Информационные процессы, Том 16, № 3, 2016, стр. 260–280

Адаптивный алгоритм отслеживания наилучшей траектории экспертных решений[1]

В.В. Вьюгин, И.А. Стельмах, В.Г. Трунов

Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича, Российская академия наук, Москва, Россия
e-mail: vyugin@iitp.ru

Поступила в редколлегию 26.09.2016

Аннотация—Рассматривается задача принятия решений в режиме онлайн. Имеется набор методов (экспертов, алгоритмов), которые принимают решения (или выдают прогнозы) и несут потери вследствие неточности своих решений. Предложен адаптивный алгоритм, который агрегирует решения экспертов и несет потери, не превосходящие (с точностью до некоторой величины, называемой регретом) потери наилучшей комбинации экспертов распределенных по интервалу прогнозирования. Для построения алгоритма используется комбинация метода Fixed-Share и адаптивного алгоритма экспоненциального взвешивания экспертных решений AdaHedge. Получена оценка регрета предложенного алгоритма. В рамках данного подхода не делается никаких стохастических предположений об источнике исходных данных и об ограниченности потерь.
Приведены результаты численных экспериментов по смешиванию экспертных решений с помощью предложенного алгоритма. В качестве экспертных стратегий используются стратегии игры на финансовых рынках, предложенные в предыдущих работах авторов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: предсказания с использованием экспертных стратегий, принятие решений в режиме онлайн, алгоритм AdaHedge, алгоритм Fixed-Share, регрет, адаптивный параметр обучения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются методы и алгоритмы теории предсказаний (принятия решений) с использованием экспертных стратегий (Prediction with Expert Advice). Данная область машинного обучения была основана в работах [7], [9] и [10] (Основная монография на эту тему – [4]). Аналогичный подход был использован в работе [14].

На каждом раунде (шаге) игры $t = 1, 2, \dots, T$ алгоритм принимает некоторое решение – вектор распределения потерь

$$w_t = (w_{1,t}, \dots, w_{N,t}),$$

где

$$\sum_{i=1}^{N} w_{i,t} = 1 \quad \text{и} \quad w_{i,t} \geq 0$$

для всех i. После этого свои решения принимают эксперты $i = 1, \dots, N$, в результате чего, они несут потери l_t^i, $i = 1, \dots, N$. Потери алгоритма равны

$$h_t = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t} l_t^i.$$

[1] Работа частично поддержана грантами РФФИ: проекты 16-01-00576 А и 16-29-09649 офи-м.

В процессе игры накапливаются кумулятивные потери каждого эксперта: $L_T^i = \sum_{t=1}^{T} l_t^i$, $H = \sum_{t=1}^{T} h_t$ – кумулятивные потери алгоритма.

В классической работе [5] предложен алгоритм экспоненциального взвешивания экспертных решений Hedge(η), цель которого – принимать такие решения, чтобы на любом раунде T его потери

$$H_T = \sum_{t=1}^{T} h_t$$

были не больше, чем потери наилучшего эксперта

$$L_T^* = \min_{1 \le i \le N} L_T^i$$

плюс некоторая небольшая ошибка обучения – регрет. Точнее, цель алгоритма состоит в минимизации регрета

$$R_T = H_T - L_T^*.$$

Ряд алгоритмов для решения этой задачи приведен в монографии [4]. Важный параметр алгоритмов экспоненциального взвешивания экспертных решений – так называемый параметр обучения η (learning rate). Этот параметр определяет скорость сходимости решений алгоритма к оптимальным решениям.

Современная версия алгоритма Hedge использует адаптивный (переменный) параметр обучения $\eta = \eta_t$. Соответствующий алгоритм AdaHedge приведен в работе [8]. Пусть $l_t^- = \min_i l_t^i$, $l_t^+ = \max_i l_t^i$ – наименьшие и наибольшие потери среди экспертов на шаге t. Определим $L_T^+ = \sum_{t=1}^{T} l_t^+$, $L_T^- = \sum_{t=1}^{T} l_t^-$. Пусть также $s_t = l_t^+ - l_t^-$, $S_T = \max\{s_1, \dots, s_T\}$. Алгоритм AdaHedge позволяет получить следующую оценку для регрета алгоритма:

$$R_T^{ah} \le 2\sqrt{S_T \frac{(L_T^* - L_T^-)(L_T^+ - L_T^*)}{L_T^+ - L_T^-} \ln N} + S_T(\frac{16}{3} \ln N + 2) \tag{1}$$

Другой подход, предложенный в [6], состоит в следующем: серия шагов, на которых делаются предсказания, делится на $k+1$ сегмент. Каждому сегменту ставится в соответствие свой эксперт; последовательность сегментов и соответствующих экспертов называется составным экспертом. Цель алгоритма также несколько меняется - теперь он должен предсказывать так, чтобы быть не хуже каждого составного эксперта. Формальная постановка задачи будет приведена в следующем разделе.

Данное изменение позволяет точнее моделировать условия реальной жизни, когда природа исходов может меняться со временем и разные эксперты могут предсказывать с разной степенью успешности в зависимости от текущего тренда.

В работе представлен алгоритм, который позволяет получить оценку для регрета порядка $O(R_T^{ah} \ln T)$. Данная оценка является несколько более слабой, чем (1), однако преимущество нашего алгоритма заключается в том, что он приближает свои потери к меньшей величине – потерям наилучшего составного эксперта. Данный алгоритм обладает преимуществами алгоритма из работы [8] и алгоритма Fixed-Share (впервые предложенного в работе [6], см. также [11], [4]). В исходной версии алгоритм Fixed-Share содержал два постоянных параметра, которые должны были быть выбраны заранее. Алгоритм AdaHedge использует переменный параметр обучения. В работе представлена модифицированная версия метода Fixed-Share, использующая этот алгоритм и включающая в себя переменные параметры.

В рамках данного подхода не делается никаких стохастических предположений об источнике исходных данных и об ограниченности потерь.

В разделе 2 рассматривается формальная постановка задачи и проводится анализ алгоритма AdaHedge. В разделе 3 приводится основной результат работы – модифицированная версия алгоритма Fixed-Share, в которой изменена процедура перераспределения весов. Получена также оценка регрета этого алгоритма. В разделе 4 приведено доказательство основного результата работы – теоремы 4.

В разделе 5 приведены результаты численных экспериментов, проведенных с помощью предложенного алгоритма. Экспертные стратегии в данном случае – это стратегии, которые покупают и продают акции в режиме онлайн. Эти стратегии детально изучаются в работах [12] и [13]. Адаптивный алгоритм Fixed-Share динамически перераспределяет финансовые средства между этими стратегиями в зависимости от их доходности.

Данная работа развивает результаты работы [2].

2. АНАЛИЗ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВЗВЕШИВАНИЯ

Предварительно приведем схему алгоритма Hedge(η) с постоянным параметром обучения (см. [5]).

Заданы начальные веса экспертов $w_{i,1}$ на первом шаге при $i = 1, \dots, N$; обычно задаются равномерные веса $w_{i,1} = 1/N$. Задается параметр обучения – он постоянный и равен η, $\eta > 0$.

Алгоритм Hedge(η)

FOR $t = 1, 2, \dots$

Вычисляем предсказание алгоритма Hedge(η)

$$w^*_{i,t} = \frac{w_{i,1} e^{-\eta L^i_{t-1}}}{\sum\limits_{i=1}^{N} w_{j,1} e^{-\eta L^j_{t-1}}} \text{ при } i = 1, \dots, N \tag{2}$$

Получаем потери экспертов l^i_t при $i = 1, \dots, N$

Вычисляем кумулятивные потери экспертов

$L^i_t = L^i_{t-1} + l^i_t$

Вычисляем потери алгоритма Hedge(η)

$h_t = \sum\limits_{i=1}^{N} w^*_{i,t} l^i_t$

ENDFOR

Кумулятивные потери алгоритма Hedge(η) определяются $H_T = \sum\limits_{t=1}^{T} h_t$.

Обозначим $w_{i,t} = w_{i,1} e^{-\eta L^i_{t-1}}$ и $W_t = \sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t}$. Тогда $w^*_{i,t} = \frac{w_{i,t}}{W_t}$.

Введем экспоненциально смешанные потери (mixloss) на шаге t

$$m_t = -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} w^*_{i,t} e^{-\eta l^i_t}.$$

Лемма 1. *Кумулятивные смешанные потери* $M_T = \sum\limits_{t=1}^{T} m_t$ *можно представить в виде* $M_T = -\frac{1}{\eta} \ln W_{T+1} = -\frac{1}{\eta} \ln \sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,1} e^{-\eta L^i_T}$.

