

Метод потенциалов для замкнутой системы с временем обслуживания, зависящим от длины очереди

Ю. В. Жернов, К. Ю. Жернов

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
e-mail: yu.zhernovyi@gmail.com

Поступила в редколлегию 13.02.2015

Аннотация—Предложен метод определения характеристик одноканальной замкнутой системы обслуживания с показательным распределением времени генерирования заявки и произвольным распределением времени обслуживания. С целью повышения пропускной способности системы закон распределения времени обслуживания зависит от числа заявок в системе в момент начала обслуживания каждой заявки. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе в течение периода занятости и для функции распределения периода занятости. Построенный алгоритм для вычисления стационарных характеристик системы проверен с помощью имитационной модели, разработанной с привлечением инструментальных средств GPSS World.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система обслуживания с конечным числом источников, время обслуживания, зависящее от длины очереди, метод потенциалов, стационарные характеристики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование модели замкнутой системы обслуживания, применяемой, в частности, в теории сетей связи и теории сетей интегрального обслуживания [1–4]. Замкнутую систему называют также системой с конечным числом источников или системой Энгсета.

Предположим, что в одноканальную систему обслуживания поступают заявки от m одинаковых источников. Каждый источник может сгенерировать только одну заявку и пока эта заявка не будет обслужена, источник других заявок не посылает. Время от момента возвращения заявки в источник до момента следующего её поступления в систему назовём временем генерирования заявки. Предположим, что время генерирования заявки распределено по показательному закону с параметром λ . Интенсивность входящего потока заявок замкнутой системы зависит от числа $\xi(t)$ заявок в системе в момент времени t и равна $\lambda(m - \xi(t))$. Такой поток заявок называют пуассоновским потоком второго рода [5, с. 135].

В случае показательного распределения времени обслуживания известны формулы для стационарного распределения числа заявок как для одноканальной [5, с. 137], так и для многоканальной замкнутой системы [6, с. 134]. В работе [7] с помощью метода вложенных цепей Маркова построен алгоритм определения стационарного распределения числа заявок для одноканальной замкнутой системы с произвольным распределением времени обслуживания. Реализация этого алгоритма требует большого объёма предварительных вычислений и сводится к решению системы алгебраических уравнений. В [7] найдены решения этой системы только для $m \in \{2, 3, 4\}$.

С целью уменьшения длины очереди в системах обслуживания применяются пороговые стратегии изменения интенсивности (времени) обслуживания. В общем случае сущность такой

стратегии состоит в том, что распределение времени обслуживания зависит от числа заявок в системе и определяется в момент начала обслуживания каждой заявки [8]. Эффективный алгоритм вычисления стационарного распределения числа заявок в системах с пороговыми стратегиями функционирования удалось разработать с помощью метода потенциалов [8–12]. Метод потенциалов является обобщением подхода, предложенного В. С. Королюком [13] для изучения непрерывного снизу случайного блуждания, на случай нескольких случайных блужданий. Метод потенциала с одним базовым случайным блужданием применялся для исследования системы $M^{\alpha}/G/1/N$ с одним фиксированным распределением времени обслуживания [14]. Для изучения систем с несколькими режимами функционирования возникает необходимость использования столько базовых случайных блужданий и их потенциалов, сколько применяется различных режимов функционирования.

В настоящей работе метод потенциалов применяется для исследования одноканальной замкнутой системы с произвольно распределённым временем обслуживания, вид которого зависит от числа заявок в системе. Если в момент начала обслуживания заявки число заявок в системе равно n , то время обслуживания распределено по закону $F_n(x)$, $n \in \{1, 2, \dots, m\}$. Мы предполагаем, что $F_n(x) = 0$ для $x \leq 0$.

Поскольку интенсивность входящего потока заявок замкнутой системы зависит от числа заявок в системе, то применяя метод потенциалов даже в случае обычной замкнутой системы, когда $F_n(x) = F(x)$ для $n \in \{1, 2, \dots, m\}$, для каждого n необходимо рассматривать своё базовое случайное блуждание.

2. БАЗОВЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ

Обозначим через $\mathbf{P}_n$ условную вероятность при условии, что в начальный момент времени в системе находится $n \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ заявок и через $\mathbf{E}(\mathbf{P})$ условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что система начинает работать в момент прибытия первой заявки. Пусть $\eta(x)$ — число заявок, поступивших в систему на отрезке времени $[0; x)$.

Положим:

$$f_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_n(x), \quad M_n = \int_0^{\infty} x dF_n(x) < \infty, \quad \bar{F}(x) = 1 - F(x).$$

Для $\operatorname{Re} s \geq 0$ и $n \in \{1, 2, \dots, m\}$ рассмотрим последовательности $\pi_{ni}(s)$ и $q_{ni}(s)$, определяемые с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \pi_{ni}(s) &= \frac{1}{f_n(s)} \int_0^{\infty} e^{-sx} \mathbf{P}_n\{\eta(x) = i + 1\} dF_n(x), \quad i \in \{-1, 0, 1, \dots, m - n - 1\}; \\ q_{ni}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \mathbf{P}_n\{\eta(x) = i\} \bar{F}_n(x) dx, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, m - n\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Функции $R_n(s)$ ($n \in \{1, 2, \dots, m\}$) зададим в виде

$$R_n(s) = \frac{1}{f_n(s)\pi_{n,-1}(s)}. \quad (2)$$

Последовательность $\pi_{ni}(s)$ при $s > 0$ и фиксированном n можно трактовать как распределение скачков некоторого полунепрерывного снизу случайного блуждания, соответствующего функции распределения $F_n(x)$ n -го режима обслуживания и вероятностям $\mathbf{P}_n\{\eta(x) = i + 1\}$.

Пусть $T_{i\lambda}$ обозначает показательно распределённую случайную величину с параметром $i\lambda$. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_n\{\eta(x) = 0\} &= \mathbf{P}\{T_{(m-n)\lambda} > x\} = e^{-(m-n)\lambda x}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m\}; \\
 \mathbf{P}_n\{\eta(x) = j\} &= \mathbf{P}\left\{\sum_{i=0}^{j-1} T_{(m-n-i)\lambda} < x < \sum_{i=0}^j T_{(m-n-i)\lambda}\right\} \\
 &= \mathbf{P}\left\{\sum_{i=0}^j T_{(m-n-i)\lambda} > x\right\} - \mathbf{P}\left\{\sum_{i=0}^{j-1} T_{(m-n-i)\lambda} > x\right\} = \prod_{k=0}^{j-1} (m-n-k) \\
 &\quad \times \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j-1} \frac{1 - e^{-(m-n-i)\lambda x}}{i!(j-i)!}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m-n-1\}; \\
 \mathbf{P}_n\{\eta(x) = m-n\} &= \mathbf{P}\left\{\sum_{i=0}^{m-n-1} T_{(m-n-i)\lambda} < x\right\} = \sum_{i=1}^{m-n} (-1)^{i-1} C_{m-n}^i (1 - e^{-i\lambda x}), \\
 &\quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

С учётом выражений (3) равенства (1) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 \pi_{n,-1}(s) &= \frac{f_n((m-n)\lambda + s)}{f_n(s)}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m\}; \\
 \pi_{n,j-1}(s) &= \frac{1}{f_n(s)} \prod_{k=0}^{j-1} (m-n-k) \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \frac{f_n((m-n-i)\lambda + s)}{i!(j-i)!}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\
 &\quad j \in \{1, 2, \dots, m-n-1\}; \\
 \pi_{n,m-n-1}(s) &= 1 + \frac{1}{f_n(s)} \sum_{i=1}^{m-n} (-1)^i C_{m-n}^i f_n(i\lambda + s), \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}; \\
 q_{n0}(s) &= \frac{1 - f_n((m-n)\lambda + s)}{(m-n)\lambda + s}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m\}; \\
 q_{nj}(s) &= \prod_{k=0}^{j-1} (m-n-k) \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \frac{1 - f_n((m-n-i)\lambda + s)}{i!(j-i)!((m-n-i)\lambda + s)}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\
 &\quad j \in \{1, 2, \dots, m-n-1\}; \\
 q_{n,m-n}(s) &= \frac{1 - f_n(s)}{s} + \sum_{i=1}^{m-n} (-1)^i C_{m-n}^i \frac{1 - f_n(i\lambda + s)}{i\lambda + s}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что

$$\lim_{s \rightarrow +0} f_n(s) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow +0} \frac{1}{1 - f_n(s)} = M_n, \quad n \in \{1, 2, \dots, m\}. \tag{5}$$

