Информационные процессы, Том 16, № 2, 2016, стр. 194–206

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Конструктивная устойчивость и стабилизируемость положительных линейных переключающихся систем с дискретным временем

В. С. Козякин

Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
Институт радиотехники и электроники РАН, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 16.06.2016

Аннотация—Описывается новый класс линейных асинхронных положительных систем с дискретным временем, для которых задачи устойчивости и стабилизируемости допускают конструктивное решение. Системы, образующие этот класс, могут рассматриваться как естественное обобщение систем с так называемыми независимо переключающимися координатами векторов состояния. Отличительной особенностью таких систем является то, что образующие их асинхронные блоки допускают произвольное последовательно-параллельное "пересоединение" без потери свойства "конструктивной разрешимости" проблем устойчивости или стабилизируемости системы. Показано также, что для таких систем допустимо конструктивное построение индивидуальных "положительных" траекторий с наибольшей или наименьшей скоростью роста/стремления к нулю.

УДК: 517.9, 512.643, 519.718

MSC 2000: 93D20, 93D15, 15A18, 15B48, 15A60

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: асинхронные системы, устойчивость, стабилизируемость, конструктивность, альтернатива песочных часов

1. ВВЕДЕНИЕ

Линейную систему с дискретным временем

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad x(n) \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

называют *переключающейся*, если $(N \times N)$-матрицы $A(n)$ при каждом значении n могут произвольным образом принимать значения из некоторого множества $(N \times N)$-матриц $\mathscr{A}$. При этом систему (1) называют (асимптотически) *устойчивой*, если для каждой последовательности матриц $A(n) \in \mathscr{A}$, $n = 0, 1, \ldots$, соответствующее решение $x(n)$ стремится к нулю. Асимптотическая устойчивость переключающейся системы (1) равносильна экспоненциальной сходимости к нулю каждой последовательности $\{X(n)\}$ матричных произведений $X(n) = A(n) \cdots A(1)A(0)$ [1, 2, 4, 10, 12, 15, 18, 23], что в свою очередь равносильно выполнению неравенства

$$\rho(\mathscr{A}) < 1, \tag{2}$$

в котором величина $\rho(\mathscr{A})$, называемая [21] *совместным спектральным радиусом* множества матриц $\mathscr{A}$, определяется равенством

$$\rho(\mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \|A_n \cdots A_1\|^{1/n} : \ A_i \in \mathscr{A} \right\}, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^{N\times N}$.

Для переключающихся систем, не обладающих свойством устойчивости, может быть поставлен вопрос о существовании хотя бы одной последовательности матриц $A(n)\in\mathscr{A}$, $n=0,1,\ldots$, для которой выполняется предельное соотношение $A(n)\cdots A(1)A(0)\to 0$, т.е. о *стабилизации* системы. Система (1) допускает стабилизацию, если выполнено неравенство

$$\check{\rho}(\mathscr{A})<1 \tag{4}$$

(см. [7,12,14,22,24]), где величина $\check{\rho}(\mathscr{A})$, называемая *нижним спектральным радиусом* (lower spectral radius) [12] множества матриц $\mathscr{A}$, определяется равенством

$$\check{\rho}(\mathscr{A})=\lim_{n\to\infty}\inf\left\{\|A_n\cdots A_1\|^{1/n}:\ A_i\in\mathscr{A}\right\}. \tag{5}$$

Неравенства (2) и (4), казалось бы, дают исчерпывающий ответ на вопрос об устойчивости или стабилизируемости системы. С теоретической точки зрения это действительно так, однако на практике воспользоваться этими критериями затруднительно, поскольку вычислить пределы в формулах (3) и (5) в явном виде достаточно сложно и, по-видимому, вообще невозможно, см., например, многочисленные отрицательные результаты в [3,6,8,9,16,25]. Это влечет необходимость приближенного анализа величин (3) и (5) с привлечением численных методов. При этом ситуация усугубляется тем, что априорных оценок скорости сходимости в пределах (3) и (5) не известно, а объем необходимых вычислений растет весьма быстро как с ростом n, так и с ростом размерности системы.

В связи с этим отметим следующие задачи устойчивости и стабилизируемости линейных переключающихся систем, не новых по сути, но остающихся актуальными.

Задача 1. Описать классы асинхронных систем (равносильно, классы множеств матриц $\mathscr{A}$), для которых совместный спектральный радиус (3) допускал бы эффективное вычисление.

Задача 2. Описать классы асинхронных систем (равносильно, классы множеств матриц $\mathscr{A}$), для которых нижний спектральный радиус (5) допускал бы эффективное вычисление.

Исследование устойчивости и стабилизируемости систем (1) затрудняется еще одним обстоятельством, почти не упоминаемым в теории сходимости матричных произведений, но критически важным в теории автоматического управления. Дело в том, что в теории автоматического управления системы как правило состоят не из одного блока, а из набора блоков, соединенных определенным образом. В случае, когда эти блоки линейные и функционируют асинхронно, каждый из них описывается уравнением

$$x_{\mathrm{out}}(n+1)=A_i(n)x_{\mathrm{in}}(n), \tag{6}$$

где $x_{\mathrm{in}}(\cdot)\in\mathbb{R}^{N_i}$, $x_{\mathrm{out}}(\cdot)\in\mathbb{R}^{M_i}$, а $(N_i\times M_i)$-матрицы $A_i(n)$ при каждом значении n могут произвольным образом принимать значения из некоторого множества $(N_i\times M_i)$-матриц $\mathscr{A}_i$, $i=1,2,\ldots,Q$, где Q — количество блоков в системе.