Доказательство. Действительно,

$$M_T = \sum_{t=1}^{T} m_t = \sum_{t=1}^{T} -\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{W_t} \sum_{i=1}^{N} w_{i,t} e^{-\eta l_t^i} =$$

$$\sum_{t=1}^{T} -\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{W_t} \sum_{i=1}^{N} w_{i,t+1} =$$

$$-\frac{1}{\eta} \sum_{t=1}^{T} \ln \frac{W_{t+1}}{W_t} = -\frac{1}{\eta} \ln \prod_{t=1}^{T} \frac{W_{t+1}}{W_t} = -\frac{1}{\eta} \ln W_{T+1} =$$

$$-\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} w_{i,T+1} = -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} w_{i,1} e^{-\eta L_T^i}.$$

Утверждение доказано.

Так как сумма не меньше чем любое слагаемое, получаем полезные неравенства

$$M_T \le -\frac{1}{\eta} \ln w_{i,T+1} = L_T^i + \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{w_{i,1}}. \tag{3}$$

Введем обозначения m_t^η и M_T^η для соответствующих величин m_t и M_T определенных при значении параметра обучения равном η. Важное для дальнейшего свойство величины M_T^η – монотонность по параметру η.

Лемма 2. *$M_T^\eta \ge M_T^\mu$ при $\eta \le \mu$.*

Доказательство. Из вогнутости функции $f(x) = x^\alpha$ при $\alpha < 1$ имеем

$$M_T^\eta = -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} w_{i,1} e^{-\eta L_T^i} = -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} w_{i,1} \left(e^{-\mu L_T^i}\right)^{\frac{\eta}{\mu}} \ge$$

$$-\frac{1}{\eta} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} w_{i,1} e^{-\mu L_T^i}\right)^{\frac{\eta}{\mu}} = -\frac{1}{\mu} \ln \sum_{i=1}^{N} w_{i,1} e^{-\mu L_T^i} = M_T^\mu.$$

Утверждение доказано.

Определим $\delta_t = h_t - m_t$. Из выпуклости функции $f(x) = -\ln x$ имеем

$$m_t = -\ln \left(\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}^* e^{-\eta l_t^i}\right)^{\frac{1}{\eta}} \le \sum_{i=1}^{N} w_{i,t}^* l_t^i = h_t.$$

Поэтому $\delta_t \ge 0$ для всех t. Определим $\Delta_T = \sum_{t=1}^{T} \delta_t$.

Регрет алгоритма Hedge(η) относительно эксперта i равен

$$R_T = H_T - L_T^i = \sum_{t=1}^{T} m_t - L_T^i + \sum_{t=1}^{T} \delta_t = M_T - L_T^i + \Delta_T.$$

В работе [8] предложена модификация AdaHedge алгоритма Hedge для случая переменного параметра обучения η_t, где $0 < \eta_{t+1} \le \eta_t$ для всех t. Схема алгоритма та же, только формула (2) заменяется на

$$w^*_{i,t} = \frac{w_{i,1} e^{-\eta_t L^i_{t-1}}}{\sum\limits_{j=1}^{N} w_{j,1} e^{-\eta_t L^j_{t-1}}} \text{ при } i = 1, \ldots, N \tag{4}$$

Также модифицируется

$$w_{i,t} = w_{i,1} e^{-\eta_t L^i_{t-1}}$$

и

$$m_t = -\frac{1}{\eta_t} \ln \sum_{i=1}^{N} w^*_{i,t} e^{-\eta_t l^i_t}.$$

Используя введенные выше обозначения, можно также записать в виде

$$m_t = -\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{1}{W_t} \sum_{i=1}^{N} w_{i,t} e^{-\eta_t l^i_t} = -\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,1} e^{-\eta_t L^i_t}}{\sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,1} e^{-\eta_t L^i_{t-1}}}.$$

Кумулятивные смешанные потери $M_T = \sum\limits_{t=1}^{T} m_t$.

Определим $\delta_t = h_t - m_t$. Имеем $\delta_t \ge 0$ для всех t. Определим $\Delta_T = \sum\limits_{t=1}^{T} \delta_t$.

Регрет алгоритма AdaHedge относительно эксперта i равен

$$R_T = H_T - L^i_T = \sum_{t=1}^{T} m_t - L^i_T + \sum_{t=1}^{T} \delta_t = M_T - L^i_T + \Delta_T.$$

Обозначим m^η_t, M^η_t – смешанные и кумулятивные смешанные потери, соответственно, алгоритма Hedge(η), который использует на всех шагах постоянный параметр обучения η. По определению

$$m_t = M^{\eta_t}_t - M^{\eta_t}_{t-1}$$

для всех t.

Лемма 3. *$M_T \le M^{\eta_T}_T$ для всех T.*

Доказательство. Используя лемму 2 получаем

$$M_T = \sum_{t=1}^{T} m_t = \sum_{t=1}^{T} M^{\eta_t}_t - M^{\eta_t}_{t-1} \le \sum_{t=1}^{T} M^{\eta_t}_t - M^{\eta_{t-1}}_{t-1} = M^{\eta_T}_T.$$

Утверждение доказано.

3. АЛГОРИТМ ОТСЛЕЖИВАНИЯ НАИЛУЧШЕЙ КОМБИНАЦИИ ЭКСПЕРТОВ

В предыдущем разделе мы сравнивали потери алгоритма экспоненциального взвешивания с потерями наилучшего эксперта. В этом разделе рассмотрим регрет более общего вида, а именно, будем сравнивать потери алгоритма экспоненциального взвешивания с потерями наилучшей комбинации экспертов.

Предварительно приведем схему алгоритма экспоненциального взвешивания CompHedge(η) для составных экспертов.

Имеется N “элементарных” экспертов. На шаге t элементарный эксперт i несет потери l_t^i, где $i \in \{1, \dots, N\}$.

Фиксируем горизонт прогнозирования T. Составным экспертом называется произвольная последовательность $(i_1, i_2, \dots, i_T)$ элементарных экспертов. По определению потери составного эксперта $(i_1, \dots, i_T)$ на шаге t равны $l_t^{i_t}$, его кумулятивные потери на шаге t равны

$$L_t(i_1, i_2, \dots, i_T) = \sum_{s=1}^{t} l_s^{i_s}.$$

Заметим, что

$$L_t(i_1, i_2, \dots, i_T) = L_t(i_1, i_2, \dots, i_t).$$

Рассматриваем алгоритм Hedge(η) для составных экспертов с постоянным параметром обучения η. Обозначим этот алгоритм CompHedge(η) Схема алгоритма такая же как у алгоритма Hedge(η). Каждый составной эксперт $i_1, i_2, \dots, i_T$ имеет на шаге t вес $\tilde{w}_t(i_1, i_2, \dots, i_T)$. Пусть $\tilde{w}_1(i_1, i_2, \dots, i_T)$ – начальный вес эксперта $i_1, i_2, \dots, i_T$.[1] По определению

$$\tilde{w}_t(i_1, i_2, \dots, i_T) = \tilde{w}_1(i_1, i_2, \dots, i_T) e^{-\eta L_{t-1}(i_1, i_2, \dots, i_T)}.$$

Аналогичным образом определяется потенциал

$$\tilde{W}_T = \sum_{i_1, \dots, i_T} \tilde{w}_t(i_1, i_2, \dots, i_T) \qquad (5)$$

Смешанные потери (mixloss) составных экспертов равны

$$\tilde{m}_t = \tilde{m}_t^\eta = -\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\tilde{W}_t} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_T} \tilde{w}_t(i_1, i_2, \dots, i_T) e^{-\eta l_t^{i_t}} =$$
$$-\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\tilde{W}_t} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_T} \tilde{w}_{t+1}(i_1, i_2, \dots, i_T) = -\frac{1}{\eta} \ln \frac{\tilde{W}_{t+1}}{\tilde{W}_t}.$$

Кумулятивные смешанные потери составных экспертов за T шагов равны

$$\tilde{M}_T = \tilde{M}_T^\eta = \sum_{t=1}^{T} \tilde{m}_t = -\frac{1}{\eta} \sum_{t=1}^{T} \ln \frac{\tilde{W}_{t+1}}{\tilde{W}_t} = -\frac{1}{\eta} \ln \tilde{W}_{t+1} =$$
$$-\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i_1, \dots, i_T} \tilde{w}_{t+1}(i_1, i_2, \dots, i_T) =$$
$$-\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i_1, \dots, i_T} \tilde{w}_1(i_1, i_2, \dots, i_T) e^{-\eta L_T(i_1, i_2, \dots, i_T)}.$$

[1] Точное выражение для начального веса составного эксперта будет приведено ниже.

Ранее было доказано, что для кумулятивных смешанных потерь произвольных экспертов верно свойство монотонности $M_T^\eta \ge M_T^\mu$ при $\eta \le \mu$ (см. лемму 2).

