Информационные процессы, Том 16, № 4, 2016, стр. 430–443.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Теорема о пересечении T- и H-поляр [1]

А.В. Савчик, П.П. Николаев

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
email: savsmail@gmail.com, nikol@iitp.ru

Поступила в редколлегию 16.12.2016

Аннотация—В работе исследуются свойства проективно инвариантных построений для овалов с полюсом, а именно — T- и H-поляр. Доказывается, что эти кривые пересекаются не менее чем в трех точках. Для доказательства рассматривается проективный аналог касательного расслоения H-поляры со вложением слоев и показывается, что T-поляра является сечением такого расслоения. Описывается топологическая структура прообраза H-поляры на касательном расслоении.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: проективные инварианты, топологические методы, T- и H-поляры.

1. ВВЕДЕНИЕ

На фоне достижений в области обучения машин, в теории распознавания образов до сих пор остаются нерешенными многие вопросы, связанные с аналитическими, точными методами распознавания. Например, при распознавании плоских участков объектов возникает подзадачколаа проверки проективной эквивалентности плоских замкнутых контуров. Как известно [1], иногда она может быть решена с опорой на проективно устойчивые точки контура. Каковыми являются, например, углы, точки касания с двойными касательными, точки перегиба. Даже при недостатке числа таких точек бывает возможно сформировать проективный базис или инвариантное описание самого контура посредством дополнительного проективно инвариантного построения. Предельно сложным случаем в этом ракурсе является контур без особых точек, или овал.

В работе рассматривается менее сложный случай овала с отмеченной внутренней точкой, являющийся частью более общей задачи исследования и описания проективно инвариантных свойств кривых семейства овалов. Варианты ее решения привлекают новые инструменты анализа кривых, названных H- и T-полярами [2], как развитие предложенного Плюккером подхода к анализу аффинных и проективных свойств алгебраических кривых (в терминах дуального и полюс-полярного соответствия), и включают предложения, обобщившие применение традиционных инструментов поляр и деклараций теоремы взаимности [3, 4].

Новое понимание термина «поляры» выявляется с введением особого типа точки — тестового полюса P — на плоскости овала, позиция которой во внутреннем поле фигуры и задает — вовне ее — поляры новых типов (T и H).

Точки E пересечения поляр (названные нами эллиптическими, поскольку для эллипсов поляры совпадают) служат для организации проективно инвариантного базиса распределенного вида (скользящего репера), не нуждающегося в оценке производных высокого порядка, требующей технически недостижимого уровня точности задания координат кривой. В силу означенных причин оценка минимального количества позиций точек E важна и как новый

[1] Работа выполнена в рамках поддержки РФФИ по проекту №16-07-00836.

результат теории, и в качестве критерия универсальности для решения задачи распознавания в схеме инвариантной репрезентации объекта «овал с выделенной внутренней точкой».

В работе доказывается сформулированная раннее в [5] гипотеза, что T- и H-поляры пересекаются хотя бы в 3 точках.

2. ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Определения T- и H-поляр даются в разделе 3.3 вместе с некоторыми свойствами. В части 6 показывается, как преобразовать H-поляру к более простому виду, что позволяет сформулировать теорему в общих терминах, не требующих поляр.

Доказательство опирается на топологические свойства определенного в разделе 3.1 «множества пар точка-касательная» — прообраза гладкой кривой на проективной плоскости при естественном отображении касательного расслоения этой кривой в содержащую её плоскость. В разделе 5 показывается, что топологически оно разбивается на несколько непересекающихся петель и одну тривиальную. В части 7 показывается, что из тора, где это множество находится, можно вырезать не менее чем 3 цилиндра, обладающих нужными свойствами. Границы такого цилиндра состоят из окружностей, соответствующих касательным к кривой. В этих цилиндрах множество пар точка-касательная будет образовывать нестягиваемое множество и, следовательно, обязательно пересекать сечение расслоения, идущее от одного основания к другому, как подробнее показано в разделе 8.