Введя обозначения

$$\pi_{ni} = \lim_{s \rightarrow +0} \pi_{ni}(s), \quad q_{ni} = \lim_{s \rightarrow +0} q_{ni}(s), \quad R_n = \lim_{s \rightarrow +0} R_n(s),$$

с помощью равенств (2)–(5) получим соотношения:

$$\pi_{n,-1} = f_n((m-n)\lambda), \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}; \quad \pi_{m,-1} = 1;$$

$$\begin{aligned}
\pi_{n,j-1} &= \prod_{k=0}^{j-1} (m-n-k) \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \frac{f_n((m-n-i)\lambda)}{i!(j-i)!}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\
&\quad j \in \{1, 2, \dots, m-n-1\}; \\
\pi_{n,m-n-1} &= 1 + \sum_{i=1}^{m-n} (-1)^i C_{m-n}^i f_n(i\lambda), \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}; \\
q_{n0} &= \frac{1 - f_n((m-n)\lambda)}{(m-n)\lambda}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}; \quad q_{m0} = M_m; \\
q_{nj} &= \prod_{k=0}^{j-1} (m-n-k) \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \frac{1 - f_n((m-n-i)\lambda)}{i!(j-i)!((m-n-i)\lambda)}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \\
&\quad j \in \{1, 2, \dots, m-n-1\}; \\
q_{n,m-n} &= M_n + \sum_{i=1}^{m-n} (-1)^i C_{m-n}^i \frac{1 - f_n(i\lambda)}{i\lambda}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}; \\
R_n &= \frac{1}{\pi_{n,-1}}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для вычисления q_{nj} можно воспользоваться рекуррентными соотношениями:

$$q_{nj} = q_{n+1,j-1} - \frac{\pi_{n,j-1}}{(m-n)\lambda}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m-n\}.$$

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ В ТЕЧЕНИЕ ПЕРИОДА ЗАНЯТОСТИ

Пусть $\tau(m) = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) = 0\}$ обозначает первый период занятости для рассматриваемой системы обслуживания, и для $n \in \{1, 2, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\varphi_n(t, k) = \mathbf{P}_n\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\}; \quad \Phi_n(s, k) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi_n(t, k) dt, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Очевидно, что $\varphi_0(t, k) = 0$. С помощью формулы полной вероятности получим равенства

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t, k) &= \sum_{j=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}_n\{\eta(x) = j\} \varphi_{n+j-1}(t-x, k) dF_n(x) \\
&\quad + I\{n \leq k \leq m\} \mathbf{P}_n\{\eta(t) = k-n\} \bar{F}_n(t), \quad n \in \{1, 2, \dots, m\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 или 0, в зависимости от того, состоялось событие A или нет.

Введя обозначение $f_{(n)}(s, k, m) = I\{n \leq k \leq m\} q_{n,k-n}(s)$, и учитывая соотношения (1), из (7) получим систему уравнений для определения функций $\Phi_n(s, k)$

$$\Phi_n(s, k) = f_n(s) \sum_{j=0}^{m-n} \pi_{n,j-1}(s) \Phi_{n+j-1}(s, k) + f_{(n)}(s, k, m), \quad n \in \{1, 2, \dots, m\}, \tag{8}$$

с граничным условием

$$\Phi_0(s, k) = 0. \tag{9}$$

Найдём функции $\Phi_n(s, k)$, решив систему уравнений (8), (9).

