Информационные процессы, Том 15, № 2, 2015, стр. 128–133

Об асимптотике косинус-рядов нескольких переменных со степенными коэффициентами[1]

В. С. Козякин

Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
e-mail: kozyakin@iitp.ru

Поступила в редколлегию 30.03.2015

Аннотация—Исследование асимптотического поведения тригонометрических рядов в окрестности нулевой точки представляет важный раздел математического анализа. Для тригонометрических рядов от одной переменной эта проблема была исчерпывающе изучена различными авторами в серии публикаций, восходящих к работе Дж. Харди 1928-го года. Тригонометрические ряды нескольких переменных в этом отношении оказались менее исследованными. Цель работы — найти асимптотики для тригонометрических рядов нескольких переменных с членами, имеющими вид "единица минус косинус" с точностью до убывающего степенного коэффициента.

УДК: 517.521.1, 517.521.5

MSC 2000: 42A32; 42A10; 42A16; 42B05

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: тригонометрические ряды нескольких переменных, медленно убывающие коэффициенты, асимптотическое поведение в нуле, асимптотики типа Харди

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование асимптотического поведения тригонометрических рядов в окрестности нулевой точки представляет важный раздел математического анализа. Для тригонометрических рядов от одной переменной эта проблема была исчерпывающе изучена различными авторами в серии публикаций, восходящих к работе Дж. Харди [5] 1928-го года.

Тригонометрические ряды нескольких переменных в этом отношении оказались менее исследованными. Цель работы — частично восполнить этот пробел и найти соответствующие асимптотики для тригонометрических рядов нескольких переменных с членами, имеющими вид "единица минус косинус" с точностью до убывающего степенного коэффициента.

Зададимся некоторым числом $\alpha > 0$ и рассмотрим функцию

$$F_d(\theta) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{1}{\|z\|^{d+\alpha}}(1-\cos\langle z,\theta\rangle), \tag{1}$$

определенную при $\theta \in \mathbb{R}^d$. Здесь $\mathbb{Z}^d$ — решетка точек с целочисленными координатами в $\mathbb{R}^d$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидово скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ — max-норма в $\mathbb{R}^d$, определяемые равенствами

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_dy_d, \quad \|x\| = \max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_d|\},$$

[1] Работа выполнена в Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150)

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots, y_d\}$.

Ряд в (1) равномерно сходится при $\alpha > 0$, и поэтому функция $F_d(\theta)$ неотрицательна и непрерывна, причем $F_d(0) = 0$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение функции $F_d(\theta)$ при $\theta \to 0$.

При $d = 1$ функция $F_d(\theta)$ допускает представление

$$F_d(\theta) = 2H_\alpha(\theta), \tag{2}$$

где

$$H_\alpha(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(1 - \cos n\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

и ее асимптотика при $\theta \to 0$ может быть описана с помощью классических результатов, восходящих к работе Дж. Харди [5]. В этой работе было показано, что для функций

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta,$$

коэффициенты которых подчиняются при некотором $0 < \alpha < 1$ условию $n^\alpha a_n \to 1$, при $\theta \to 0+$ справедливы асимптотические равенства

$$f(\theta) \simeq \Gamma(1-\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \theta^{\alpha-1}, \tag{3}$$

$$g(\theta) \simeq \Gamma(1-\alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \theta^{\alpha-1}. \tag{4}$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ обозначает гамма-функцию, и для функций $h_1(\theta)$ и $h_2(\theta)$ мы пишем $h_1(\theta) \simeq h_2(\theta)$ при $\theta \to \theta_0$, если $h_1(\theta)/h_2(\theta) \to 1$ при $\theta \to \theta_0$.

При $\alpha = 1$, т.е. когда $na_n \to 1$, вместо (3) и (4) при $\theta \to 0+$ имеют место следующие предельные соотношения [6]:

$$f(\theta) \simeq |\ln \theta|, \quad g(\theta) \to \frac{\pi}{2}.$$

В [2] установлено, что формула (4) справедлива также при $0 < \alpha < 2$, а в [12, 13] проведен анализ асимптотического поведения функции $f(\theta)$ при $\alpha > 1$ и функции $g(\theta)$ при $\alpha \geq 2$.