Алгоритм CompHedge(η) для составных экспертов физически не реализуем, так как число этих экспертов экспоненциально растет с ростом T. Поэтому определяют эквивалентный ему по результатам физически реализуемый алгоритм, который работает с кумулятивными весами.

Рассмотрим кумулятивные (маргинальные) веса $\tilde{w}_t(i)$ элементарных экспертов, где $i = 1, \dots, N$. Определим $\tilde{w}_1(i) = 1/N$ и

$$\tilde{w}_t(i) = \sum_{i_1,\dots,i_{t-1},i_t,\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1, \dots, i_{t-1}, i, i_t, \dots, i_T),$$

при $t > 1$, а также

$$\tilde{w}_t(i_1, \dots, i_t) = \sum_{i_{t+1},\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1, \dots, i_t, i_{t+1}, \dots, i_T).$$

Лемма 4. *Для маргинальных весов составных экспертов выполнены равенства*

1. $\tilde{W}_t = \sum\limits_{i=1}^N \tilde{w}_t(i)$
2. $\tilde{m}_t = -\frac{1}{\eta} \ln \sum\limits_{i=1}^N \tilde{w}_t^*(i) e^{-\eta l_t^i}$
3. $h_t = \sum\limits_{i=1}^N \tilde{w}_t^*(i) l_t^i$

Доказательство. Прямой проверкой получаем

$$\tilde{W}_t = \sum_{i_1,\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1, \dots, i_T) =$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{i_1,\dots,i_{t-1},i_{t+1},\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1, \dots, i, \dots, i_T) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t(i).$$

Смешанные потери (mixloss) составных экспертов равны

$$\tilde{m}_t = -\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\tilde{W}_t} \sum_{i_1,i_2,\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1, i_2, \dots, i_T) e^{-\eta l_t^{i_t}} =$$

$$-\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\tilde{W}_t} \sum_{i=1}^N \sum_{i_1,\dots,i,\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1, \dots, i, \dots, i_T) e^{-\eta l_t^i} =$$

$$-\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\tilde{W}_t} \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t(i) e^{-\eta l_t^i}.$$

Утверждение доказано.

Определим теперь начальные веса составных экспертов для алгоритма CompHedge(η). Они будут неравномерными. Введем параметры $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_T < 1$. Определим

$$\tilde{w}_1(i_1, \dots, i_T) = \frac{1}{N} \prod_{i_{t-1} \ne i_t}^T \left(\frac{\alpha_t}{N-1} \right) \prod_{i_{t-1} = i_t}^T (1 - \alpha_t). \tag{6}$$

Можно заметить, что из определения следует, что $\tilde{w}_1(i_1) = \frac{1}{N}$ и

$$\tilde{w}_1(i_1, \dots, i_{t+1}) = \tilde{w}_1(i_1, \dots, i_t)\left(\frac{\alpha_t}{N-1}1_{i_{t+1}\neq i_t} + (1-\alpha_t)1_{i_{t+1}=i_t}\right).$$

Алгоритм Fixed-Share с постоянным параметром обучения η предложенный в работе [6] оперирует с "макровесами" $w_{i,t}$, где $i = 1, \dots, N$. Приведем протокол игры и схему алгоритма.

Алгоритм FS(η)

Полагаем $w_{i,1} = \frac{1}{N}$ при $i = 1, \dots, N$.

FOR t=1,2,...

Вычисляем прогноз распределения потерь среди экспертов

$$w^*_{i,t} = \frac{w_{i,t}}{\sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t}}\ , 1 \le i \le N.$$

Получаем потери экспертов l^i_t при $1 \le i \le N$.

Вычисляем потери алгоритма

$$\mathrm{FS}(\eta) : h_t = \sum_{i=1}^{N} w^*_{i,t} l^i_t.$$

Вычисляем кумулятивные потери всех экспертов $1 \le i \le N$ и алгоритма.

Переопределяем веса всех экспертов в два этапа:

Loss Update

$w^m_{i,t} = w_{i,t}e^{-\eta l^i_t}$

Fixed-Share Update

$w_{i,t+1} = (1-\alpha_t)w^m_{t,i} + \frac{\alpha_t}{N-1}\sum\limits_{j\neq i} w^m_{t,j}$

ENDFOR

Лемма 5. $\sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t+1} = \sum\limits_{i=1}^{N} w^m_{i,t}$.

Доказательство. Сумма не изменяется, так как на шаге t от каждого веса забирается доля α_t, а все забранные доли возвращаются другим весам. Утверждение доказано.

Из леммы

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t+1} = \sum_{i=1}^{N} w^m_{i,t} = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t}e^{-\eta l^i_t}.$$

Определим смешанные потери алгоритма FS(η):

$$m^\eta_t = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i=1}^{N} w^*_{i,t}e^{-\eta l^i_t}.$$

Из предыдущих определений получаем выражения для смешанных потерь

$$m_t^\eta = -\frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{W_t}\sum_{i=1}^N w_{i,t}e^{-\eta l_t^i} =$$
$$-\frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{W_t}\sum_{i=1}^N w_{i,t}^m = -\frac{1}{\eta}\ln\frac{W_{t+1}}{W_t}.$$

Также

$$M_T^\eta = \sum_{1=1}^T m_t^\eta = \sum_{1=1}^T -\frac{1}{\eta}\ln\frac{W_{t+1}}{W_t} = -\frac{1}{\eta}\ln W_{T+1}.$$

Эквивалентность алгоритмов CompHedge(η) и FS(η) при постоянном параметре α впервые показана в [11], см. также [4]. Мы докажем несколько более общее утверждение для переменного параметра $\alpha = \alpha_t$.

Теорема 1. *Пусть алгоритм CompHedge(η), в котором начальное распределение весов определено по формуле (6), и алгоритм FS(η) используют один и тот же параметр обучения η. Тогда при фиксированном горизонте прогнозирования T $\tilde{w}_t(i) = w_{i,t}$ для всех $1 \le i \le N$ и $1 \le t \le T$.*

Доказательство. Доказательство математической индукцией по t. Далее индекс s в $w_{i,t}$ опускаем.

Из определения $\tilde{w}_1(i) = w_{i,1}$ при $1 \le i \le N$. Предположим, что $\tilde{w}_t(i) = w_{i,t}$ при $1 \le i \le N$. Докажем, что $\tilde{w}_{t+1}(i) = w_{i,t+1}$ для всех i. Из определения имеет место следующая цепочка равенств:

$$\tilde{w}_{t+1}(i) = \sum_{i_1,\dots,i_t,i_{t+2},\dots,i_T} \tilde{w}_{t+1}(i_1,\dots,i_t,i,i_{t+2},\dots,i_T) =$$
$$\sum_{i_1,\dots,i_t} e^{-\eta\sum\limits_{s=1}^t l_s^{i_s}}\tilde{w}_1(i_1,\dots,i_t,i) =$$
$$\sum_{i_1,\dots,i_t} e^{-\eta\sum\limits_{s=1}^t l_s^{i_s}}\tilde{w}_1(i_1,\dots,i_t)\left(\frac{\alpha_t}{N-1}1_{i_t\ne i} + (1-\alpha_t)1_{i_t=i}\right) = \tag{7}$$
$$\sum_{i_t} e^{-\eta l_t^{i_t}}\tilde{w}_t(i_t)\left(\frac{\alpha_t}{N-1}1_{i_t\ne i} + (1-\alpha_t)1_{i_t=i}\right) = \tag{8}$$
$$\sum_{i_t} e^{-\eta l_t^{i_t}} w_{i_t,t}\left(\frac{\alpha_t}{N-1}1_{i_t\ne i} + (1-\alpha_t)1_{i_t=i}\right) = \tag{9}$$
$$\sum_{i_t} w_{i_t,t}^m\left(\frac{\alpha_t}{N-1}1_{i_t\ne i} + (1-\alpha_t)1_{i_t=i}\right) = \tag{10}$$
$$\frac{\alpha_t}{N-1}\sum_{i_t\ne i} w_{i_t,t}^m + (1-\alpha_t)w_{i,t}^m = w_{i,t+1}.$$

Здесь при переходе от (7) к (8) было использовано равенство

$$\tilde{w}_t(i_t) = \sum_{i_1,\dots,i_{t-1}} \tilde{w}_t(i_1,\dots,i_t) = \sum_{i_1,\dots,i_{t-1}} \tilde{w}_1(i_1,\dots,i_t)e^{-\eta\sum\limits_{s=1}^{t-1} l_s^{i_s}},$$

при переходе от (8) к (9) было использовано предположение индукции $\tilde{w}_t(i_t) = w_{i_t,t}$, а при переходе от (9) к (10) было использовано определение $w^m_{i_t,t}$. Таким образом, предположение индукции выполнено и на шаге $t+1$. Утверждение доказано.