3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ

3.1. Множество пар точка-касательная

Пусть на проективной плоскости задана гладкая замкнутая кривая $f : S^1 \to \mathbb{R}P^2$. Обозначим через $l'(T)$ касательную к кривой в точке $T = f(t)$. Будем также использовать обозначение l' для параметра t кривой $l'(t) = l'(T)$.

Рассмотрим касательное расслоение f. В общем случае касательное расслоение гладкого многообразия состоит из объединения касательных пространств, или *слоев*. В данном случае слои вкладываются в плоскость как обычные касательные. Получаем множество всех касательных $\{(P, T) \mid P \in l'(T), T \in f\}$ с топологией касательного расслоения. Так как f — замкнутая кривая, такое расслоение является тривиальным и гомеоморфно цилиндру

$$T'f = \{(P, T) \mid P \in l'(T), T \in f\} \simeq \mathbb{R} \times S^1$$

Кривая расположена на *проективной* плоскости, поэтому добавим к касательной $l'(t)$ бесконечно удалённую точку $\infty_{l'(t)}$, соответствующую в $\mathbb{R}P^2$ прямой $l(t)$. Касательная станет проективной прямой.

$$l(t) = l'(t) \cup \infty_{l'(t)}$$

Рассмотрим проективный аналог касательного расслоения (далее просто касательное расслоение), в котором слои являются проективными прямыми. Касательное расслоение при этом станет гомеоморфно тору.

$$Tf = \{(P, T) \mid P \in l(T), T \in f\} \simeq \mathbb{R}P^1 \times S^1 \simeq S^1 \times S^1$$

Касательное расслоение естественным образом отображается в $\mathbb{R}P^2$.

$$g : (P, T) \mapsto P$$

Рассмотрим прообраз $S' = g^{-1}(f)$ кривой f при отображении g. Он состоит из пар точек кривой $(P, T), P = f(p), T = f(t)$, первая из которых лежит на касательной ко второй, $P \in l(T)$. В частности, этот прообраз содержит пары совпадающих точек $(T, T) \in S', T \in f$, соответствующих кривой f. Такие точки будем называть точками тривиальной прямой. Множество S' без тривиальной прямой будем называть множеством пар точка-касательная.

$$S = S' \setminus \{(T, T), T \in f\} = g^{-1}(f) \setminus \{(T, T), T \in f\}$$

Далее будет показано, что при достаточно общих ограничениях на кривую (конечное число точек нулевой кривизны, причем касательные в них не являются двойными касательными) S состоит из непересекающихся между собой петель (с выколотыми на тривиальной прямой точками).