Таким образом, в работах [2, 5, 6, 12, 13] было полностью исследовано асимптотическое поведение функций $f(\theta)$ и $g(\theta)$ при всех $\alpha > 0$. Из [12, 13] следует, в частности, что

$$H_\alpha(\theta) \simeq H^*_\alpha(\theta), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
H^*_\alpha(\theta) &= \frac{1}{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)|\theta|^\alpha && \text{при } 0 < \alpha < 2,\\
H^*_\alpha(\theta) &= \frac{1}{2}\theta^2 \ln\frac{1}{|\theta|} && \text{при } \alpha = 2,\\
H^*_\alpha(\theta) &= \frac{1}{2}\zeta(\alpha-1)\theta^2 && \text{при } \alpha > 2,
\end{aligned}$$

где

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

это дзета-функция Римана.

Выражение $\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ в предыдущих формулах формально не определено при $\alpha=1$, так как $\Gamma(0)=\infty$, а $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. В этом случае его надо понимать как предел

$$\lim_{\alpha\to 1-}\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Избавиться от этой неопределенности можно и с помощью тождества

$$\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\equiv\frac{\pi}{2\Gamma(\alpha)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}.$$

Отметим, что в работах [2,5,6,12,13], а также в расширяющих и уточняющих их исследованиях [3, 4, 7–9], содержится значительное число более глубоких результатов, чем упомянутые выше, часть из которых отражена, например, в монографии [1, гл. V].

Из (2) и (5) вытекает, что

$$F_d(\theta)\simeq 2H_\alpha^*(\theta)$$

при $d=1$ и $\alpha>0$. При $d\geq 2$ асимптотическое поведение в нуле функции $F_d(\theta)$ изучено существенно слабее. Известно [10,11], что для функции $F_2(\theta)$ в окрестности нуля справедлива оценка снизу порядка $\|\theta\|^\alpha$.

В связи с этим целью работы является изучение асимптотическое поведения в нуле функции $F_d(\theta)$ при всех $d\geq 2$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для произвольного набора чисел $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_d$ определим величину

$$\omega(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_d)=\int_{-\theta_d}^{\theta_d}\cdots\int_{-\theta_2}^{\theta_2}|\theta_1+\eta_2+\cdots+\eta_d|^\alpha\,d\eta_2\ldots d\eta_d$$

и рассмотрим симметричную функцию

$$A_d(\theta)=\sum_{\{i_j\}}\frac{\omega(\theta_{i_1},\theta_{i_2},\ldots,\theta_{i_d})}{\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_d}},\tag{6}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\{i_j\}$ координат вектора $\theta=\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_d\}$. Если часть переменных θ_i в (6) обращается в нуль, то величина $A_d(\theta)$ при соответствующих значениях аргументов однозначно доопределяется по непрерывности.

Обозначим через $|\theta|$ евклидову норму вектора $\theta=\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_d\}$, т.е. $|\theta|=\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_d^2}$.

Теорема 1. *Пусть $d\geq 2$. Тогда*

$$F_d(\theta)\simeq\frac{2}{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)A_d(\theta)\qquad\text{при } 0<\alpha<2,$$

$$F_d(\theta)\simeq\frac{2^{d-1}(d+2)}{3}|\theta|^2\ln\frac{1}{|\theta|}\qquad\text{при } \alpha=2,$$

$$F_d(\theta)\simeq\frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^d(n+1)}{n^{d+\alpha-1}}\right)|\theta|^2-\frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^d(n-1)}{n^{d+\alpha-1}}\right)|\theta|^2\qquad\text{при } \alpha>2.$$

Функция $A_d(\theta)$ положительна при $\theta \neq 0$ и однородна порядка α, т.е. $A_d(t\theta) \equiv t^\alpha A_d(\theta)$ при $t \geq 0$. Поэтому при $0 < \alpha < 2$ утверждение теоремы 1 может быть представлено также в виде:

$$F_d(\theta) \simeq \frac{2}{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) A_d\left(\frac{\theta}{|\theta|}\right)|\theta|^\alpha,$$

где $0 < A_d(\theta) < \infty$ при всех θ, удовлетворяющих соотношению $|\theta| = 1$ и, следовательно,

$$c_*|\theta|^\alpha \leq F_d(\theta) \leq c^*|\theta|^\alpha$$

при всех достаточно малых по норме θ, где c_* и c^* — некоторые положительные константы.