В этом случае вопрос об устойчивости или стабилизируемости естественно поставить не для отдельных блоков (6), а для системы в целом, в которой такого рода блоки могут соединяться параллельно или последовательно, или более сложным образом, представляемым некоторым ориентированным графом, с блоками вида (6), расположенными на ребрах графа, см. рис. 1. К сожалению, при таком соединении блоков классы матриц, описывающих переходные характеристики системы в целом, оказываются весьма сложными и их свойства практически не изучены. Как правило, даже в тех случаях, когда размерности входо-выходных векторов отдельных блоков совпадают друг с другом и вопрос об устойчивости или стабилизируемости для соответствующих блоков может быть каким-то образом решен, после последовательно-параллельного соединения таких блоков конструктивный ответ на вопросы устойчивости или стабилизируемости получить уже не удается или, в лучшем случае, получить его крайне затруднительно. Таким образом, актуальной является также следующая задача:

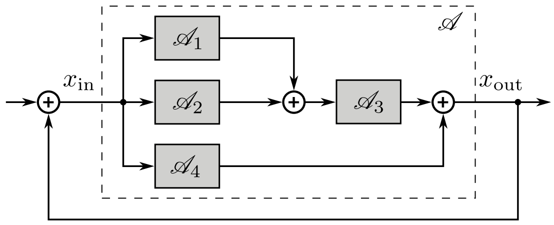

Рис. 1. Пример последовательно-параллельного соединения контроллеров системы

Задача 3. Описать классы асинхронных систем, для которых ответ на вопрос об устойчивости или стабилизируемости мог бы быть конструктивно получен не только для отдельного асинхронного блока (1) или (6), но и для последовательно-параллельного соединения таких блоков.

Наконец, рассмотрим еще один аспект проблемы конструктивной устойчивости или стабилизации переключающихся систем.

Совместный спектральный радиус (3) и нижний спектральный радиус (5) предоставляют лишь характеризацию устойчивости или стабилизируемости системы “в целом”. Они описывают предельное поведение “мультипликативно усредненных” норм матричных произведений $\|A(n-1)\cdots A(0)\|^{1/n}$. В типичных ситуациях (для так называемых *неприводимых*[1] классов матриц $\mathscr{A}$), если мы интересуемся устойчивостью системы, отсюда следует [1], что *для каждой* последовательности матриц $\{A(n)\}$ имеет место оценка

$$\|A(n-1)\cdots A(0)\| \le C\rho^n(\mathscr{A}).$$

В случае, когда мы интересуемся стабилизируемостью системы, в типичных ситуациях *существует* такая последовательность матриц $\{A(n)\}$, для которой имеет место оценка

$$\|A(n-1)\cdots A(0)\| \le \check{C}\check{\rho}^n(\mathscr{A}).$$

В то же время часто возникает необходимость найти такую последовательность матриц, которая обеспечивала бы наиболее медленное или наиболее быстрое “убывание” не норм произведений матриц $\|A(n-1)\cdots A(0)\|$, а (при заданном начальном условии x) векторов $A(n-1)\cdots A(0)x$. Более точно, рассмотрим вещественную функцию $\nu(x) \equiv \nu(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, неубывающую по каждой координате x_i вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и определенную при всех $x_1, x_2, \ldots, x_N \ge 0$. Такую функцию будем называть *покоординатно монотонной*, а в случае, когда она строго возрастает по каждой переменной x_i, — *строго покоординатно монотонной*. Примеры: каждая из норм

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

[1] Набор матриц называется неприводимым, если его матрицы не имеют общих инвариантных подпространств, за исключением нулевого и всего пространства.

При этом нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ являются строго покоординатно монотонными, а норма $\|x\|_\infty$ покоординатно монотонна, но не строго покоординатно монотонна.

Если множество матриц $\mathscr{A}$ конечно и состоит из K элементов, то для нахождения величины

$$\max_{A \in \mathscr{A}} \nu(Ax)$$

в общем случае необходимо K раз вычислить значения функции $\nu(\cdot)$ и найти среди них максимальное. Аналогично, для нахождения величины

$$\max_{A_{i_j} \in \mathscr{A}} \nu(A_{i_n} \cdots A_{i_1} x) \tag{7}$$

в общем случае необходимо K^n раз вычислить значения функции $\nu(\cdot)$ и найти среди этих значений максимальное, что с ростом n приводит к экспоненциальному росту количества вычислений. В связи с этим разумно поставить следующую задачу:

Задача 4. Дана покоординатно монотонная функция $\nu(\cdot)$ и вектор $x \neq 0$. Описать классы асинхронных систем (равносильно, классы множеств матриц $\mathscr{A}$), для которых число вычислений функции $\nu(\cdot)$, необходимых для нахождения величины (7) было бы меньше, чем K^n. Желательно, чтобы оно имело порядок Kn.

Аналогично может быть поставлена задача по минимизации величины $\nu(A_{i_n} \cdots A_{i_1} x)$.

В связи с этим целью работы является описание одного класса асинхронных контроллеров (1), достаточно простых и естественных в приложениях, для которых удается получить приемлемые ответы на задачи 1–4.

