

Свойства точных решений задачи регуляризации полной вариации функций одной переменной¹

С.М. Воронин*, Ф.Ю. Маковецкий*, В.И. Кобер**, В.Н. Карнаухов**

* Челябинский Государственный университет, Челябинск, 454001, Россия

** Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, 127051, Россия

Поступила в редколлегию 22.04.2015

Аннотация—В работе рассматривается точное решение вариационной задачи минимизации функционала, состоящего из точностного и регуляризующего членов. Регуляризующий член является полной вариацией функции одной переменной. Рассматриваемая вариационная задача широко используется в теории восстановления изображений и сигналов. При увеличении значения весового коэффициента при полной вариации точным решением вариационной задачи становится все более сглаженная функция. Описывается метод вычисления точных решений и их свойства.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вариационный функционал, полная вариация, точное решение, регуляризация, восстановление сигналов.

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве работ, посвященных восстановлению сигналов, рассматривается восстановление функции, искаженной аддитивным гауссовым шумом [1]–[4]. В настоящей работе проводится анализ популярного метода восстановления искаженной функции с помощью функционала, содержащего полную вариацию в качестве регуляризующего члена. Обозначим через u исходное изображение, через n – гауссов шум. Искаженную функцию обозначим через u_0 , $u_0 = u + n$. Рассмотрим задачу восстановления функции u по известной функции u_0 . Обозначим через $J(u)$ следующий функционал:

$$J(u) = \|u - u_0\|_{L_2}^2 + \lambda TV(u), \quad (1)$$

где λ – положительный весовой коэффициент при полной вариации:

$$TV(u) = \int_{\Omega} |u'(x)| dx. \quad (2)$$

Для того, чтобы восстановить функцию u , рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$u = \operatorname{argmin}_{u \in BV(\Omega)} J(u), \quad (3)$$

где $\Omega = [a, b]$ – область определения функции u в $\mathbb{R}^1$, $BV(\Omega)$ – класс функций ограниченной вариации на Ω . Задача (3) в эквивалентной условной формулировке появилась в работе [3]. Существуют работы, посвященные различным аспектам задачи регуляризации полной вариации, например работы [4]–[6]. В работах [1], [2] исследовались точные решения задачи (1), найдены

¹ Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 13-01-00735.

точные решения для кусочно-постоянных функций непрерывного аргумента u_0 . Настоящая работа обобщает и усиливает некоторые результаты этих работ. Получено точное описание экстремальной функции $u_* = \operatorname{argmin} J(u)$ в случае, когда u_0 является кусочно-постоянной функцией, показано также, что задача о нахождении функции u_* сводится к задаче выпуклого программирования.

1. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух монотонных функций. Поэтому точки разрыва функции из класса функций BV являются точками разрыва первого рода. Пусть функция $u \in BV$ и пусть u имеет разрыв в точке c , $C_{\pm} = \lim_{x \rightarrow c \pm 0} u(x)$. Если значение функции $u(c) \notin [C_-; C_+]$, то заменив $u(c)$ на, например, C_+ , получим функцию с тем же значением точностного члена и меньшим значением регуляризующего члена. Поэтому решение задачи [3] на пространстве BV следует искать в пространстве BV_0 функций ограниченной вариации с условием $u(c) \in [C_-; C_+]$ для каждой точки разрыва c . Более того, значение функции u в каждой точке разрыва c можно выбирать произвольно на отрезке $[C_-; C_+]$. Таким образом, мы получили, что решение задачи (3) в классе BV сводится к решению задачи в классе BV_0 .

Пусть $a = r_0 < r_1 < \dots < r_n = b$ – разбиение отрезка $[a, b]$, Δ_i – интервал с концами r_{i-1}, r_i , $i = 1, \dots, n$. Пусть $\delta = \Delta_i$ такое множество интервалов, что $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\cup_{i=1}^n \Delta_i = [a, b]$.

Определение 1. Функция u называется кусочно-постоянной функцией, $u \in PC(\Omega)$, если $u(x) = C_i$ при $x \in \Delta_i$.

Представим далее сведение задачи (3) из класса BV_0 в класс PC .

Замечание 1. Принадлежность точки r_i интервалу Δ_i или интервалу Δ_{i+1} не меняет значения функционала $J(u)$.

Обозначим через $PC(\delta)$ кусочно-постоянную функцию на отрезке $\Omega = [a, b]$ с разбиением δ .

Лемма 1. Пусть $u_0 \in PC(\delta)$. Тогда для любой функции $u \in BV_0$ существует функция $\tilde{u} \in PC(\delta)$, такая, что $J(\tilde{u}) \leq J(u)$.