Будем использовать функции $\mathcal{R}_{ni}(s)$, определяемые с помощью рекуррентных соотношений:

$$\mathcal{R}_{n1}(s) = R_{n+1}(s); \quad \mathcal{R}_{n,j+1}(s) = R_{n+1}(s) \left(\mathcal{R}_{n+1,j}(s) - f_{n+1}(s) \sum_{i=0}^{j-1} \pi_{n+1,i}(s) \mathcal{R}_{n+1+i,j-i}(s) \right), \quad (10)$$

$$n \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m-n-1\}.$$

Теорема 1. Для всех $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ и $\operatorname{Re} s > 0$ функции $\Phi_n(s, k)$ определяются в виде

$$\Phi_n(s, k) = \mathcal{R}_{n,m-n}(s) \Phi_m(s, k) - \sum_{i=1}^{m-n} \mathcal{R}_{ni}(s) f_{(n+i)}(s, k, m), \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}, \quad (11)$$

где

$$\Phi_m(s, k) = \frac{1}{\mathcal{R}_{0m}(s)} \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{0i}(s) f_{(i)}(s, k, m). \quad (12)$$

Доказательство. Докажем равенства (11) с помощью метода математической индукции. Уравнение (8) при $n = m$ принимает вид

$$\Phi_m(s, k) = f_m(s) \pi_{m,-1}(s) \Phi_{m-1}(s, k) + f_{(m)}(s, k, m).$$

Учитывая, что $f_m(s) \pi_{m,-1}(s) = 1/R_m(s) = 1/\mathcal{R}_{m-1,1}(s)$, находим

$$\Phi_{m-1}(s, k) = \mathcal{R}_{m-1,1}(s) (\Phi_m(s, k) - f_{(m)}(s, k, m)).$$

Полученное равенство совпадает с (11) при $n = m - 1$.

Предположим, что равенства (11) выполняются для всех натуральных n из множества $\{\tilde{n}, \tilde{n} + 1, \dots, m - 2\}$, где $\tilde{n}$ — фиксированное число ($1 < \tilde{n} < m - 1$). Докажем равенство вида (11) для $n = \tilde{n} - 1$. Из (8) при $n = \tilde{n}$ получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{n}}(s, k) &= f_{\tilde{n}}(s) \pi_{\tilde{n},-1}(s) \Phi_{\tilde{n}-1}(s, k) + f_{\tilde{n}}(s) \pi_{\tilde{n},0}(s) \Phi_{\tilde{n}}(s, k) \\ &\quad + f_{\tilde{n}}(s) \sum_{j=2}^{m-\tilde{n}} \pi_{\tilde{n},j-1}(s) \Phi_{\tilde{n}+j-1}(s, k) + f_{(\tilde{n})}(s, k, m). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{n}-1}(s, k) &= R_{\tilde{n}}(s) \left((1 - f_{\tilde{n}}(s) \pi_{\tilde{n},0}(s)) \Phi_{\tilde{n}}(s, k) - f_{\tilde{n}}(s) \sum_{j=2}^{m-\tilde{n}} \pi_{\tilde{n},j-1}(s) \Phi_{\tilde{n}+j-1}(s, k) \right. \\ &\quad \left. - f_{(\tilde{n})}(s, k, m) \right) = R_{\tilde{n}}(s) \left((1 - f_{\tilde{n}}(s) \pi_{\tilde{n},0}(s)) \left(\mathcal{R}_{\tilde{n},m-\tilde{n}}(s) \Phi_m(s, k) - \sum_{i=1}^{m-\tilde{n}} \mathcal{R}_{\tilde{n}i}(s) f_{(\tilde{n}+i)}(s, k, m) \right) \right. \\ &\quad \left. - f_{\tilde{n}}(s) \sum_{j=2}^{m-\tilde{n}} \pi_{\tilde{n},j-1}(s) \left(\mathcal{R}_{\tilde{n}+j-1,m-\tilde{n}-j+1}(s) \Phi_m(s, k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^{m-\tilde{n}-j+1} \mathcal{R}_{\tilde{n}+j-1,i}(s) f_{(\tilde{n}+j-1+i)}(s, k, m) \right) - f_{(\tilde{n})}(s, k, m) \right). \end{aligned}$$