Напомним в разделе 2 необходимые сведения из теории матричных произведений.

2. МНОЖЕСТВА МАТРИЦ С КОНСТРУКТИВНО ВЫЧИСЛИМЫМИ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Одним из классов матричных множеств, для которых числовые характеристики (3) и (5) могут быть явно вычислены, является так называемый класс множеств положительных матриц с независимым изменением строк [5]. Напомним соответствующие определения.

Следуя [5], множество $\mathscr{A}$ матриц размерности $N \times M$ назовем *множеством с независимыми строками* или *IRU-множеством* (от independent row uncertainty set), если оно состоит из всех матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix},$$

каждая из строк $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iM})$ которых принадлежит некоторому множеству строк $\mathscr{A}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. IRU-множество матриц будет называться положительным, если положительны все его матрицы, что равносильно положительности всех строк, образующих множества $\mathscr{A}^{(i)}$. Совокупность всех IRU-множеств положительных $(N \times M)$-матриц будет обозначаться через $\mathcal{U}(N, M)$.

Пример 1. Пусть множества строк $\mathscr{A}^{(1)}$ и $\mathscr{A}^{(2)}$ следующие:

$$\mathscr{A}^{(1)} = \{(a, b),\ (c, d)\},\ \mathscr{A}^{(2)} = \{(\alpha, \beta),\ (\gamma, \delta),\ (\mu, \nu)\}.$$

Тогда IRU-множество $\mathscr{A}$ состоит из следующих матриц:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},\ A_{13} = \begin{pmatrix} a & b \\ \mu & \nu \end{pmatrix},$$
$$A_{21} = \begin{pmatrix} c & d \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},\ A_{23} = \begin{pmatrix} c & d \\ \mu & \nu \end{pmatrix}.$$

Если множество $\mathscr{A}$ компактно, что равносильно компактности каждого множества строк $\mathscr{A}^{(1)}, \mathscr{A}^{(2)}, \dots, \mathscr{A}^{(N)}$, то определены величины

$$\rho_{min}(\mathscr{A}) = \min_{A\in\mathscr{A}} \rho(A), \quad \rho_{max}(\mathscr{A}) = \max_{A\in\mathscr{A}} \rho(A).$$

Как показано в [17, 19], для положительных компактных IRU-множеств матриц $\mathscr{A}$ справедливы равенства

$$\rho(\mathscr{A}) = \rho_{max}(\mathscr{A}), \quad \check{\rho}(\mathscr{A}) = \rho_{min}(\mathscr{A}), \tag{8}$$

причем для произвольных множеств матриц, как отмечено в [17, Example 1], равенства (8) уже не верны.

Для конечных IRU-множеств матриц $\mathscr{A}$ величины $\rho_{min}(\mathscr{A})$ и $\rho_{max}(\mathscr{A})$ эффективно вычислимы, а поэтому в силу (8) для конечных IRU-множеств положительных матриц оказываются эффективно вычислимыми и величины $\rho(\mathscr{A})$ и $\check{\rho}(\mathscr{A})$. Эффективный вычислительный алгоритм нахождения величин $\rho_{min}(\mathscr{A})$ и $\rho_{max}(\mathscr{A})$ для различных IRU-множеств матриц $\mathscr{A}$ предложен в [20].

Другим примером классов матриц, для которых числовые характеристики (3) и (5) также могут быть явно вычислены, являются *линейно упорядоченные* множества положительных матриц $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, в которых матрицы A_i удовлетворяют соотношениям $0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n$, где неравенства понимаются поэлементно. Для этого класса матриц справедливость равенств (8) вытекает из известных соотношений между спектральными радиусами сравнимых положительных матриц [13, Corollary 8.1.19]. Совокупность всех линейно упорядоченных множеств $(N \times M)$-матриц будет обозначаться через $\mathcal{L}(N, M)$.

Отметим, что контроллеры, поведение которых описывается уравнениями (1) или (6) с IRU-множествами матриц — это достаточно типичные в теории автоматического управления асинхронные контроллеры, осуществляющие *независимую покоординатную коррекцию входов*. Контроллеры, поведение которых описывается уравнениями (1) или (6) с линейно упорядоченными множествами положительных матриц — это своего рода *усилители сигнала с "матричным" коэффициентом усиления* меняющимся во времени.

В [17] было замечено, что доказательство равенств (8) как для IRU-множеств положительных матриц, так и для линейно упорядоченных множеств положительных матриц может быть получено по единой схеме в виде следствия из некоторого общего принципа, который мы сейчас опишем подробнее.

2.1. Альтернатива песочных часов

Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^N$ будем применять обозначение $x \ge y$ ($x > y$), если координаты вектора x не меньше соответствующих координат вектора y (строго больше соответствующей координаты вектора y). Аналогичные обозначения будут применяться и для матриц.

Множество положительных матриц $\mathscr{A}$ назовем $\mathcal{H}$-множеством [17], если для каждой матрицы $\tilde{A} \in \mathscr{A}$ и вектора $x > 0$ справедливы утверждения:

H1: *либо $Ax \ge \tilde{A}x$ при всех $A \in \mathscr{A}$, либо же найдется такая матрица $\bar{A} \in \mathscr{A}$, что $\bar{A}x \le \tilde{A}x$ и $\bar{A}x \ne \tilde{A}x$;*

H2: *либо* $Ax \le \tilde{A}x$ *при всех* $A \in \mathscr{A}$, *либо же найдется такая матрица* $\bar{A} \in \mathscr{A}$, *что* $\bar{A}x \ge \tilde{A}x$ *и* $\bar{A}x \ne \tilde{A}x$.