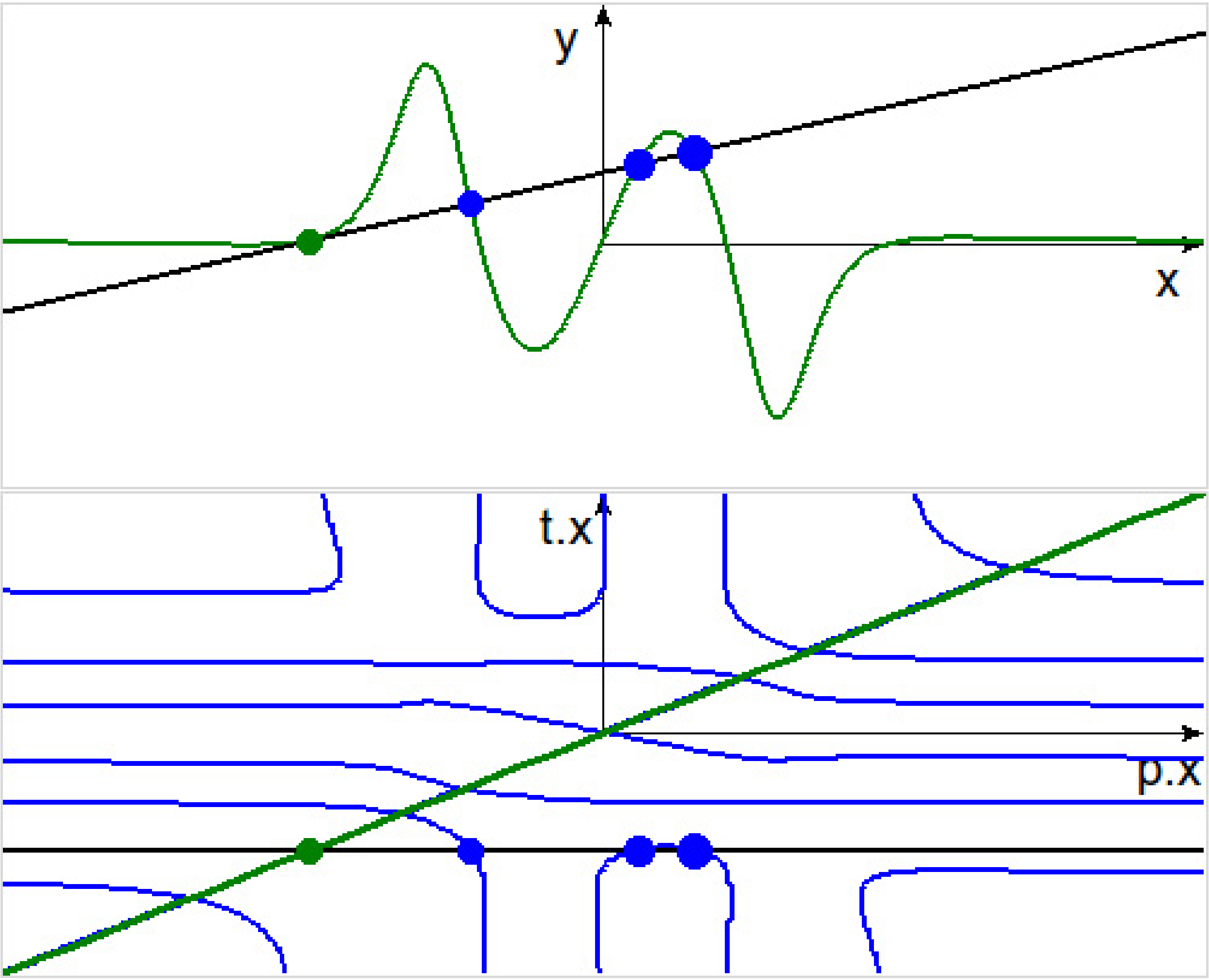


Рис. 1. Пример множества пар точка-касательная (снизу) для кривой типа «график функции». Кривая такого вида используется в доказательстве. В этом случае параметризовать точки можно их абсциссами $p_x, t_x \in \mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Иллюстрация множества пар точка-касательная выполнена с помощью программы [6].

В доказательстве сформулированной далее теоремы про пересечение поляр кривая f является не произвольной гладкой замкнутой кривой, а графиком гладкой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с общей асимптотой при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ и не содержащей вертикальных касательных.

В таком случае естественно параметризовать кривую её x-координатой, $x \in \mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Точки на касательных $l(t)$ также естественно параметризовать x-координатой.

Точки (P, T) расслоения Tf в таком случае задаются парой координат p_x, t_x на плоскости $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$. Точки тривиальной прямой при этом будут задаваться равенством $p_x = t_x$. На рис. 1 приведён пример множества S пар точка-касательная в таких координатах для некоторой функции.

3.2. Проективно инвариантные построения

Под проективно инвариантными построениями (точек, кривых) будем подразумевать построения, которые могут быть корректно определены по проективной структуре плоскости, но не по конкретной плоской карте. Формально говоря, построение $G : S_1 \to S_2$ - проективно инвариантное, если для любого проективного преобразования плоскости P и любого $s_1 \in S_1$ верно $G(P(s_1)) = P(G(s_1))$.