Поскольку все величины $\tilde{W}_t$, $\tilde{m}^\eta_t$, $\tilde{M}^\eta_t$ определены через $\tilde{w}_{t'}(i)$, а величины W_t, m^η_t, M^η_t определены через веса $w_{i,t'}$, где $t' \le t$, получаем следствие.

Следствие 1. *1.* $\tilde{W}_t = W_t$, $\tilde{m}^\eta_t = m^\eta_t$, $\tilde{M}^\eta_t = M^\eta_t$.
2. $M^\eta_t \ge M^\mu_t$ *при* $\eta < \mu$, *в частности,* M^η_t *будет монотонна по* η.

Свойство 2) следует из леммы 2 примененной к алгоритму CompHedge(η), который эквивалентен алгоритму FS(η).

Оценим величину

$$M^\eta_T = -\frac{1}{\eta}\ln W_{T+1}$$

через потери произвольного составного эксперта. Для это воспользуемся эквивалентность алгоритмов FS(η) и CompHedge(η), точнее, равенством их основных характеристик: $\tilde{W}_T = W_T$ и $\tilde{M}^\eta_t = M^\eta_t$.

По следствию 1 величина W_{T+1} равна сумме весов всех составных экспертов. Поэтому согласно (5)

$$M^\eta_T \le L_T(i_1, i_2, \ldots, i_T) - \frac{1}{\eta}\ln \tilde{w}_1(i_1, i_2, \ldots, i_T).$$

Учитывая выражение (6) для начального веса эксперта $i_1, \ldots, i_T$ в алгоритме CompHedge(η) получим следующую оценку для регрета кумулятивных смешанных потерь алгоритма FS(η).

Теорема 2. *Для произвольного составного эксперта* $i_1, \ldots, i_T$

$$M^\eta_T - L_T(i_1, i_2, \ldots, i_T) \le$$
$$-\frac{1}{\eta}\ln\left(\frac{1}{N}\prod_{i_{t-1}\ne i_t}^{T}\left(\frac{\alpha_t}{N-1}\right)\prod_{i_{t-1}=i_t}^{T}(1-\alpha_t)\right). \qquad (11)$$

Динамическое перераспределение весов при переменном параметре обучения. Пусть теперь на каждом шаге t алгоритма Fixed-Share используется параметр η_t, где $\eta_{t+1} < \eta_t$ при всех t. Приведем протокол игры для этого алгоритма.

Мета-алгоритм FS

FOR $t = 1, 2, \ldots$

Моделируем первые $t-1$ шагов алгоритма FS(η) с постоянным параметром обучения $\eta = \eta_t$ на исторических данных потерь экспертов $l^i_{t'}$, $1 \le t' \le t-1$, $i = 1, \ldots, N$. В результате моделирования на последнем шаге $t-1$ алгоритм $FS(\eta_t)$ выдает веса $w^{\eta_t}_{i,t}$ экспертов $i = 1, \ldots, N$ для будущего шага t. Используя эти веса вычисляем прогноз распределения потерь среди экспертов

$$w^{*,\eta_t}_{i,t} = \frac{w^{\eta_t}_{i,t}}{\sum\limits_{i=1}^{N} w^{\eta_t}_{i,t}}\ , 1 \le i \le N.$$

Получаем потери экспертов l^i_t при $i = 1, \ldots, N$.

Вычисляем потери мета-алгоритма FS на шаге t: $h_t = \sum\limits_{i=1}^{N} w^{*,\eta_t}_{i,t} l^i_t$.

ENDFOR

На шаге t смешанные потери мета-алгоритма FS определяются

$$m_t^{\eta_t} = -\frac{1}{\eta_t} \ln \sum_{i=1}^{N} w_{i,t}^{*,\eta_t} e^{-\eta_t l_t^i},$$

где все веса $w_{i,t}^{*,\eta_t}$ определены через веса $w_{i,t}^{\eta_t}$, которые выданы алгоритмом FS(η) с постоянным параметром обучения $\eta = \eta_t$.

Кумулятивные смешанные потери мета-алгоритма FS определяются

$$M_T = \sum_{1=1}^{T} m_t^{\eta_t}.$$

При таком определении $m_t^{\eta_t} = M_t^{\eta_t} - M_{t-1}^{\eta_t}$ для всех t, $M_t^{\eta_t}$ и $M_{t-1}^{\eta_t}$ – кумулятивные смешанные потери алгоритма $FS(\eta_t)$ на шагах t и $t-1$.

Имеет место аналог леммы 3 для мета-алгоритма FS (с переменным параметром обучения).

Лемма 6. $M_T \le M_T^{\eta_T}$ *для всех* T.

Доказательство. Используя свойство 2) следствия 1 получаем

$$M_T = \sum_{t=1}^{T} m_t^{\eta_t} = \sum_{t=1}^{T} M_t^{\eta_t} - M_{t-1}^{\eta_t} \le \sum_{t=1}^{T} M_t^{\eta_t} - M_{t-1}^{\eta_{t-1}} = M_T^{\eta_T}.$$

Утверждение доказано.

Используем лемму 6 и оценку для регрета кумулятивных смешанных потерь $M_T^{\eta_T}$ алгоритма FS(η_T) из теоремы 2.

Пусть $s(i_1, \ldots, i_T) = |\{s : i_{s-1} \ne i_s,\ 2 \le s \le T\}|$ – число перемен элементарных экспертов в составном эксперте. Полагаем $\eta_t = \frac{1}{\Delta_{t-1}}$.

Теорема 3. *Обозначим* $k = s(i_1, \ldots, i_T)$. *Для произвольного составного эксперта* $i_1, \ldots, i_T$

$$M_T - L_T(i_1, i_2, \ldots, i_T) \le ((k+1)\ln(T+1) + (k+1)\ln N + 1)\Delta_T. \tag{12}$$

Доказательство. По лемме 1 (примененной к эквивалентному алгоритму CompHedge(η_T)) и формуле (6) имеем

$$M_T - L_T(i_1, i_2, \ldots, i_T) \le$$
$$-\frac{1}{\eta_T} \ln \left(\frac{1}{N} \prod_{i_{t-1} \ne i_t}^{T} \left(\frac{\alpha_t}{N-1} \right) \prod_{i_{t-1} = i_t}^{T} (1 - \alpha_t) \right).$$

Зададим параметр $\alpha_t = \frac{1}{t+1}$ для всех t. Тогда правая часть этого неравенства при $\eta_T = \frac{1}{\Delta_{T-1}}$ оценивается сверху величиной

$$\frac{1}{\eta_T}\left(\ln N + \sum_{i_{t-1}\neq i_t}^{T}(\ln(t+1)+\ln(N-1)) - \sum_{i_{t-1}=i_t}^{T}\ln\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\right) \leq$$

$$\frac{1}{\eta_T}\left(\ln N + k\ln(T+1) + k\ln(N-1) + \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{t}\right) \leq$$

$$\frac{1}{\eta_T}((k+1)\ln(T+1)+(k+1)\ln N+1) \leq$$

$$((k+1)\ln(T+1)+(k+1)\ln N+1)\Delta_T.$$

Здесь использовано неравенство $\Delta_{t-1} \leq \Delta_t$ для всех t. Утверждение доказано.

Обозначим $L_T^k = \min\limits_{s(i_1,\dots,i_T)\leq k} L_T(i_1,\dots,i_T)$. Так как $H_T = M_T + \Delta_T$, получаем

$$R_T^k = H_T - L_T^k \leq ((k+1)\ln(T+1)+(k+1)\ln N+2)\Delta_T = \alpha_T\Delta_T, \tag{13}$$

где $\alpha_T = (k+1)\ln(T+1)+(k+1)\ln N+2$.

Используя технику работы [8], можно получить верхнюю оценку величины Δ_T:

$$\Delta_T \leq \sqrt{S_T\frac{(L_T^+ - L_T^k)(L_T^k - L_T^-)}{L_T^+ - L_T^-}} + S_T(\alpha_T + \frac{5}{3}),$$

где $L_T^- = \sum\limits_{t=1}^{T} l_t^-$, $L_T^+ = \sum\limits_{t=1}^{T} l_t^+$, $l_t^- = \min_{1\leq i\leq N} l_t^i$, $l_t^+ = \max_{1\leq i\leq N} l_t^i$, $s_t = l_t^+ - l_t^-$, $S_T = \max_{1\leq t\leq T} s_t$.

Вывод этой оценки представлен в разделе 4.

В результате получаем основной результат работы – верхнюю оценку регрета алгоритма FS.