Утверждения H1 и H2 допускают простую геометрическую интерпретацию. Представим множества $\{u : u \le \tilde{A}x\}$ и $\{u : u \ge \tilde{A}x\}$ как нижний и верхний баллоны некоторых стилизованных песочных часов с перемычкой в точке $\tilde{A}x$, а элементы Ax — песчинками. Тогда, согласно утверждениям H1 и H2, либо все "песчинки" Ax заполняют один из баллонов (нижний или верхний), либо же в другом баллоне (верхнем или нижнем, соответственно) остается хоть одна "песчинка". Такая интерпретация дала основание назвать в [17] утверждения H1 и H2 *альтернативой песочных часов*.

Обозначим через $\mathcal{H}(N, M)$ совокупность всех компактных[2] $\mathcal{H}$-множеств матриц размерности $N \times M$. Тогда основной результат о спектральных свойствах $\mathcal{H}$-множеств матриц может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1 (см. [17]). *Пусть* $\mathscr{A} \in \mathcal{H}(N, N)$. *Тогда справедливы равенства* (8).

На самом деле в [17] доказаны более глубокие результаты, однако здесь мы не будем углубляться в тонкости.

2.2. $\mathcal{H}$-множества матриц

Возможность применения теоремы 1 существенным образом зависит от того, насколько конструктивно нам удастся описать классы $\mathcal{H}$-множеств матриц. В [17] показано, что $\mathcal{H}$-множествами матриц являются множества матриц с независимым изменением строк и линейно упорядоченные множества положительных матриц. При этом, как показывает следующий пример, не каждое множество положительных матриц является $\mathcal{H}$-множеством. Не являются $\mathcal{H}$-множествами также одноточечные множества матриц $\{0\}$ и $\{I\}$, состоящие из нулевой и единичной матрицы, поскольку соответствующие матрицы не положительны.

Пример 2. Рассмотрим множество матриц $\mathscr{A}$, состоящее из двух положительных матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{pmatrix}, \qquad a > 0.$$

Тогда $\max\{\rho(A_1), \rho(A_2)\} = 2a$, в то время как $\rho(A_1A_2) = (1 + a^2)^2$. Следовательно, при $a \ne 1$

$$\rho(\mathscr{A}) \ge \|A_1A_2\|^{1/2} \ge \rho(A_1A_2)^{1/2} > \max\{\rho(A_1), \rho(A_2)\},$$

чего в силу теоремы 1 не могло быть, если бы $\mathscr{A}$ было $\mathcal{H}$-множеством.

Для построения других классов $\mathcal{H}$-множеств матриц выясним некоторые общие свойства $\mathcal{H}$-множеств матриц. Введем операции сложения и умножения по Минковскому множеств матриц:

$$\mathscr{A} + \mathscr{B} := \{A + B : A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\},$$
$$\mathscr{A}\mathscr{B} := \{AB : A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\},$$

а также операцию умножения множества матриц на число:

$$t\mathscr{A} = \mathscr{A}t := \{tA : t \in \mathbb{R},\ A \in \mathscr{A}\}.$$

[2] На множестве матриц размерности $N \times M$ естественным образом определена топология поэлементной сходимости, что дает возможность определить понятие компактности соответствующих множеств матриц.

Сложение по Минковскому множеств матриц соответствует параллельному соединению двух независимо функционирующих асинхронных контроллеров, в то время как произведение по Минковскому — последовательному соединению двух независимо функционирующих асинхронных контроллеров.

Замечание 1. В общем случае $\mathscr{A}(\mathscr{B}_1 + \mathscr{B}_2) \neq \mathscr{A}\mathscr{B}_1 + \mathscr{A}\mathscr{B}_2$ и $(\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2)\mathscr{B} \neq \mathscr{A}_1\mathscr{B} + \mathscr{A}_2\mathscr{B}$, т.е. операции Минковского не ассоциативны. В частности, $\mathscr{A} + \mathscr{A} \neq 2\mathscr{A}$.

Естественно, операция сложения *допустима* тогда и только тогда, когда матрицы из множества $\mathscr{A}$ имеют такой же размер, что и матрицы из множества $\mathscr{B}$, а операция умножения *допустима* тогда и только тогда, когда размерности матриц из множеств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ согласованы: размер строк матриц из $\mathscr{A}$ совпадает с размером столбцов матриц из $\mathscr{B}$. Проблем с согласованием размерностей не возникнет, когда рассматриваются множества, состоящие из квадратных матриц одной и той же размерности.

Теорема 2 (см. [17]). *Справедливы утверждения:*

(i) $\mathscr{A} + \mathscr{B} \in \mathcal{H}(N, M)$, *если* $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{H}(N, M)$*;*
(ii) $\mathscr{A}\mathscr{B} \in \mathcal{H}(N, Q)$, *если* $\mathscr{A} \in \mathcal{H}(N, M)$ *и* $\mathscr{B} \in \mathcal{H}(M, Q)$*;*
(iii) $t\mathscr{A} = \mathscr{A}t \in \mathcal{H}(N, M)$, *если* $t > 0$ *и* $\mathscr{A} \in \mathcal{H}(N, M)$.