Так, проективно инвариантными построениями не являются середина отрезка, нормаль к кривой в точке и т. д. Касательная же к кривой в точке, дополнение трёх коллинеарных точек до четвёрки с фиксированным двойным отношением — являются.

3.3. T- и H-поляры

Рассмотрим овал (гладкую замкнутую несамопересекающуюся кривую, ограничивающую строго выпуклую конечную область в некоторой плоской карте) на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Пусть P — внутренняя точка, или полюс. Для каждой хорды AB, проходящей через P рассмотрим две точки (см. рис. 2):

- точка H на прямой AB, находящаяся в гармоническом отношении с A,P,B (двойное отношение $(A, B, P, H) = -1$);
- точка T — пересечение касательных к овалу в точках A и B.

Множество точек H (для всех проходящих через P хорд AB) будем называть H-полярой, точек T — T-полярой. Хотя отдельные точки H и T зависят от выбора хорды, поляры зависят только от овала и полюса. Построенные поляры проективно инвариантны, так как касательные и двойные отношения сохраняются при проективных преобразованиях.

Замечание. Можно также показать, что T-поляра и H-поляра — нестягиваемые замкнутые кривые на проективной плоскости, что гарантирует нечетное (с учётом кратностей), и, следовательно, ненулевое число точек пересечения. В приведенном ниже доказательстве нестягиваемость поляр не используется.

Для эллипса обе поляры совпадают и являются прямой, называемой просто полярой. Для произвольного овала это не так, поэтому были определены отдельно T- и H-поляры [5].

Между полярами имеется неожиданная зависимость. Пусть хорде AB соответствует точка H на H-поляре и точка T на T-поляре. Тогда касательная к H-поляре в точке H проходит через точку T, $T \in l(H)$ (см. рис. 3). Иными словами, T-поляра является сечением (проективного) касательного расслоения к H-поляре.

Доказательство. Т.к. построения поляр — проективно инвариантны, можно применить проективное преобразование и свести задачу к удобному случаю, когда отмеченный полюс P находится в середине хорды AB, а касательные в точках A и B перпендикулярны хорде AB.