Теорема 4. *Для произвольного k и всех T будет*

$$R_T^k \leq \alpha_T\sqrt{S_T\frac{(L_T^+ - L_T^k)(L_T^k - L_T^-)}{L_T^+ - L_T^-}} + S_T\alpha_T(\alpha_T + \frac{5}{3}), \tag{14}$$

где $\alpha_T = (k+1)\ln(T+1)+(k+1)\ln N+2$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Доказательство теоремы 4 в целом аналогично доказательству теоремы 8 из работы [8], за исключением того, что адаптивный параметр обучения определяется по-другому: $\eta_T = \frac{1}{\Delta_{T-1}}$, где $\Delta_T = \sum\limits_{t=1}^{T}\delta_t$, $\delta_t = m_t - h_t$, $m_t = -\frac{1}{\eta_t}\ln\sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t}^* e^{-\eta_t l_t^i}$, $h_t = \sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t}^* l_t^i$, $w_{i,t}^*$ – нормированные веса алгоритма FS.

Приведем необходимые оценки с помощью неравенства Бернштейна через кумулятивную дисперсию потерь экспертов $V_T = \sum\limits_{t=1}^{T} v_t$, где

$$v_t = Var_{j\sim w_t^*}[l_t^j] = E_{j\sim w_t^*}[(l_t^j - E_{j\sim w_t^*}[(l_t^j)])^2] = \sum_{j=1}^{N} w_{j,t}^*(l_t^j - h_t)^2,$$

$w_t^* = (w_{1,t}^*, \dots, w_{N,t}^*)$ – вектор нормированных весов экспертов.

Обозначаем $s_t = l_t^+ - l_t^-$, где $l_t^+ = \max_{1\le j\le N} l_t^j$, $l_t^- = \min_{1\le j\le N} l_t^j$.

Лемма 7. *Величина δ_t удовлетворяет:*

$$\delta_t \le \frac{e^{s_t\eta_t} - 1 - s_t\eta_t}{\eta_t s_t^2} v_t. \tag{15}$$

Доказательство. Докажем это выражение, используя неравенство Бернштейна (см. леммы A3-A5 из [4]).

Предварительно сформулируем это неравенство для произвольной случайной величины $X \in (-\infty, 1)$, где $EX = 0$, $EX^2 = \sigma^2$. Тогда для произвольного $\eta > 0$ будет

$$\ln Ee^{\eta X} \le \sigma^2(e^\eta - \eta - 1).$$

В дальнейшем также будет использоваться следующее неравенство. Пусть $X \in [0,1]$ – случайная величина и $\sigma = \sqrt{EX^2 - (EX)^2}$. Тогда для произвольного $\eta > 0$ будет

$$\ln E[e^{-\eta(X - EX)}] \le \sigma^2(e^\eta - \eta - 1).$$

Рассмотрим случайную величину, которая принимает значения l_t^j с вероятностями $w_{j,t}^*$, где $j = 1, \dots, N$. Преобразуем ее так, чтобы ее значения принадлежали отрезку $[0,1]$: $X_t^j = \dfrac{l_t^j - l_t^-}{s_t}$. Тогда неравенство Бернштейна можно записать следующим образом:

$$\ln E_{j\sim w_t^*}\left(e^{-\eta\left(X_t^j - EX_t^j\right)}\right) \le \sigma^2\left(e^\eta - 1 - \eta\right)$$

для всех $\eta > 0$. Перепишем это неравенство более детально при $\eta = s_t\eta_t$:

$$\ln E_{j\sim w_t^*}\left(e^{-\eta\left(X_t^j - EX_t^j\right)}\right) = \ln\left(\sum_{j=1}^N w_{j,t}^* e^{-s_t\eta_t\left(\frac{l_t^j - l_t^-}{s_t} - \sum\limits_{j=1}^N w_{i,t}^* \frac{l_t^i - l_t^-}{s_t}\right)}\right) =$$

$$\ln\left(\sum_{j=1}^N w_{j,t}^* e^{-\eta_t\left(l_t^j - l_t^- - \sum\limits_{j=1}^N w_{i,t}^*\left(l_t^i - l_t^-\right)\right)}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^N w_{j,t}^* e^{-\eta_t\left(l_t^j - l_t^-\right)}}{e^{-\eta_t \sum\limits_{j=1}^N w_{i,t}^*\left(l_t^j - l_t^-\right)}}\right) = \ln\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^N w_{j,t}^* e^{-\eta_t l_t^j}}{e^{-\eta_t \sum\limits_{j=1}^N w_{j,t}^* l_t^i}}\right) =$$

$$\ln\sum_{j=1}^N w_{j,t}^* e^{-\eta_t l_t^j} + \eta_t \sum_{j=1}^N w_{j,t}^* l_t^j = \eta_t(h_t - m_t) = \eta_t\delta_t \le \sigma^2\left(e^{s_t\eta_t} - 1 - s_t\eta_t\right) =$$

$$Var_{j\sim w_t^*}[X_t^j]\left(e^{s_t\eta_t} - 1 - s_t\eta_t\right) = \frac{1}{s_t^2} Var_{j\sim w_t^*}[l_t^j]\left(e^{s_t\eta_t} - 1 - s_t\eta_t\right)$$

Откуда получаем необходимое неравенство:

$$\delta_t \le \frac{e^{s_t\eta_t} - 1 - s_t\eta_t}{\eta_t s_t^2} v_t.$$

Утверждение доказано.

Запишем (15) также в виде

$$\delta_t \le \frac{g(s_t\eta_t)}{s_t}v_t, \text{ где } g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}. \tag{16}$$

Воспроизведем оценку на кумулятивную смешанную разность Δ_T из работы [8]. Используем $\eta_t = \frac{1}{\Delta_{t-1}}$.

Лемма 8. *Кумулятивная смешанная разность Δ_T удовлетворяет: $(\Delta_T)^2 \le V_T + \frac{5}{3}S_T\Delta_T$, где $S_T = \max_{1\le t\le T}(l_t^+ - l_t^-)$.*

Доказательство. Распишем квадрат кумулятивной смешанной разности:

$$\begin{aligned}(\Delta_T)^2 = \sum_{t=1}^{T}\left(\Delta_t^2 - \Delta_{t-1}^2\right) = \sum_{t=1}^{T}\left((\Delta_{t-1}+\delta_t)^2 - \Delta_{t-1}^2\right) = \\ \sum_{t=1}^{T}\left(2\delta_t\Delta_{t-1} + \delta_t^2\right) = \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{2\delta_t}{\eta_t} + \delta_t^2\right) \le \\ \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{2\delta_t}{\eta_t} + s_t\delta_t\right) \le 2\sum_{t=1}^{T}\frac{\delta_t}{\eta_t} + S_T\Delta_T.\end{aligned} \tag{17}$$

Получим оценку $\dfrac{\delta_t}{\eta_t}$ с помощью неравенства (16). Перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}v_t \ge \frac{\delta_t s_t}{2g\left(s_t\eta_t\right)} = \frac{\delta_t}{\eta_t} + A,$$

$$\begin{aligned}A = \frac{\eta_t s_t\delta_t - 2g\left(s_t\eta_t\right)\delta_t}{2g\left(s_t\eta_t\right)\eta_t} = \frac{s_t\left(\eta_t^2\delta_t s_t^2 - 2\delta_t\left(e^{s_t\eta_t} - s_t\eta_t - 1\right)\right)}{2s_t\eta_t\left(e^{s_t\eta_t} - s_t\eta_t - 1\right)} = \\ = s_t\delta_t\frac{\frac{1}{2}\left(s_t\eta_t\right)^2 - e^{s_t\eta_t} - s_t\eta_t - 1}{s_t\eta_t\left(e^{s_t\eta_t} - s_t\eta_t - 1\right)} = \varphi\left(s_t\eta_t\right)s_t\delta_t,\end{aligned}$$

где

$$\varphi = \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{xe^x - x^2 - x}.$$

Нетрудно оценить $\varphi(x) \le 1/3$.[2] Откуда

$$\frac{\delta_t}{\eta_t} \le \frac{1}{3}s_t\delta_t + \frac{1}{2}v_t. \tag{18}$$

Подставив оценку (18) в неравенство (17) и, суммируя, получим:

$$(\Delta_T)^2 \le V_T + \frac{5}{3}S_T\Delta_T.$$

Утверждение доказано.

[2] Найдем оценку на $\varphi\left(x\right)$ используя разложения в ряд Тэйлора:

$$\frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{xe^x - x^2 - x} \sim \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - x - 1 + \frac{x^3}{6} + o(x)}{\frac{x^3}{2} + o(x)} \sim \frac{\frac{x^3}{6} + o(x)}{\frac{x^3}{2} + o(x)} \sim \frac{1}{3}$$

Оценим величину V_T. Из определения $v_t \le (l_t^+ - h_t)(h_t - l_t^-) \le \frac{s_t^2}{4}$.