Согласно теореме 2 множество подмножеств квадратных матриц $\mathcal{H}(N, N)$ обладает операциями сложения и умножения, но не является группой ни по сложению ни по умножению. Однако, после добавления элементов $\{0\}$ и $\{I\}$ к $\mathcal{H}(N, N)$, получившееся множество $\mathcal{H}(N, N) \cup \{0\} \cup \{I\}$ становится полукольцом [11].

Тот факт, что множество подмножеств квадратных матриц $\mathcal{H}(N, N)$ обладает групповым операциями сложения и умножения означает, что при последовательно-параллельном соединении независимо функционирующих асинхронных контроллеров, удовлетворяющих аксиомам H1 и H2, мы снова получим асинхронный контроллер, удовлетворяющий аксиомам H1 и H2.

Замечание 2. Из теоремы 2 следует, что любая конечная сумма любых конечных произведений матриц из $\mathcal{H}(N, N)$ снова является матрицей из $\mathcal{H}(N, N)$. Более того, при любых целых $n, d \geq 1$ элементами множества $\mathcal{H}(N, N)$ являются все "полиномиальные" множества матриц

$$P(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n) = \sum_{k=1}^{d} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1,2,\ldots,n\}} p_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \mathscr{A}_{i_1} \mathscr{A}_{i_2} \cdots \mathscr{A}_{i_k}, \tag{9}$$

где $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \in \mathcal{H}(N, N)$, а числовые коэффициенты $p_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ положительны.

С помощью полиномов (9) можно получать не только элементы $P(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n)$ множества $\mathcal{H}(N, N)$, но и элементы произвольных множеств $\mathcal{H}(N, M)$, беря при этом аргументы $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$ также из множеств матриц $\mathcal{H}(N_i, M_i)$ произвольных размерностей. При этом надо только следить за тем, чтобы произведения матриц $\mathscr{A}_{i_1} \mathscr{A}_{i_2} \cdots \mathscr{A}_{i_k}$ были допустимы, а выражение 9 определяло множество матриц размерности $N \times M$.

Выше мы предъявили два вида нетривиальных "элементарных" $\mathcal{H}$-множеств матриц — это множества матриц с независимым изменением строк и линейно упорядоченные множества положительных матриц. В связи с этим обозначим через $\mathcal{H}_*(N, M)$ множество всех множеств матриц размера $N \times M$, получающееся как рекурсивное расширение с помощью полиномов (9) множества положительных матриц с независимым изменением строк и множества линейно упорядоченных положительных матриц. Другими словами, $\mathcal{H}_*(N, M)$ — это множество всех множеств матриц, представимых в виде значений суперпозиций матричных полиномов (9), где аргументы полиномов “низшего уровня” берутся из матричных множеств $\mathcal{U}(N_i, M_i) \cup \mathcal{L}(N_i, M_i)$.

Как отмечено в замечании 1, операции Минковского неассоциативны. Поэтому рекурсивное расширение множества положительных матриц с независимым изменением строк и множества линейно упорядоченных положительных матриц образует более широкое множество матриц, чем расширение множества положительных матриц с независимым изменением строк и множества линейно упорядоченных положительных матриц с помощью полиномов (9).

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Из теорем 1 и 2 и замечания 2 вытекает следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть имеется система* (1)*, образованная рекурсивным последовательно-параллельным соединением блоков (т.е. представляемая некоторым ориентированным графом, получаемым рекурсивными последовательными или параллельными расширениями, стартующими из одной из вершин, и с блоками, расположенными на ребрах графа), описываемыми уравнениями* (6)*, отвечающими $\mathcal{H}$-множествам положительных матриц $\mathscr{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, Q$. Тогда вопрос об устойчивости или стабилизируемости такой системы конструктивно решается путем нахождения матриц, доставляющих минимум в равенствах* (8)*, где множество матриц $\mathscr{A}$ есть полиномиальная сумма Минковского* (9) *множеств матриц $\mathscr{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, Q$, отвечающая структуре соединения соответствующих блоков.*

Пример 3. В системе $\mathscr{A}$ на рис. 1 вход и выход связаны соотношением

$$x_{\text{out}}(n+1) = \big(A_3(n)(A_1(n) + A_2(n)) + A_4(n)\big)x_{\text{in}}(n),$$

где при каждом значении n матрицы $A_1(n), A_2(n), A_3(n)$ и $A_4(n)$ произвольным образом выбираются из соответствующих множеств: $A_i(n) \in \mathscr{A}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Соответственно, в данном случае все возможные значения матрицы перехода системы $\mathscr{A}$ могут быть получены как элементы следующей полиномиальной суммы Минковского множества матриц $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \mathscr{A}_4$:

$$P(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \mathscr{A}_4) = \mathscr{A}_3(\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2) + \mathscr{A}_4.$$

4. ПОСТРОЕНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ МАКСИМИЗИРУЮЩИХ И МИНИМИЗИРУЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