Применение методов исследования асимптотики тригонометрических рядов, развитых в [2–9, 12, 13] для анализа одномерного случая, вызывает определенные трудности при переходе к размерностям $d \geq 2$. Поэтому для доказательства теоремы 1 используется прием "редукции к размерности один", позволяющий выразить функцию $F_d(\theta)$ как некоторую явную комбинацию одномерных функций $F_1(\cdot)$, вернее функций $H_\alpha(\cdot)$, и, тем самым, свести анализ интересующего нас случая к одномерному. Близкая идея была использована в работах [10, 11].

Определение (6) функции $A_d(\theta)$ может оказаться неудобным при практическом применении, так как оно в конечном счете требует вычисления интегралов, задающих функцию $\omega(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$. Для упрощения определения (6) воспользуемся тем фактом, что интегралы, задающие функцию $\omega(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$, могут быть вычислены в явном виде и выражены через функции

$$x^{(m,\alpha)} = x^m|x|^\alpha.$$

Отсюда следует утверждение об альтернативном представлении функции $A_d(\theta)$.

Теорема 2. *Для функции $A_d(\theta)$ справедливо представление*

$$A_d(\theta) = \sum_{\{i_j\}} \frac{\nu(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \ldots, \theta_{i_d})}{\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_d}}, \tag{7}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\{i_j\}$ координат вектора $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d\}$, а функция $\nu(\cdot)$ определяется равенством

$$\nu(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d) = \frac{1}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+d-1)} \sum_{s_2,\ldots,s_d=\pm1} s_2\cdots s_d\left(\theta_1 + s_2\theta_2 + \cdots + s_d\theta_d\right)^{(d-1,\alpha)}.$$

Полученное выражение для функции $A_d(\theta)$ хотя и более громоздко, чем (6), но обладает тем достоинством, что в нем отсутствует необходимость вычисления интегралов.

Приведем пример вычисления асимптотики функции $F_d(\theta)$ при $d = 2$ и $0 < \alpha < 2$ с помощью теорем 1 и 2.

Пример 1. Пусть $0 < \alpha < 2$, тогда

$$F_2(\theta) \simeq \frac{2}{\alpha(\alpha+1)}\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\tilde{F}_2(\theta),$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2(\theta) = \frac{1}{\theta_2}(\theta_1+\theta_2)|\theta_1+\theta_2|^\alpha - \frac{1}{\theta_2}(\theta_1-\theta_2)|\theta_1-\theta_2|^\alpha + \\ + \frac{1}{\theta_1}(\theta_2+\theta_1)|\theta_2+\theta_1|^\alpha - \frac{1}{\theta_1}(\theta_2-\theta_1)|\theta_2-\theta_1|^\alpha.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда функция $F(\theta)$ задается рядом более общего вида, чем (1).

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha \le 2$ *и*

$$F(\theta) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} a_z(1-\cos\langle z,\theta\rangle), \qquad \theta\in\mathbb{R}^d,$$

где

$$a_z\|z\|^{d+\alpha}\to 1 \quad \text{при} \quad \|z\|\to\infty. \tag{8}$$

Тогда $F(\theta)\simeq F_d(\theta)$ *при* $\theta\to 0$.