Лемма 9. *Пусть* $k \le T$ *и* $S_T = \max_{1\le t\le T} s_t$ *и* $L_T^k \le H_T$. *Тогда*

$$V_T \le S_T \frac{(L_T^+ - L_T^k)(L_T^k - L_T^-)}{L_T^+ - L_T^-} + S_T\alpha_T\Delta_T.$$

Доказательство. Имеют место следующие неравенства

$$V_T = \sum_{t=1}^{T} v_t \le \sum_{t=1}^{T}(l_t^+ - h_t)(h_t - l_t^-) \le S_T \sum_{t=1}^{T} \frac{(l_t^+ - h_t)(h_t - l_t^-)}{s_t} =$$

$$S_T T \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{T} \frac{(l_t^+ - h_t)(h_t - l_t^-)}{s_t} \le S_T \frac{(L_T^+ - H_T)(H_T - L_T^-)}{L_T^+ - L_T^-}.$$

Последнее неравенство получено применением неравенства Йенсена к вогнутой функции

$$B(x, y.z) = (z - y)(y - x)/(z - x)$$

на множестве $x \le y \le z$ (см. [8]). Утверждение доказано.

Согласно условию леммы и неравенству (13) имеет место неравенство

$$L_T^k \le H_T \le L_T^k + \alpha_T\Delta_T.$$

Отсюда

$$V_T \le S_T \frac{(L_T^+ - H_T)(H_T - L_T^-)}{L_T^+ - L_T^-} \le \tag{19}$$

$$S_T \frac{(L_T^+ - L_T^k)(L_T^k + \alpha_T\Delta_T - L_T^-)}{L_T^+ - L_T^-} \le \tag{20}$$

$$S_T \frac{(L_T^+ - L_T^k)(L_T^k - L_T^-)}{L_T^+ - L_T^-} + S_T\alpha_T\Delta_T. \tag{21}$$

Обозначим

$$A_T = \frac{(L_T^+ - L_T^k)(L_T^k - L_T^-)}{L_T^+ - L_T^-}.$$

Из неравенства (21) и леммы 8 следует, что

$$\Delta_T^2 \le S_T A_T + S_T(\alpha_T + \frac{5}{3})\Delta_T.$$

Имеем неравенство вида $\Delta_T^2 \le a + b\Delta_T$, где $a = S_T A_T$, $b = S_T(\alpha_T + \frac{5}{3})$. Разрешим это неравенство относительно Δ_T:

$$\Delta_T \le \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a} \le \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2} + \sqrt{4a}\right) =$$

$$\sqrt{a} + b = \sqrt{S_T A_T} + S_T(\alpha_T + \frac{5}{3}).$$

Напомним, что $R_T^k = H_T - L_T^k$. Если $H_T \le L_T^k$, то $R_T^k \le 0$ и неравенство (14) автоматически выполнено. В противном случае, по (13)

$$R_T^k = H_T - L_T^k \le \alpha_T\Delta_T \le$$

$$\alpha_T\sqrt{S_T A_T} + S_T\alpha_T(\alpha_T + \frac{5}{3}),$$

где $\alpha_T = (k + 2)\ln(T + 2) + (k + 1)\ln N + 1$. Таким образом, неравенство (14) выполнено.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для иллюстрации теоретических результатов проведены вычислительные эксперименты по онлайн обучению на искусственно синтезированных данных, а также приведены примеры агрегирования экспертных решений при виртуальной торговле акциями.

Первый эксперимент основан на идее из [3]. Предполагается, что имеется три эксперта, каждый из которых в процессе последовательных шагов обучения принимает решения и несет некоторые потери. Рассматривается стандартный случай, когда потери экспертов на каждом шаге заранее ограничены. Временной интервал разделен на несколько сегментов, на каждом из которых один из экспертов является “лучшим”, т.е. выдает более точные прогнозы. На каждом шаге генерируем случайное значение ω, с равной вероятностью равное 0 или 1. При этом “лучший” на данном сегменте обучения эксперт выдает свой прогноз ξ в виде случайного числа, равномерно распределенного на отрезке $[0, a]$, если $\omega = 0$ или $[1-a, 1]$, если $\omega = 1$, остальные эксперты также выдают подобные рандомизированные решения, но с параметром b, где $0 < a < b < 1$. В приведенных экспериментах параметры размывания прогноза a и b равны 0.3 для “лучшего” и 0.8 для остальных экспертов. Потери эксперта или агрегирующего алгоритма вычисляются с помощью функции (потерь) $(\omega-\xi)^2$. Для агрегирования экспертных решений были использованы методы AdaHedge и Fixed-Share. На рис.1 приведены графики кумулятивных потерь каждого из трех экспертов в ходе последовательных испытаний, разбитых на 6 сегментов. Последовательность “лучших” экспертов имеет вид (1 2 1 3 2 1) и показана в верхней части графика над каждым из сегментов. В процессе обучения при переходе от одного сегмента к другому происходит смена лидеров (экспертов с минимальными потерями), и агрегирующий алгоритм должен адаптироваться к происходящим изменениям. На рис.1. также приведены результаты агрегирования методом AdaHedge и адаптивным вариантом метода Fixed-Share. Как видно, в результате смешивания потери алгоритма Fixed-Share оказываются существенно меньше потерь каждого из индивидуальных экспертов, а также потерь другого агрегирующего алгоритма AdaHedge. На рис.2 показаны изменения весов в ходе эксперимента для двух методов смешивания. При этом адаптивный вариант метода Fixed-Share демонстрирует более оперативную адаптацию к изменениям в положении лидера.

В следующих двух экспериментах продемонстрированы возможности алгоритмов AdaHedge и адаптивного варианта Fixed-Share для случая, когда выигрыши (потери) экспертов на каждом шаге не могут быть ограничены заранее. В этом трудном случае алгоритмы смешивания, как правило, показывают наихудшие результаты. Исходным материалом для этих экспериментов послужили данные о поминутных котировках акций на рынках ММВБ и BATS за 2014 г., доступные для скачивания на сайте www.finam.ru. Для экспериментов выбрали по семь акций с наиболее противоречивой историей с каждого рынка. С помощью рандомизированного алгоритма, приведенного в цитируемых ниже работах, для каждой акции строили скользящий прогноз цены на следующий момент времени, учитывая ее предысторию. Полученные прогнозы использовали в процедуре виртуальной торговли. Детальное описание работы торгового автомата приведено в [1], [13], [14]. Доходы от торговли по каждой из акций рассматривались как кумулятивные доходы семи независимых экспертов. В конце каждого дня некоторая фиксированная сумма перераспределялась между этими экспертами с помощью алгоритма AdaHedge или Fixed-Share и использовалась ими в процессе торговли в течение последующего дня. Заметим, что теоретическая часть работы сформулирована в терминах потерь. В данном эксперименте максимизировали выигрыш (доход), полученный в процессе игры. Поэтому при использовании алгоритмов смешивания в качестве аргументов подставляли значения доходов с отрицательным знаком. На рис.3 приведены нормализованные графики изменения цен семи акций рынка ММВБ. Для удобства сравнения графики приведены в процентах от начальной цены, которая принимается за 1. На рис.4 приведены графики накопленных доходов от вир-

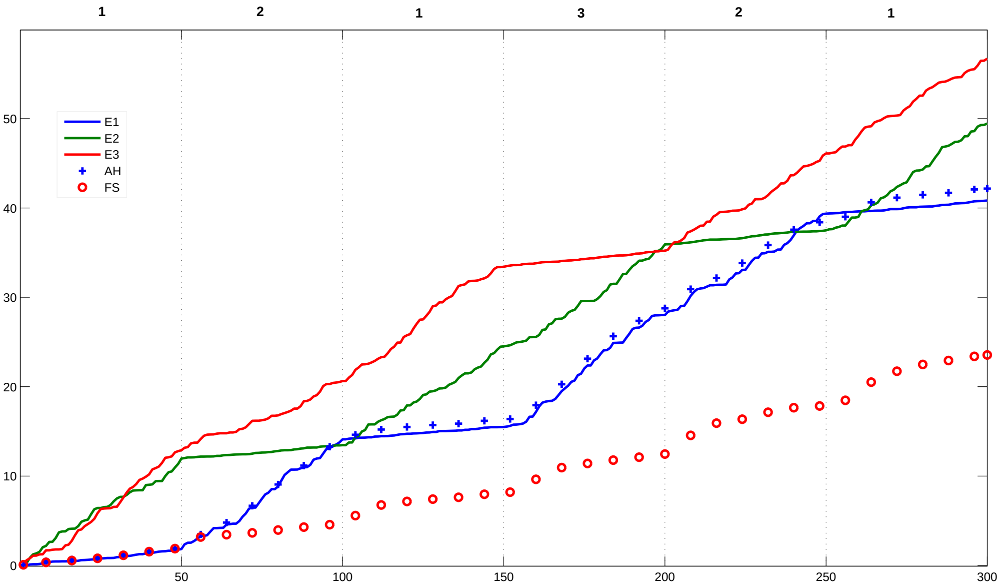

Рис. 1. Графики изменения кумулятивных потерь экспертов (сплошные линии) и результаты агрегирования методом AdaHedge (AH: +++++) и адаптивным вариантом метода Fixed-Share (FS: ooooo).