4.1. Одношаговая максимизация

Рассмотрим сначала вопрос о максимизации функции $\nu(Ax)$, где $x > 0$, по всем A из $\mathcal{H}$-множества $\mathscr{A}$, которое предполагается компактным. В силу утверждения H2 альтернативы песочных часов для любой матрицы $\tilde{A} \in \mathscr{A}$ либо $Ax \le \tilde{A}x$ при всех $A \in \mathscr{A}$, либо же найдется такая матрица $\bar{A} \in \mathscr{A}$, что $\bar{A}x \ge \tilde{A}x$ и $\bar{A}x \ne \tilde{A}x$. Отсюда и из компактности множества $\mathscr{A}$ вытекает существование такой матрицы $A^{(max)} \in \mathscr{A}$, что при всех $A \in \mathscr{A}$ справедливо неравенство

$$Ax \le A^{(max)}x. \tag{10}$$

Заметим, что матрица $A^{(max)}$ зависит от вектора x, и поэтому при необходимости будем писать $A^{(max)} = A_x^{(max)}$. При этом матрица $A_x^{(max)}$, вообще говоря, определяется по вектору x неоднозначно.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{A}$ — компактное $\mathcal{H}$-множество положительных $(N \times N)$-матриц, $\nu(\cdot)$ — покоординатно монотонная функция, а $x \in \mathbb{R}^N$, $x > 0$ — некоторый вектор.*

(i) *Тогда матрица* $A^{(max)} = A_x^{(max)}$ *доставляет максимум по* $A \in \mathscr{A}$ *функции* $\nu(Ax)$, *т.е.*

$$\max_{A\in\mathscr{A}} \nu(Ax) = \nu(A^{(max)}x).$$

(ii) *Если* $A_0 \in \mathscr{A}$ *— матрица, доставляющая максимум по* $A \in \mathscr{A}$ *функции* $\nu(Ax)$, *и функция* $\nu(\cdot)$ *строго покоординатно монотонна, то* $A_0x = A_x^{(max)}x$.

Доказательство. Утверждение (i) прямо следует из неравенства (10) и покоординатной монотонности функции $\nu(\cdot)$.

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что

$$A_0x \le A_x^{(max)}x.$$

Если здесь $A_0x \ne A_x^{(max)}x$, то хотя бы одна координата вектора $A_x^{(max)}x$ должна быть строго больше соответствующей координаты вектора A_0x. Но тогда в силу строгой покоординатной монотонности функции $\nu(\cdot)$ имеет место неравенство

$$\nu(A_0x) < \nu(A_x^{(max)}x),$$

противоречащее предположению о том, что матрица $A_0 \in \mathscr{A}$ доставляет максимум по $A \in \mathscr{A}$ функции $\nu(Ax)$. Следовательно, $A_0x = A_x^{(max)}x$, и утверждение (ii) доказано.

Замечание 3. Утверждение (ii) теоремы 4 в общем случае не верно, если функция $\nu(\cdot)$ покоординатно монотонна, но не строго покоординатно монотонна.

Замечание 4. Построение матрицы $A^{(max)}$ не зависит от функции $\nu(\cdot)$.

4.2. Многошаговая максимизация: решение задачи 4

Перейдем теперь к вопросу о нахождении величины (7) при некоторых $n > 1$ и $x \in \mathbb{R}^N$, $x > 0$. Построим последовательно матрицы $A_i^{(max)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, следующим образом:

- матрицу $A_1^{(max)}$ построим по вектору $x_0 = x$ так, как это описано в предыдущем разделе: $A_1^{(max)} = A_{x_0}^{(max)}$;
- если уже построены матрицы $A_i^{(max)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то матрицу $A_{k+1}^{(max)}$ построим по вектору

  $$x_k = A_k^{(max)} \cdots A_1^{(max)}x$$

  таким образом, чтобы максимизировать функцию

  $$\nu(AA_k^{(max)} \cdots A_1^{(max)}x) = \nu(Ax_k)$$

  по всем $A \in \mathscr{A}$ так, как это описано в предыдущем разделе. Таким образом, матрица $A_{k+1}^{(max)}$ определяется равенством $A_{k+1}^{(max)} = A_{x_k}^{(max)}$.

По определению матриц $A_i^{(max)}$ тогда в силу (10) при всех $A \in \mathscr{A}$ справедливы неравенства

$$Ax \le A_1^{(max)}x,$$
$$AA_1^{(max)}x \le A_2^{(max)}A_1^{(max)}x,$$
$$\cdots$$
$$AA_{n-1}^{(max)} \cdots A_1^{(max)}x \le A_n^{(max)} \cdots A_1^{(max)}x,$$

откуда следует, что

$$A_n \cdots A_1 x \leq A_n^{(max)} \cdots A_1^{(max)} x \tag{11}$$

при всех $A_n, \dots, A_1 \in \mathscr{A}$.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{A}$ — компактное $\mathcal{H}$-множество положительных $(N \times N)$-матриц, $\nu(\cdot)$ — покоординатно монотонная функция, а $x \in \mathbb{R}^N$, $x > 0$ — некоторый вектор.*

(i) *Тогда набор матриц $A_1^{(max)}, \dots, A_n^{(max)}$ доставляет максимум по $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ функции $\nu(A_n \cdots A_1 x)$, т.е.*

$$\max_{A_n,\dots,A_1 \in \mathscr{A}} \nu(A_n \cdots A_1 x) = \nu(A_n^{(max)} \cdots A_1^{(max)} x).$$

(ii) *Пусть $\mathscr{A}$ — компактное $\mathcal{H}$-множество положительных матриц. Если набор матриц $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ доставляет функции $\nu(A_n \cdots A_1 x)$ максимум по $A_n, \dots, A_1 \in \mathscr{A}$, и функция $\nu(\cdot)$ строго покоординатно монотонна, то*

$$\tilde{A}_i \cdots \tilde{A}_1 x = A_i^{(max)} \cdots A_1^{(max)} x, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{12}$$

Доказательство. Утверждение (i) прямо следует из неравенства (11) и покоординатной монотонности функции $\nu(\cdot)$.