Собрав в полученном выражении все слагаемые, образующие коэффициент при $\Phi_m(s, k)$, и отдельно записав все остальные слагаемые, после использования соотношений (10) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{n}-1}(s, k) &= R_{\tilde{n}}(s) \left((1 - f_{\tilde{n}}(s) \pi_{\tilde{n},0}(s)) \mathcal{R}_{\tilde{n}, m-\tilde{n}}(s) \right. \\ &\quad \left. - f_{\tilde{n}}(s) \sum_{j=2}^{m-\tilde{n}} \pi_{\tilde{n},j-1}(s) \mathcal{R}_{\tilde{n}+j-1, m-\tilde{n}-j+1}(s) \right) \Phi_m(s, k) \\ &\quad - R_{\tilde{n}}(s) \left(f_{(\tilde{n})}(s, k, m) + \sum_{i=2}^{m-\tilde{n}+1} f_{(\tilde{n}-1+i)}(s, k, m) \left(\mathcal{R}_{\tilde{n}, i-1}(s) - f_{\tilde{n}}(s) \sum_{k=0}^{i-2} \pi_{\tilde{n},k}(s) \mathcal{R}_{\tilde{n}+k, i-1-k}(s) \right) \right) \\ &= \mathcal{R}_{\tilde{n}-1, m-\tilde{n}+1}(s) \Phi_m(s, k) - \sum_{i=1}^{m-\tilde{n}+1} \mathcal{R}_{\tilde{n}-1, i}(s) f_{(\tilde{n}-1+i)}(s, k, m). \end{aligned}$$

Найденное выражение совпадает с (11) при $n = \tilde{n} - 1$. Итак, равенства (11) доказаны.

Для получения формулы (12) достаточно положить $n = 0$ в (11) и использовать граничное условие (9). Теорема доказана. $\square$

4. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если система начинает работать в момент прибытия первой заявки, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{P}\{\xi(t) = k, \tau(m) > t\} dt &= \Phi_1(s, k) \\ &= \frac{\mathcal{R}_{1, m-1}(s)}{\mathcal{R}_{0m}(s)} \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{0i}(s) f_{(i)}(s, k, m) - \sum_{i=1}^{m-1} \mathcal{R}_{1i}(s) f_{(i+1)}(s, k, m). \end{aligned} \quad (13)$$

Для отыскания $\int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{P}\{\tau(m) > t\} dt$ необходимо сложить равенства (13) для всех k от 1 до m . Учитывая определения $f_{(n)}(s, k, m)$ и $q_{nj}(s)$, нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^m f_{(n)}(s, k, m) = \sum_{k=n}^m f_{(n)}(s, k, m) = \sum_{j=0}^{m-n} q_{nj}(s) = \frac{1 - f_n(s)}{s}, \quad n \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Итак, из (13) вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Преобразование Лапласа от функции распределения периода занятости определяется в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{P}\{\tau(m) > t\} dt &= \frac{1}{s \mathcal{R}_{0m}(s)} \left(\mathcal{R}_{1, m-1}(s) \mathcal{R}_{0, m-1}(s) (1 - f_{m-1}(s)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{m-2} \left(\mathcal{R}_{1, m-1}(s) \mathcal{R}_{0i}(s) (1 - f_i(s)) - \mathcal{R}_{0m}(s) \mathcal{R}_{1i}(s) (1 - f_{i+1}(s)) \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Для отыскания $\int_0^{\infty} \mathbf{P}\{\tau(m) > t\} dt = \mathbf{E} \tau(m)$ необходимо перейти к пределу в равенстве (14) при $s \rightarrow +0$. Для этого будем использовать последовательности $\{\pi_{ni}\}$, $\{q_{ni}\}$ и $\{R_n\}$, а также