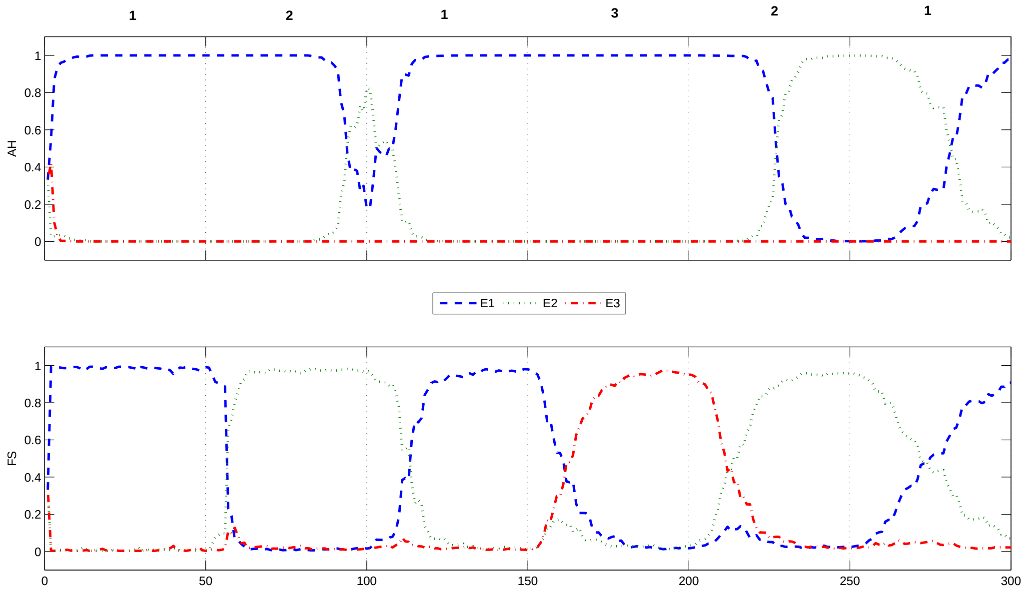

Рис. 2. Динамика весов экспертов для двух методов смешивания. Адаптивный вариант метода Fixed-Share демонстрирует более оперативную адаптацию к изменениям в положении лидера.

туальной игры на основе этих акций. Сплошными линиями показаны кумулятивные суммы доходов от независимой торговли по каждому из инструментов. В этой игре есть выраженные лидеры - акции TRNFP, SBER, NVTK. На том же рисунке приведены результаты двух вариантов смешивания экспертов – по методу AdaHedge и рассматриваемому в статье адаптивному

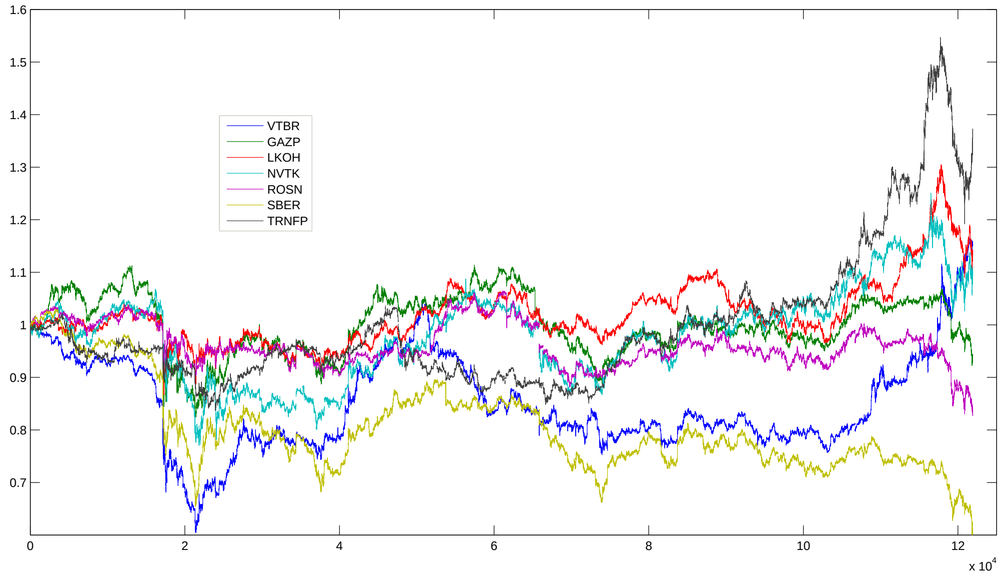

Рис. 3. Графики изменения нормированных цен 7 акций рынка ММВБ за 2014 г. Время показано в минутах работы рынка.

методу Fixed-Share. На следующей паре рисунков 5 и 6 приведены графики нормализованных цен и результаты виртуальной торговли для семи акций рынка BATS USA. Для данных бумаг в анализируемом интервале времени характерно разнонаправленное движение цен и доходов экспертных стратегий, поэтому оба агрегирующих алгоритма показали худшие результаты, чем в примерах с акциями ММВБ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе в рамках теории предсказаний (принятия решений) с экспертами в режиме онлайн предложен адаптивный алгоритм, в котором соединены преимущества двух известных алгоритмов AdaHedge и Fixed-Share. Алгоритм AdaHedge может применяться в условиях неограниченных одношаговых потерь экспертов. Алгоритм Fixed-Share несет потери, не превосходящие (с точностью до некоторой величины, называемой регретом) потери наилучшей комбинации экспертов, произвольным образом распределенных по интервалу прогнозирования. При этом единственным фактором, влияющим на величину регрета, является то, что число экспертов в такой комбинации не должно быть слишком большим. Существенная особенность реализации алгоритма AdaHedge заключается в том, что его основной параметр – параметр обучения – вычисляется адаптивно в процессе работы алгоритма (в режиме онлайн). Эта особенность определяет численную устойчивость алгоритма в условиях быстро меняющегося лидерства экспертных стратегий. Метод Fixed-Share обычно формулируется для постоянного параметра обучения. В данной работе метод Fixed-Share реализован для переменного параметра обучения, что позволило рассматривать его в комбинации с алгоритмом AdaHedge и получить оценку регрета комбинированного алгоритма. Важным для приложений преимуществом алгоритма AdaHedge является то, что он не требует ограниченности потерь экспертных стратегий, и оценка его регрета проведена в отсутствие этих ограничений. Заметим также, что в рамках данного подхода не делается никаких стохастических предположений об источнике исходных данных. Все оценки регрета даются в терминах минимаксного типа.

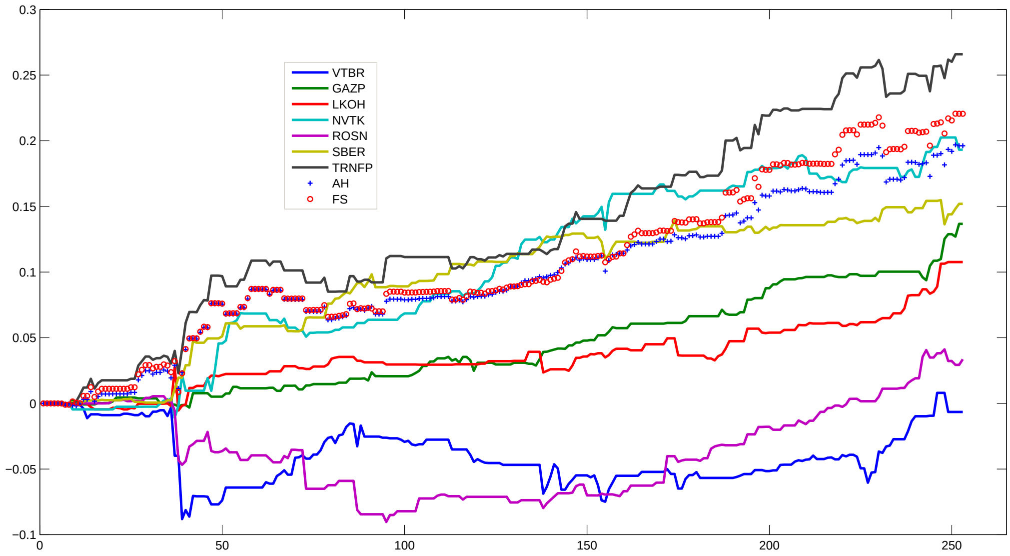

Рис. 4. Графики накопленных доходов от виртуальной игры на основе акций ММВБ. Сплошными линиями показаны кумулятивные суммы доходов от независимой торговли по каждому из инструментов. Маркерами показаны результаты смешивания методом AdaHedge (+++++) и Fixed-Share (ooooo). Время на оси абсцисс отображено в днях работы рынка.