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что

$$\begin{gathered}\tilde{A}_1 x \leq A_1^{(max)} x,\\ \tilde{A}_2 \tilde{A}_1 x \leq A_2^{(max)} A_1^{(max)} x,\\ \cdots\\ \tilde{A}_n \tilde{A}_{n-1} \cdots \tilde{A}_1 x \leq A_n^{(max)} \cdots A_1^{(max)} x,\end{gathered}$$

Если здесь равенства (12) не выполняются при некотором i_0, но выполняются при всех $i < i_0$, то хотя бы одна координата вектора $A_{i_0}^{(max)} \cdots A_1^{(max)} x$ должна быть строго больше соответствующей координаты вектора $\tilde{A}_{i_0} \cdots \tilde{A}_1 x$. Но тогда в силу положительности матриц из множества $\mathscr{A}$ для каждого $j \geq i_0$ будет выполняться неравенство

$$\tilde{A}_j \tilde{A}_{j-1} \cdots \tilde{A}_1 x \leq A_j^{(max)} \cdots A_1^{(max)} x,$$

причем хотя бы одна координата вектора $A_j^{(max)} \cdots A_1^{(max)} x$ будет строго больше[3] соответствующей координаты вектора $\tilde{A}_j \tilde{A}_{j-1} \cdots \tilde{A}_1 x$. Но тогда, в силу строгой покоординатной монотонности функции $\nu(\cdot)$, при $j = n$ получим неравенство

$$\nu(\tilde{A}_n \cdots \tilde{A}_1 x) < \nu(A_n^{(max)} \cdots A_1^{(max)} x),$$

противоречащее предположению о том, что набор матриц $\tilde{A}_1 \dots, \tilde{A}_n$ доставляет максимум по $A_n, \dots, A_1 \in \mathscr{A}$ функции $\nu(A_n \cdots A_1 x)$. Следовательно, равенства (12) должны выполняться при всех $i = 1, 2, \dots, n$, и утверждение (ii) доказано.

Замечание 5. Построение каждой последующей матрицы $A_i^{(max)}$ производится “позиционно” или, что то же, — “по принципам динамического программирования”, т.е. только по информации, известной к данному шагу. При этом это построение не зависит от функции $\nu(\cdot)$, а значит, и от сложности ее вычисления!

[3] Это рассуждение “провалится”, если предполагать лишь неотрицательность матриц из множества $\mathscr{A}$.

5. МНОЖЕСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Все рассмотрения в настоящей работе проводились для классов матриц с положительными элементами. В ряде ситуаций требование положительности матриц может быть ограничительным, однако переход к матрицам с произвольными элементами в контексте рассматриваемых в работе проблем вряд ли возможен, см., например, обсуждение в [17]. Даже переход к матрицам с неотрицательными элементами возможен не всегда, поскольку для таких матриц в общем случае теряют силу многие конструкции и утверждения раздела 2. Тем не менее в одном частном, но практически интересном случае переход к неотрицательным матрицам возможен.

Обозначим через $\overline{\mathcal{U}}(N,M)$ совокупность всех IRU-множеств неотрицательных $(N \times M)$-матриц, а через $\overline{\mathcal{L}}(N,M)$ — совокупность всех множеств $N \times M$ неотрицательных матриц $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, в которых матрицы A_i удовлетворяют соотношениям $0 \le A_1 \le A_2 \le \cdots \le A_n$. Множества неотрицательных матриц $\overline{\mathcal{U}}(N,M)$ и $\overline{\mathcal{L}}(N,M)$ в естественном смысле можно трактовать как замыкания соответствующих множеств положительных матриц $\mathcal{U}(N,M)$ и $\mathcal{L}(N,M)$.

Обозначим теперь через $\overline{\mathcal{H}}_*(N,M)$ множество всех множеств матриц, представимых в виде значений матричных полиномов (9) с аргументами, берущимися из матричных множеств $\overline{\mathcal{U}}(N_i,M_i) \cup \overline{\mathcal{L}}(N_i,M_i)$. В этом случае класс $\overline{\mathcal{H}}_*(N,M)$ уже не включается в $\mathcal{H}(N,M)$, но, как показано в [17], для каждой матрицы $\mathscr{A} \in \overline{\mathcal{H}}_*(N,N)$ остаются справедливыми равенства (8), т.е. справедлив аналог теоремы 1.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При проектировании систем управления с асинхронно срабатывающими (переключающимися) компонентами одной из основных является проблема оценки (вычислимости) совместного или нижнего спектрального радиуса получившейся системы, определяющих ее устойчивость или стабилизируемость, соответственно.

Предложенный в работе подход к решению данной проблемы выполнен в духе идеологии модульности конструирования систем управления — его можно сравнить с созданием игрушек с помощью конструктора LEGO®.

Напомним, что конструктор LEGO® состоит из “кирпичиков с шипами”, соединяя которые практически в произвольном порядке (ориентированном за счет наличия шипов), можно получать разнообразные конструкции.

