for constructing GEL code (with the minimal redundancy) that guarantees that the probability of wrong decoding will be less than required one (for a given channel error probability).

Simulation results of soft maximum likelihood decoding of inner codes are presented as long as a numerical results for maximal achievable rate of GEL code versus signal-noise ratio on code symbol.

KEYWORDS: GEL code, GCC code, error rate bound, soft decoding