последовательности $\{\mathcal{R}_{ni}\}$, полученные вследствие предельного перехода $\mathcal{R}_{ni} = \lim_{s \rightarrow +0} \mathcal{R}_{ni}(s)$. Для $\mathcal{R}_{ni}$ из (10) вытекают рекуррентные соотношения

$$\mathcal{R}_{n1} = R_{n+1}; \quad \mathcal{R}_{n,j+1} = R_{n+1} \left(\mathcal{R}_{n+1,j} - \sum_{i=0}^{j-1} \pi_{n+1,i} \mathcal{R}_{n+1+i,j-i} \right), \quad (15)$$

$$n \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m-n-1\}.$$

Используя соотношения (15) и учитывая равенства

$$\sum_{j=-1}^{m-n-1} \pi_{nj} = 1, \quad n \in \{1, 2, \dots, m\},$$

методом математической индукции можно доказать, что

$$\mathcal{R}_{n,m-n} = 1, \quad n \in \{1, 2, \dots, m-1\}. \quad (16)$$

Учитывая (5) и (16), с помощью (14) приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Средняя продолжительность периода занятости определяется в виде*

$$\mathbf{E} \tau(m) = \mathcal{R}_{0,m-1} M_{m-1} + \sum_{i=1}^{m-2} (\mathcal{R}_{0i} M_i - \mathcal{R}_{1i} M_{i+1}). \quad (17)$$

Введём обозначения: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = p_k(m)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Рассуждая так же, как в работе [8], и учитывая, что промежутки времени пребывания системы в состоянии без заявок распределены показательно с параметром $m\lambda$, из (13) получаем формулы для стационарного распределения числа заявок в системе.

Теорема 4. *Стационарное распределение числа заявок в системе определяется по формулам*

$$p_0(m) = \frac{1}{1 + m\lambda \mathbf{E} \tau(m)};$$

$$p_k(m) = m\lambda p_0(m) \left(\mathcal{R}_{0k} q_{k0} + \sum_{i=1}^{k-1} (\mathcal{R}_{0i} q_{i,k-i} - \mathcal{R}_{1i} q_{i+1,k-i-1}) \right), \quad k \in \{1, 2, \dots, m-1\}; \quad (18)$$

$$p_m(m) = m\lambda p_0(m) \left(\mathcal{R}_{0,m-1} q_{m-1,1} + \sum_{i=1}^{m-2} (\mathcal{R}_{0i} q_{i,m-i} - \mathcal{R}_{1i} q_{i+1,m-i-1}) \right).$$

Стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{E} Q(m)$ и среднее время ожидания $\mathbf{E} w(m)$ — находим по формулам

$$\mathbf{E} Q(m) = \sum_{k=1}^{m-1} k p_{k+1}(m); \quad \mathbf{E} w(m) = \frac{\mathbf{E} Q(m)}{\lambda_{\text{av}}}. \quad (19)$$

Здесь λ_{av} — стационарное значение интенсивности входящего потока, определяемое равенством

$$\lambda_{\text{av}} = \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) p_k(m). \quad (20)$$

Поскольку для стационарного режима функционирования системы имеет место равенство интенсивностей потоков заявок, поступающих в систему и обслуженных ею, то параметр λ_{av} является характеристикой пропускной способности системы.

5. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим два примера вычисления стационарных характеристик замкнутых систем обслуживания.

Пример 1. Рассмотрим замкнутую систему с одним порогом h переключения распределения времени обслуживания. Пусть

$$F_n(x) = F(x), \quad n \in \{1, 2, \dots, h\}; \quad F_n(x) = \tilde{F}(x), \quad n \in \{h+1, h+2, \dots, m\}.$$

Введём обозначения:

$$f(y) = \int_0^\infty e^{-yx} dF(x), \quad \tilde{f}(y) = \int_0^\infty e^{-yx} d\tilde{F}(x); \quad M = \int_0^\infty x dF(x), \quad \tilde{M} = \int_0^\infty x d\tilde{F}(x).$$

Имеем:

$$f_n(y) = f(y), \quad n \in \{1, 2, \dots, h\}; \quad f_n(y) = \tilde{f}(y), \quad n \in \{h+1, h+2, \dots, m\}.$$