Таким образом, при $0<\alpha\le 2$ асимптотика функции $F(\theta)$ может быть указана явно, если воспользоваться теоремой 1 для $F_d(\theta)$. В случае же $\alpha>2$ можно лишь утверждать, что $F(\theta)$ будет иметь такой же порядок убывания в нуле, как и функция $F_d(\theta)$, т.е. $F(\theta)\sim F_d(\theta)$ при $\theta\to 0$. Здесь для функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$ мы пишем $h_1(x)\sim h_2(x)$ при $x\to x_0$, если найдутся такие $c, C\in(0,\infty)$, что $c\le h_1(x)/h_2(x)\le C$ при $x\to x_0$.

Если теореме 3 вместо условия (8) выполнено менее ограничительное условие

$$0<a_*\le a_z\|z\|^{d+\alpha}\le a^*<\infty, \quad z\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\},$$

то

$$a_*F_d(\theta)\le F(\theta)\le a^*F_d(\theta),$$

и можно лишь утверждать, что порядок убывания функции $F(\theta)$ при каждом $\alpha>0$ будет такой же, как порядок убывания функции $F_d(\theta)$, т.е. и в этом случае $F(\theta)\sim F_d(\theta)$ при $\theta\to 0$. Однако, точные асимптотики для функции $F(\theta)$ в этом случае получить затруднительно.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. I. 616 с.

2. *Aljančić S., Bojanić R., Tomić M.* Sur le comportement asymtotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // *Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math.* 1956. Vol. 10. P. 101–120.

3. *Chen C.-P., Chen L.* Asymptotic behavior of trigonometric series with O-regularly varying quasimonotone coefficients // *J. Math. Anal. Appl.* 2000. Vol. 250, no. 1. P. 13–26.

4. *Chen C.-P., Chen L.* Asymptotic behavior of trigonometric series with O-regularly varying quasimonotone coefficients. II // *J. Math. Anal. Appl.* 2000. Vol. 245, no. 1. P. 297–301.

5. *Hardy G. H.* A theorem concerning trigonometrical series // *J. London Math. Soc.* 1928. Vol. S1-3, no. 1. P. 12–13.

6. *Hardy G. H.* Some theorems concerning trigonometrical series of a special type // *Proc. London Math. Soc.* 1931. Vol. S2-32, no. 1. P. 441–448.

7. *Hardy G. H., Rogosinski W. W.* Notes on Fourier series. III. Asymptotic formulae for the sums of certain trigonometrical series // *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 1945. Vol. 16. P. 49–58.

8. *Nurcombe J. R.* On trigonometric series with quasimonotone coefficients // *J. Math. Anal. Appl.* 1993. Vol. 178, no. 1. P. 63–69.

9. *Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. Vol. 326, no. 1. P. 721–735.

10. *Yarovaya E.* Branching random walks with heavy tails // *Comm. Statist. Theory Methods*. 2013. Vol. 42, no. 16. P. 3001–3010.

11. *Yarovaya E. B.* Criteria for transient behavior of symmetric branching random walks on $\mathbf{Z}$ and $\mathbf{Z}^2$ // New Perspectives on Stochastic Modeling and Data Analysis / Ed. by J. R. Bozeman, V. Girardin, C. H. Skiadas. ISAST Athens Greece, 2014. P. 283–294.

12. *Yong C.-H.* On the asymptotic behavior of trigonometric series. I // *J. Math. Anal. Appl.* 1971. Vol. 33. P. 23–34.

13. *Yong C.-H.* On the asymptotic behavior of trigonometric series. II // *J. Math. Anal. Appl.* 1972. Vol. 38. P. 1–14.

On asymptotics of cosine series in several variables with power-like coefficients

V. S. Kozyakin

The investigation of the asymptotic behavior of trigonometric series near the origin is a prominent topic in mathematical analysis. For trigonometric series in one variable, this problem was exhaustively studied by various authors in a series of publications dating back to the work of G. H. Hardy, 1928. Trigonometric series in several variables have got less attention. The aim of the work is to find the asymptotics of trigonometric series in several variables with the terms, having a form of 'one minus the cosine' up to a decreasing power-like factor.

KEYWORDS: trigonometric series in several variables, slowly decreasing coefficients, asymptotic behavior at zero, Hardy type asymptotics.