Доказательство. Пусть Δ_i – один из интервалов множества δ . В соответствии с замечанием 1 можно считать, что Δ_i – интервал: $\Delta_i = [r_{i-1}; r_i]$. Так как $u \in BV_0$, можно считать, что $\lim_{x \rightarrow r_i - 0} u(x) = u(r_i)$, $\lim_{(x \rightarrow r_{i-1} + 0)} u(x) = u(r_{i-1})$. Предположим, что функция $u(x)$ непостоянна на интервале Δ_i . Рассмотрим функцию $\tilde{u}(x)$, совпадающую с функцией $u(x)$ вне интервала Δ_i и равную ее среднему значению на Δ_i :

$$C_i = \frac{1}{|\Delta_i|} \int_{\Delta_i} u(x) dx, \quad (4)$$

тогда

$$\begin{aligned}
 \|u - u_0\|^2 - \|\tilde{u} - u_0\|^2 &= \int_{\Delta_i} (u - u_0)^2 dx - \int_{\Delta_i} (\tilde{u} - u_0)^2 dx = \\
 &= \int_{\Delta_i} (u - u_0)^2 dx - \int_{\Delta_i} (C_i - u_0)^2 dx = \int_{\Delta_i} (u^2 - 2uu_0 + u_0^2) dx - \int_{\Delta_i} (C_i^2 - 2C_i u_0 + u_0^2) dx = \\
 &= \int_{\Delta_i} (u^2 - C_i^2 - 2uu_0 + 2C_i u_0) dx = \int_{\Delta_i} (u^2 - C_i^2 - 2u_0(u - C_i)) dx = \\
 &= \int_{\Delta_i} ((u - C_i)^2 - 2C_i^2 + 2uC_i - 2u_0(u - C_i)) dx = \\
 &= \int_{\Delta_i} ((u - C_i)^2 - 2C_i(C_i - u) - 2u_0(u - C_i)) dx = \int_{\Delta_i} (u - C_i)^2 dx \geq 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что

$$\|u - u_0\|^2 \geq \|\tilde{u} - u_0\|^2, \quad (5)$$

Для непостоянной на интервале Δ_i функции u неравенство (5) является строго положительным.

Осталось показать, что $TV(u) \geq TV(\tilde{u})$. Значение $TV(u)$ можно представить как сумму значений полных вариаций функции u на интервалах $[a, r_{i-1})$, $[r_{i-1}, r_i)$ и $[r_i, b]$ (аналогично для значений $TV(\tilde{u})$). $TV(u)$ совпадает с $TV(\tilde{u})$ вне $[r_{i-1}, r_i)$ и $TV(u) \geq TV(\tilde{u})$ на $[r_{i-1}, r_i)$, т.к. u принимает значения как больше среднего, так и меньше среднего значения C_i .

Следствие. Если решение вариационной задачи (3) существует, то $\operatorname{argmin}_{BV_0} J(u) \in PC(\delta)$.

Замечание. Существование минимума функционала $J(u)$ следует из его строгой выпуклости на пространстве BV_0 и общей теории выпуклого анализа [7].

2. КОНЕЧНОМЕРНАЯ ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В силу леммы 1 задача (3) на пространстве BV_0 сводится к задаче на пространстве $PC(\delta)$. Пусть функция $u \in PC(\delta)$. Это означает, что u постоянна на каждом интервале Δ_i : $u(x) = h_i$, $x \in \Delta_i$, $i = 1, \dots, n$. Функция u однозначно определяется списком своих значений $\{h_1, \dots, h_n\}$. Поэтому пространство функций $PC(\delta)$ можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^n = \{h_1, \dots, h_n\}$. Заметим, что для функций $u = (h_1, \dots, h_n)$ и $u_0 = (c_1, \dots, c_n)$ выражение (1) принимает вид:

$$J(u) = \sum_{i=1}^n a(h_i - c_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} |h_{i-1} - h_i|, \quad (6)$$

где $a_i = |\Delta_i|$, $i = 1, \dots, n$. Введем в $\mathbb{R}^n$ норму по формуле $\|u\| = \sum_{i=1}^n a_i(h_i)^2$, $u = (h_1, \dots, h_n)$ и полную вариацию $TV(u) = \sum_{i=1}^{n-1} |h_{i+1} - h_i|$. Тогда исходная задача о минимизации функционала (1) превращается в задачу о минимизации следующего функционала:

$$\widehat{J(u)} = \|u - u_0\|^2 + \lambda TV(u) \rightarrow \min \quad (7)$$

на пространстве $\mathbb{R}^n$ с описанной нормой $a = (a_1, \dots, a_n)$.

3. РЕДУКЦИЯ К ЗАДАЧЕ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим возможность существования минимума функционала (7).