Предположим, что $m = 6$, $\lambda = 2$, $h = 3$, функции распределения времени обслуживания $F(x)$ соответствует равномерное распределение на промежутке $(0; 0,5]$, а функции распределения $\tilde{F}(x)$ — равномерное распределение на промежутке $(0; 0,25]$. Таким образом,

$$M = 0,25, \quad \tilde{M} = 0,125, \quad f(y) = \frac{2}{y}(1 - e^{-0,5y}), \quad \tilde{f}(y) = \frac{4}{y}(1 - e^{-0,25y}).$$

Пример 2. Рассмотрим замкнутую систему с распределением времени обслуживания, не зависящим от числа заявок в системе: $F_n(x) = F(x)$, $f_n(y) = f(y)$, $n \in \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть $m = 6$, $\lambda = 2$, функция распределения $F(x)$ та же, что и в примере 1, то есть

$$M = 0,25, \quad f(y) = \frac{2}{y}(1 - e^{-0,5y}).$$

Систему с параметрами, соответствующими примеру i , назовём *системой i* , $i = 1, 2$.

В строках " $p_k(6)$ " табл. 1 и 2 записаны стационарные вероятности $p_k(6)$, вычисленные по формулам (18) для систем 1 и 2 соответственно, а в нижних строках этих таблиц для сравнения приведены значения соответствующих вероятностей, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [15] для значения времени $t = 10^6$. Значения стационарных характеристик систем 1 и 2, найденные по формулам (17), (19) и (20), а также при помощи GPSS World, представлены в табл. 3 и 4 соответственно. Программы для GPSS World приведены в Приложении.

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок в системе 1

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5	6
$p_k(6)$	0,00668	0,03233	0,11662	0,29876	0,33359	0,17711	0,03491
$p_k(6)$ (GPSS World, $t = 10^6$)	0,00675	0,03277	0,11605	0,29901	0,33281	0,17747	0,03515

Анализируя полученные результаты, видим, что применение пороговой стратегии изменения времени обслуживания позволяет уменьшить длину очереди и продолжительность периода занятости и, соответственно, повысить пропускную способность системы λ_{av} .

Таблица 2. Стационарное распределение числа заявок в системе 2

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5	6
$p_k(6)$	0,00450	0,02176	0,07848	0,20107	0,32825	0,28159	0,08435
$p_k(6)$ (GPSS World, $t = 10^6$)	0,00457	0,02183	0,07839	0,20129	0,32779	0,28188	0,08425

Таблица 3. Стационарные характеристики системы 1

Характеристика	$E\tau(6)$	$EQ(6)$	$Ew(6)$	λ_{av}
Аналитическое значение	12,393	2,598	0,539	4,818
Значение согласно GPSS World, $t = 10^6$	12,270	2,597	0,539	4,819

Таблица 4. Стационарные характеристики системы 2

Характеристика	$E\tau(6)$	$EQ(6)$	$Ew(6)$	λ_{av}
Аналитическое значение	18,456	3,013	0,757	3,982
Значение согласно GPSS World, $t = 10^6$	18,264	3,013	0,756	3,982

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе с помощью метод потенциалов получены простые и удобные для числовой реализации формулы для отыскания стационарных характеристик одноканальных замкнутых систем с произвольным распределением времени обслуживания, в которых с целью повышения пропускной способности может применяться пороговая стратегия изменения времени обслуживания.

7. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММЫ ДЛЯ GPSS WORLD

Lam EQU 2 ; значение λ
 TIME EQU 1000000 ; время моделирования
 AH EQU 3 ; (только для системы 1)
 DIS TABLE (Q1+S\$SYS) 0,1,8 ; параметры таблицы распределения числа заявок
 TAU TABLE X\$Tau 0,1,200 ; параметры таблицы распределения периода занятости
 SYS STORAGE 1 ; одноканальная система
 GENERATE 1
 TABULATE DIS ; вычислить распределение числа заявок
 TERMINATE
 GENERATE „,6 ; генерировать 6 заявок
 ADV1 ADVANCE (Exponential(5,0,1/Lam)) ; формирование потока заявок
 QUEUE 1 ; занять очередь
 GATE SNF SYS,ENT ; проверка отсутствия заявки на обслуживании
 SAVEVALUE Tau,AC1 ; записать текущее значение времени
 ENT ENTER SYS ; войти в систему
 DEPART 1 ; покинуть очередь
 TEST LE (S\$SYS+Q1),AH,LT ; превышено ли пороговое значение? (только для системы 1)
 ADVANCE (Uniform(15,0,0.5)) ; распределение времени обслуживания согл. закону $F(x)$
 TEST E Q1,0,LL ; равна ли длина очереди нулю?
 SAVEVALUE Tau,(AC1-X\$Tau) ; записать значение периода занятости