Как показано в работе, каждое $\mathcal{H}$-множество матриц $\mathscr{A}$ также можно интерпретировать как своего рода конструктор LEGO® для создания систем управления, элементами которого (кирпичиками в этом конструкторе) являются асинхронные блоки (контроллеры), с переходными характеристиками, описываемыми множествами матриц $\mathscr{A}_i \in \mathscr{A}$. Тогда, как показано выше, *любое* последовательно-параллельное рекурсивное соединение блоков нашего “конструктора” $\mathscr{A}$ приводит к образованию систем, совместный и нижний спектральные радиусы которых, определяющие их устойчивость или стабилизируемость, *всегда* могут быть конструктивно вычислены с помощью формулы (8).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-00063).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барабанов Н. Е. О показателе Ляпунова дискретных включений. I-III // *Автоматика и телемеханика.* 1988. № 2, 3, 5. С. 40–46, 24–29, 17–24.

2. Клепцын А. Ф., Козякин В. С., Красносельский М. А., Кузнецов Н. А. Устойчивость рассинхронизованных систем // *Доклады АН СССР.* 1984. Т. 274, № 5. С. 1053–1056.

3. Козякин В. С. Алгебраическая неразрешимость задачи об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем // *Автоматика и телемеханика.* 1990. № 6. С. 41–47.

4. Козякин В. С. Об абсолютной устойчивости систем с несинхронно работающими импульсными элементами // *Автоматика и телемеханика.* 1990. № 10. С. 56–63.

5. Blondel V. D., Nesterov Y. Polynomial-time computation of the joint spectral radius for some sets of nonnegative matrices // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2009. Vol. 31, no. 3. P. 865–876.

6. Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A. Switched Systems that are Periodically Stable May be Unstable // Proc. of the Symposium MTNS. Notre-Dame, USA: 2002.

7. Bochi J., Morris I. D. Continuity properties of the lower spectral radius // *Proc. Lond. Math. Soc. (3).* 2015. Vol. 110, no. 2. P. 477–509.

8. Bousch T., Mairesse J. Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // *J. Amer. Math. Soc.* 2002. Vol. 15, no. 1. P. 77–111 (electronic).

9. Czornik A., Jurgaś P. Falseness of the finiteness property of the spectral subradius // *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 2007. Vol. 17, no. 2. P. 173–178.

10. Fornasini E., Valcher M. E. Stability and stabilizability criteria for discrete-time positive switched systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2012. Vol. 57, no. 5. P. 1208–1221.

11. Golan J. S. Semirings and their applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. P. xii+381.

12. Gurvits L. Stability of discrete linear inclusion // *Linear Algebra Appl.* 1995. Vol. 231. P. 47–85.

13. Horn R. A., Johnson C. R. Matrix analysis. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. P. xviii+643.

14. Jungers R. The joint spectral radius. Berlin: Springer-Verlag, 2009. Vol. 385 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* P. xiv+144.

15. Kozyakin V. A short introduction to asynchronous systems // Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations. Boca Raton, FL: CRC, 2004. P. 153–165.

16. Kozyakin V. A Dynamical Systems Construction of a Counterexample to the Finiteness Conjecture // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 2005. P. 2338–2343.

17. Kozyakin V. Hourglass alternative and the finiteness conjecture for the spectral characteristics of sets of non-negative matrices // *Linear Algebra Appl.* 2016. Vol. 489. P. 167–185.

18. Lin H., Antsaklis P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2009. Vol. 54, no. 2. P. 308–322.

19. Nesterov Y., Protasov V. Y. Optimizing the spectral radius // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2013. Vol. 34, no. 3. P. 999–1013.

20. Protasov V. Yu. Spectral simplex method // *Math. Program.* 2016. Vol. 156, no. 1-2, Ser. A. P. 485–511.

21. Rota G.-C., Strang G. A note on the joint spectral radius // *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 63 = Indag. Math.* 1960. Vol. 22. P. 379–381.

22. Shen J., Hu J. Stability of discrete-time switched homogeneous systems on cones and conewise homogeneous inclusions // *SIAM J. Control Optim.* 2012. Vol. 50, no. 4. P. 2216–2253.

23. Shorten R., Wirth F., Mason O. et al. Stability criteria for switched and hybrid systems // *SIAM Rev.* 2007. Vol. 49, no. 4. P. 545–592.

24. Theys J. Joint Spectral Radius: Theory and Approximations: Ph. D. thesis / Faculté des sciences appliquées, Département d'ingénierie mathématique, Center for Systems Engineering and Applied Mechanics. Université Catholique de Louvain, 2005. 189 p.

25. Tsitsiklis J. N., Blondel V. D. The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard — when not impossible — to compute and to approximate // *Math. Control Signals Systems.* 1997. Vol. 10, no. 1. P. 31–40.

Constructive stability and stabilizability of positive linear discrete-time switching systems

V. S. Kozyakin

We describe a new class of positive linear discrete-time switching systems for which the problems of stability or stabilizability can be resolved constructively. The systems constituting this class can be treated as a natural generalization of systems with the so-called independently switching state vector components. Distinctive feature of such systems is that their components can be arbitrarily 're-connected' in parallel or in series without loss of the 'constructive resolvability' property for the problems of stability or stabilizability of a system. It is shown also that, for such systems, the individual positive trajectories with the greatest or the lowest rate of convergence to the zero can be built constructively.

KEYWORDS: switching systems, stability, stabilizability, constructive criteria, Hourglass alternative.