Теорема 1. *Существует и единственно решение $u_* = \operatorname{argmin} \widehat{J(u)}$ в пространстве $\mathbb{R}_a^n$.*

Доказательство. Функция $\|u - u_0\|^2$ строго выпукла, а функция $TV(u)$ является выпуклой. Поэтому утверждение теоремы следует из классических теорем конечномерного анализа [7].

Замечание. Фактически доказано существование единственного локального, а значит и глобального минимума.

3.1. Сигнатура $\varepsilon = \varepsilon(u_0)$ и разбиение пространства на симплексы

Будем считать, что набор $u_0 = (c_1, \dots, c_n)$ удовлетворяет следующему условию:

$$c_i \neq c_{i+1} \quad \text{при } i = 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

Если условие не выполняется, то можно уменьшить количество интервалов, объединяя соседние и добиваясь выполнения условия.

Определение 2. Сигнатурой $\varepsilon(u)$ набора $u = (h_1, \dots, h_n)$, удовлетворяющему условию (8), назовем набор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ такой, что:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & h_i < h_{i+1} \\ -1, & h_i > h_{i+1}. \end{cases}$$

Гиперплоскости $\{h_i = h_{i+1}\}$, $i = 1, \dots, n-1$, разбивают пространство $\mathbb{R}^n$ на открытые симплексы, состоящие из точек одинаковой сигнатуры. По заданному набору u_0 , удовлетворяющему условию (8), определим главную сигнатуру $\varepsilon^0 = \varepsilon(u_0)$ для формулы (7) и назовем симплекс сигнатуры ε^0 главным симплексом сигнатуры Δ :

$$\Delta = \{u \in \mathbb{R}^n : \varepsilon(u) = \varepsilon(u_0)\}. \quad (9)$$

3.2. Основная теорема о редукции

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Минимум $u_* = \operatorname{argmin} \widehat{J(u)}$ принадлежит замыканию главного симплекса: $u_* \in \bar{\Delta}$.*

Доказательство. Пусть $u_* = (h_1, \dots, h_n) \notin \bar{\Delta}$. Это значит, что найдется такое i , $1 < i < n$, что $(h_i - h_{i+1})(c_i - c_{i+1}) < 0$. Пусть, для определенности $c_i < c_{i+1}$, тогда $h_i > h_{i+1}$. Пусть $h_i > c_i$. Немного уменьшим число h_i , тогда точностный член в формуле (7) уменьшится, а регуляризующий член не изменится (если $h_{i-1} \geq h_i$), или также уменьшится (если $i = 1$, или $h_{i-1} < h_i$). Получаем противоречие с тем, что u_* – решение задачи (7). Пусть $h_{i-1} \geq h_i$. Тогда $h_{i+1} < h_i \leq c_i < c_{i+1}$. Тогда, увеличивая h_{i+1} , добьемся уменьшения функционала (7). Получаем противоречие с тем, что u_* – решение задачи (7).

Следствие 1. *Решение задачи $u_* = \operatorname{argmin} \widehat{J(u)}$ является также решением задачи*

$$\operatorname{argmin} \widehat{J(u)} \quad \text{при условии } u \in \bar{\Delta} \quad (10)$$

Замечание. При $u \in \bar{\Delta}$ полная вариация равна $TV(u) = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i(h_i - h_{i+1})$. Условие $u \in \bar{\Delta}$ означает, что $\varepsilon(h_i - h_{i+1}) \geq 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Следствие 2. Решение задачи u_* является также решением задачи $u = (h_1, \dots, h_n)$,

$$\widehat{J(u)} = \sum_{i=1}^n a_i(h_i - c_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i(h_i - h_{i+1}) \rightarrow \min \quad (11)$$

при условии

$$\varepsilon(h_i - h_{i+1}) \geq 0, \quad (12)$$

где $i = 1, \dots, n-1$ (здесь $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ – главная сигнатура).

Замечание 2. Функционал (11) также является строго выпуклым, и ограничения (12) задают выпуклый (замкнутый) симплекс. Поэтому решение задачи (11), (12) также существует и единственно. Поэтому верна последняя редукция исходной задачи к задаче выпуклого программирования.

Замечание 3. В частности, правило множителей Лагранжа немедленно дает решение задачи (11), (12), а, значит, и исходной задачи.

3.3. Свойства точных решений вариационной задачи

Пусть u_* – решение задачи (7) для данного значения параметра λ . Разобьем отрезок $[a, b]$ на интервалы знакопостоянства функции $u_0 - u_*$. Обозначим через S_+ (S_-) значение площади под графиком функции $u_0 - u_*$ на интервалах, где $u_0 - u_* > 0$ ($u_0 - u_* < 0$).

Из доказанных утверждений следуют нижеперечисленные свойства точных решений вариационной задачи (7):

- для любого значения параметра λ выполняется равенство $S_+ = S_-$;
- площадь под графиком функции u_* равна площади под графиком функции u_0 при любом значении параметра λ .