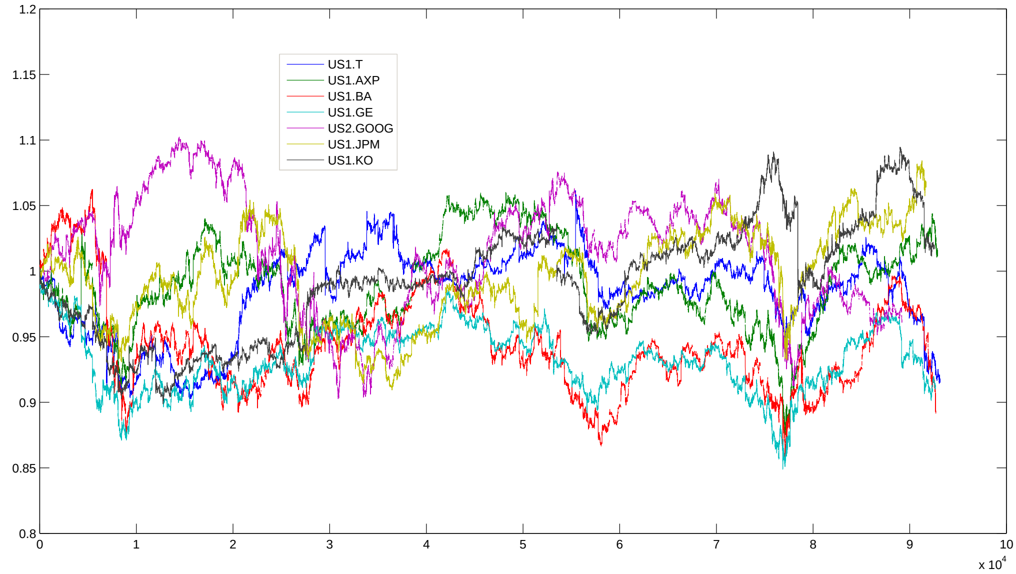

Рис. 5. Графики изменения нормированных цен 7 акций биржи BATS США, использованных в экспериментах.

Результаты численных экспериментов по смешиванию экспертных решений с помощью предложенных алгоритмов, проведенных на “простых” данных с небольшим количеством экспертов, показали высокую степень адаптации алгоритмов AdaHedge и Fixed-Share, при этом метод Fixed-Share, как правило, быстрее адаптируется к изменяющимся условиям. В экспе-

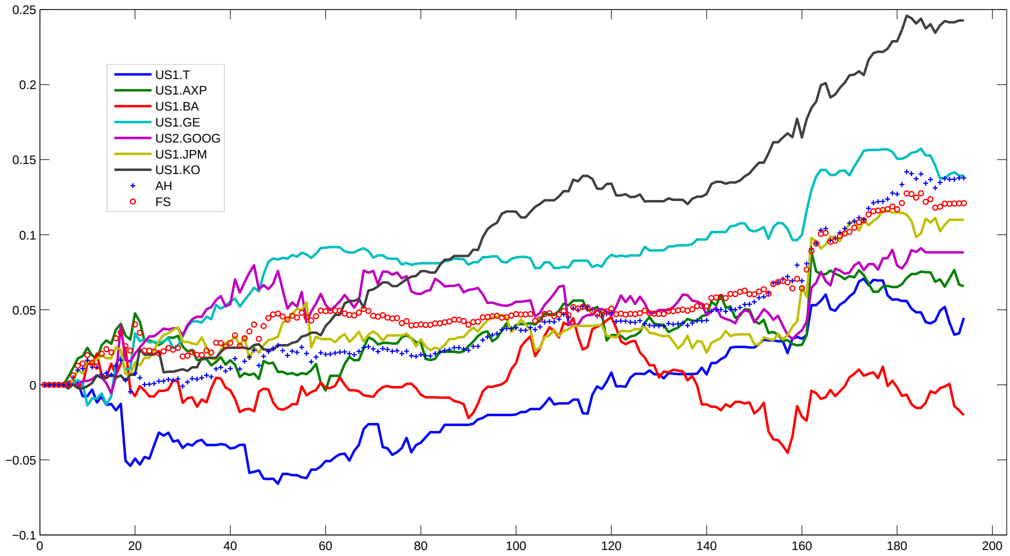

Рис. 6. Графики накопленных доходов от виртуальной игры на основе 7 акций биржи BATS США. Сплошными линиями показаны кумулятивные суммы доходов от независимой торговли по каждому из инструментов. Маркерами показаны результаты смешивания методами AdaHedge (+++++) и Fixed-Share (ooooo).

риментах на реальных данных в условиях, когда потери экспертов на одном шаге заранее не ограничены и имеют высокую волатильность оба этих метода показывают схожие результаты и для выявления границ их применимости необходимы дополнительные исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вьюгин, В.В., Трунов, В.Г. Построение комбинированных финансовых стратегий на основе универсального адаптивного прогнозирования. Автоматика и телемеханика 2016. No. 8. С. 136–158.

2. Вьюгин, В.В., Стельмах, И.А. Отслеживание наилучшей траектории экспертных решений с помощью алгоритма AdaHedge. Информационные технологии и системы 2016. 40-я междисциплинарная школа-конференция, 25 – 30 сентября, Репино, Санкт-Петербург, Россия http://itas2016.iitp.ru/pdf/1570282312.pdf.

3. Bousquet, O., Warmuth, M. K. Tracking a small set of experts by mixing past posteriors. The Journal of Machine Learning Research. 2003. V.3. P.31–47.

4. Cesa-Bianchi, N., Lugosi, G. Prediction, Learning, and Games. Cambridge University Press. 2006.

5. Freund, Y., Schapire, R.E. A Decision-Theoretic Generalization of On-Line Learning and an Application to Boosting. Journal of Computer and System Sciences. 1997. V.55. P.119–139.

6. Herbster, M, Warmuth, M. Tracking the best expert. Machine Learning. 1998. V.32(2). P.151–178.

7. Littlestone, N., Warmuth, M. The weighted majority algorithm. Information and Computation. 1994. V.108. P.212–261.

8. de Rooij, S., van Erven, T., Grunwald, D., Koolen, M. Follow the Leader. If You Can, Hedge If You Must. Journal of Machine Learning Research. 2014. V.15. P.1281–1316.

9. Vovk, V. Aggregating strategies. In M. Fulk and J. Case, editors, Proceedings of the 3rd Annual Workshop on Computational Learning Theory, 1990. P.371–383. San Mateo, CA, Morgan Kaufmann.

10. Vovk, V. A game of prediction with expert advice. Journal of Computer and System Sciences. 1998. V.56(2). P.153–173.

11. Vovk, V. Derandomizing stochastic prediction strategies. Machine Learning. 1999. V.35(3). P.247–282.

12. V'yugin, V., Trunov, V. Universal algorithmic trading. Journal of Investment Strategies. Winter 2012/13. V.2 (1). P.63–88.

13. V'yugin, V. Universal Algorithm for Trading in Stock Market Based on the Method of Calibration. Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI). 2013. 8139. P.53–67.

14. V'yugin, V. The Following the Perturbed Leader Algorithm and Its Application for Constructing Game Strategies. Journal of Communications Technology and Electronics. 2015. V.60 (6). P.647–657.

Adaptive Algorithm of Tracking the Best Experts Trajectory

V.V. V'yugin, I.A. Stelmakh, and V.G. Trunov

Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

In the Decision Theoretic Online Learning (DTOL) framework, we develop an adaptive aggregating algorithm which is a combination of the well known Fixed-Share method and AdaHedge algorithm. This (master) algorithm merges experts decisions (or predictions) in one optimal decision (prediction). The experts and the master algorithm suffer losses which are results of their decisions. An upper bound of adaptive regret (that is the difference between the cumulative losses of the master algorithm and the losses of the best combination of experts) is obtained for the adversarial case where no stochastic assumptions are made about underlined data. Results of numerical experiments for financial data are presented.

KEYWORDS: Prediction with Expert Advice, Decision Theoretic Online Learning, AdaHedge algorithm, Fixed-Share algorithm, Shifting regret, Adaptive learning rate.