TABULATE TAU ; вычислить распределение периода занятости
 TRANSFER ,LL ; перейти к метке LL
 LT ADVANCE (Uniform(15,0,0.25)) ; распределение времени обслуживания согласно закону $\tilde{F}(x)$ (только для системы 1)
 LL LEAVE SYS ; покинуть систему
 TRANSFER ,ADV1 ; перейти к метке ADV1
 GENERATE TIME ; реализовать время моделирования
 TERMINATE 1
 START 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихоненко О. Обобщённые формулы Энгсета для систем обслуживания с ограниченным объёмом памяти. *Массовое обслуживание: потоки, системы, сети. Материалы международной научной конференции «Математические методы повышения эффективности функционирования телекоммуникационных сетей», 22-24 февраля 2005 г., г. Минск, 2005*, стр. 202–208.
2. Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М., А. *Массовое обслуживание в телефонии*. М.: Наука, 1968.
3. Шварц М. *Сети связи: протоколы, моделирование и анализ. Т. 1, 2*. М.: Наука, 1992.
4. Советов Б. Я., Яковлев С. А. *Построение сетей интегрального обслуживания*. Л.: Машиностроение, 1990.
5. Бочаров П. П., Печинкин А. В. *Теория массового обслуживания*. М.: РУДН, 1995.
6. Жерновий Ю. В. *Марковські моделі масового обслуговування*. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004.
7. Жерновий Ю. Стационарний розподіл імовірностей станів для одноканальної замкненої системи масового обслуговування. *Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат.*, 2007, вип. 67, стр. 130–136.
8. Zhernovyi K. Yu., Zhernovyi Yu. V. $M^{\theta}/G/1/m$ and $M^{\theta}/G/1$ systems with the service time dependent on the queue length. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2013, vol. 58, № 12, pp. 1267–1275.
9. Жерновий Ю., Жерновий К. *Метод потенциалов для пороговых стратегий обслуживания*. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015.
10. Zhernovyi K. Yu. Stationary characteristics of the $M^{\theta}/G/1/m$ system with the threshold functioning strategy. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2011, vol. 56, № 12, pp. 1585–1596.
11. Zhernovyi Yu. V., Zhernovyi K. Yu. Probabilistic characteristics of an $M_2^{\theta}/G/1/m$ queue with two-loop hysteretic control of the service time and arrival rate. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2014, vol. 59, № 12, pp. 1465–1474.
12. Zhernovyi Yu. *Insensitivity of the queueing systems characteristics*. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015.
13. Корольок В. С. *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов*. Киев: Наукова думка, 1975.
14. Bratiychuk M., Borowska B. Explicit formulae and convergence rate for the system $M^{\alpha}/G/1/N$ as $N \rightarrow \infty$. *Stochastic Models*, 2002, vol. 18, № 1, pp. 71–84.
15. Жерновий Ю. *Создание моделей систем обслуживания в среде GPSS World*. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2014.

Method of potentials for a closed system with service times dependent on the queue length

Zhernovyi Yu. V., Zhernovyi K. Yu.

We propose a method for determining the characteristics of a single-channel closed queueing system with the exponential distribution of the time generating customer and arbitrary distributions of the service times. In order to increase the system capacity, the type of service time distribution depends on the number of customers in the system at the start of each customer service. The Laplace transforms for the distribution of the number of customers in the system during the busy period and for the distribution function of the busy period are found. The developed algorithm for calculating the stationary characteristics of the system is tested with using a simulation model constructed with the assistance of GPSS World tools.

KEYWORDS: queueing system with a finite number of sources, service time dependent on the queue length, potentials method, stationary characteristics.