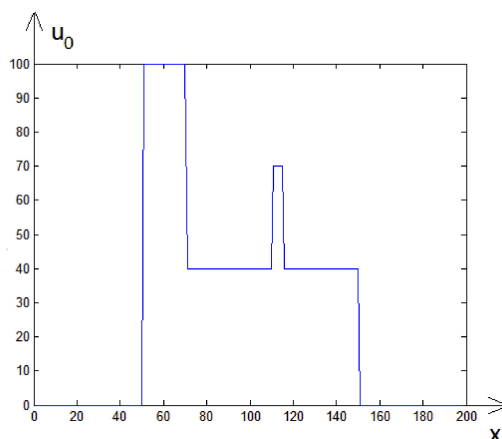


Рис. 1. Тестовая кусочно-постоянная функция.

Пример. Пусть дана следующая кусочно-постоянная функция u_0 , см. Рис. 1.

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 50) \\ 100, & x \in [50; 70) \\ 40, & x \in [70; 110) \\ 70, & x \in [110; 115) \\ 40, & x \in [115; 150) \\ 0, & x \in [150; 200). \end{cases}$$

На Рис. 2 и Рис. 3 показана функция u_* при $\lambda = 100$ и $\lambda = 2675$ соответственно.

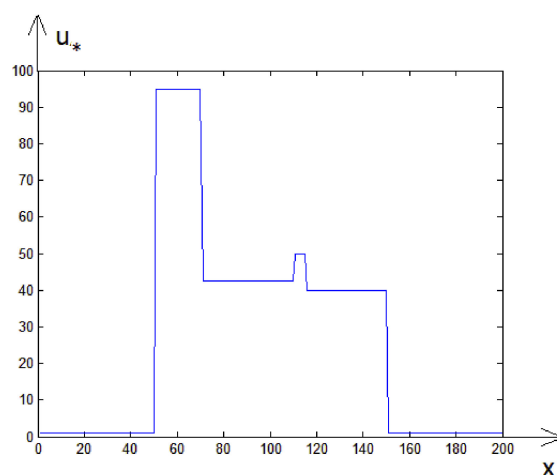


Рис. 2. Решение задачи (7) при $\lambda = 100$.

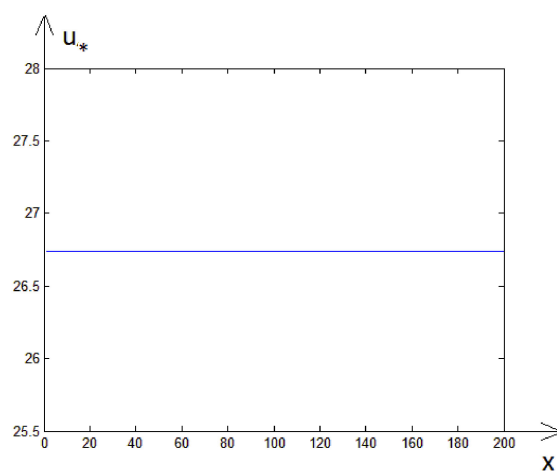


Рис. 3. Решение задачи (7) при $\lambda = 2675$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы получили точные решения задачи регуляризации полной вариации для функций от одной переменной. Доказаны существование и единственность решения, описаны свойства решений. Полученные результаты дают основания считать, что может существовать эффективный алгоритм для вычисления точных решений данной вариационной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Strong D., Chen T. Exact solutions to total variation regularization problem. *UCLA CAM Report*, 1996.
2. Strong D., Chen T. Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization. *Inverse Problems*, 2003, vol. 19, pp. 165–187.
3. Rudin L., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1992, vol. 60, pp. 259–268.
4. Chambolle A., Lions P.L. Image recovery via total variational minimization and related problems. *Numer. Math.*, 1997, vol. 76, pp. 167–188.
5. Osher S., Burger M., Goldfarb D., Xu J., Yin W. An iterative regularization method for total variation based image restoration. *Multiscale Modelling and Simulation*, 2005, vol. 4, pp. 460–489.
6. Chambolle A. An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, vol. 20, pp. 89–97.
7. Пшеничный А. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М: Наука, 1980, 319 с.

Properties of exact solutions of the total variation regularization functions of one variable

Voronin S., Makovetsky F., Kober V., Karnaukhov V.

The paper deals with the exact solution of the variational problem by minimizing a functional consisting of metric and regularizing terms. Regularizing term is the total variation for functions of one variable. The variational problem is widely used in the theory of image restoration and signals. The exact solution of the variational problem becomes a more smoothed function while the weighting factor in the functional increases. In this work the method for calculating the exact solutions and their properties are described.

KEYWORDS: variational functional, total variation, exact solution, regularization, signal restoration.