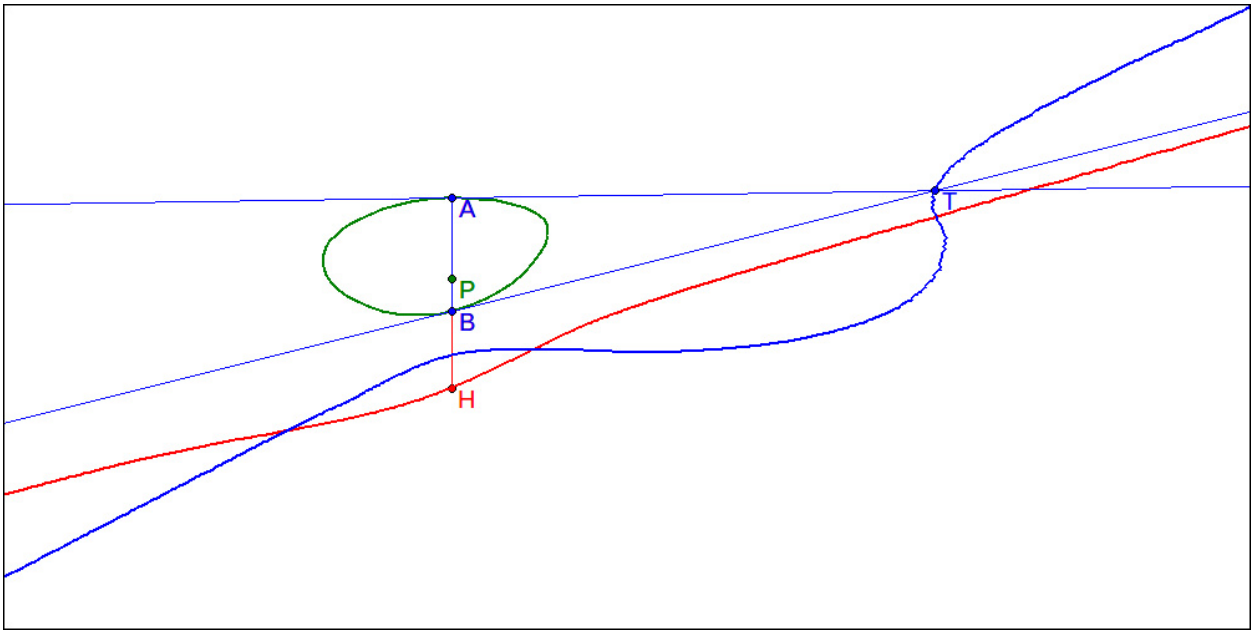


Рис. 2. Построение T и H поляр по овалу с внутренней точкой P.

Рассмотрим часть Н-поляры, построенную по близким к AB хордам. В первом порядке малости можно считать, что Н-поляра строится по точкам A и B, которые движутся не по овалу, а по касательным. Но в таком случае $PA = PB$. Значит, точка, дополняющая P, A, B до гармонической четверки, находится на бесконечно удаленной прямой. Следовательно, бесконечно удаленная прямая совпадает с H-полярой в первом порядке, т.е. является касательной. С другой стороны, на этой прямой находится и точка T пересечения параллельных друг другу касательных к овалу в точках A и B.

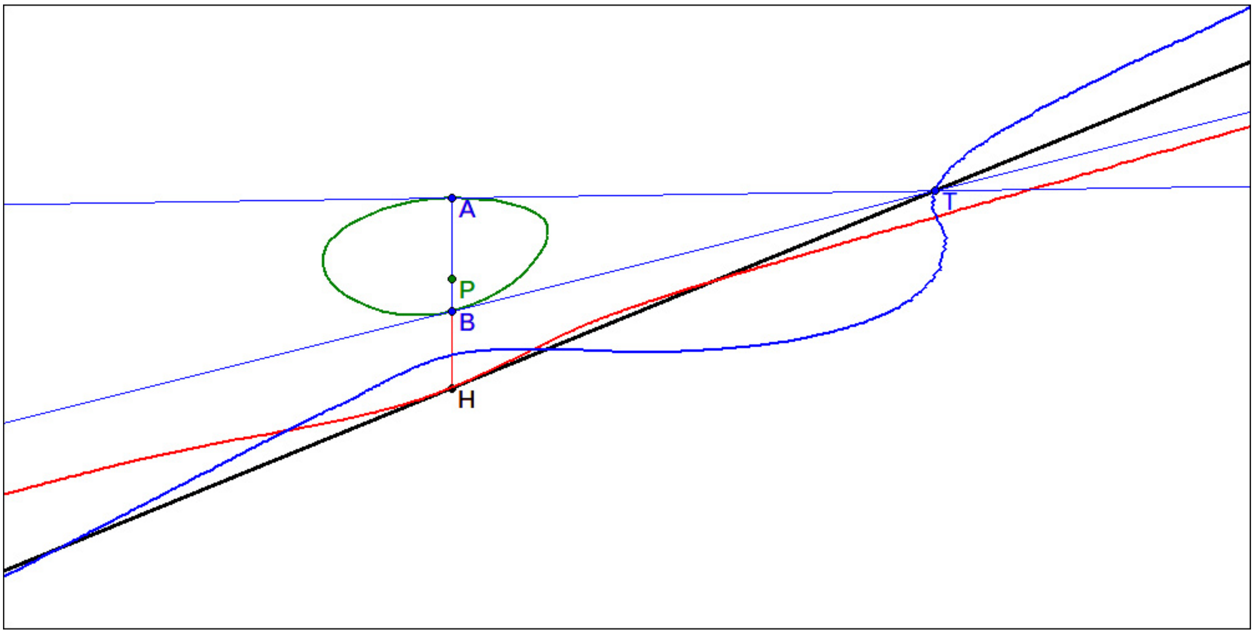


Рис. 3. Связь между полярами. Касательная к H-поляре в точке H проходит через точку T.

4. ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМЫ

Теорема 1 (о пересечении поляр). *Пусть даны овал (гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая, ограничивающая строго выпуклую область на некоторой плоской карте) на проективной плоскости и полюс (точка внутри овала). Пусть также у построенной по ним H-поляры есть лишь конечное число точек нулевой кривизны, и касательные в них не являются двойными касательными.*

Тогда H и T поляры пересекаются не менее чем в 3 точках (на проективной плоскости).

Эту теорему, как будет показано в разделе 6, можно свести к более общей формулировке, не требующей привлечения поляр.

Теорема 2 (формулировка в общих терминах). *Пусть дана гладкая несамопересекающаяся замкнутая кривая $h : S^1 \to \mathbb{R}P^2$ на проективной плоскости с заданной системой координат. Пусть h на некоторой плоской карте (вне бесконечно удалённой прямой) является графиком функции (т.е. содержит ровно одну точку на каждой вертикали). Пусть на (проективном) касательном расслоении к h взято гладкое сечение t. Иными словами, на каждой касательной к $T = h(t)$ выбрано по точке P так, что выбранные точки образуют замкнутую кривую $t(h)$ на проективной плоскости. Пусть также выполнены условия:*

- *у h как у графика функции есть лишь одна асимптота (общая для $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$) и нет вертикальных касательных (производная конечна);*
- *h имеет лишь конечное число точек нулевой кривизны и касательные в них не являются двойными касательными (при этом она разбивается на конечное число строго выпуклых кусков);*
- *при естественном отображении g касательного пространства в $\mathbb{R}P^2$ сечение t переходит в несамопересекающуюся кривую; сечение t не пересекается с базой расслоения (иными словами, кривая t получена выбором на каждой касательной $l(T)$ одной точки $P \neq T$).*

Тогда кривые t и h пересекаются не менее чем в трёх точках на проективной плоскости.

Замечание. Последнее условие на сечение t требуется, чтобы гарантировать 3 точки пересечения. В противном случае теоретически возможно меньшее число пересечений с кратностями.

5. ЛЕММА О РАЗБИЕНИИ МНОЖЕСТВА ПАР ТОЧКА-КАСАТЕЛЬНАЯ НА ПЕТЛИ

Пусть дана гладкая замкнутая кривая $f : S^1 \to \mathbb{R}P^2$ на проективной плоскости. Тогда, в общем случае, её множество $S \subset Tf$ пар точка-касательная (P, T) разбивается на множество непересекающихся петель (с выколотыми точками на тривиальной прямой).

Под общим случаем подразумевается, что у кривой есть лишь конечное число точек нулевой кривизны и касательные в них не являются двойными касательными. В этом случае кривая разбивается на конечное число выпуклых участков, соединённых точками перегиба.

Доказательство состоит в анализе общего и различных вырожденных случаев положения пар $(P, T) \in S$. Для анализа случаев удобно использовать локальную систему координат x, y, в которой оси не параллельны касательным в точках P и T. В таком случае точки P, T, а также точки касательного расслоения $(P', T) \in Tf$ задаются своими x-координатами $p = P_x, t = T_x, (p', t) = (P'_x, T_x)$ соответственно.

В общей точке (паре P, T) построенного множества S точка T расположена на выпуклом участке кривой f, касательные в точках T и P не параллельны. В окрестности такой пары S выглядит, как кривая, где p неявно зависит от t (рис. 4).

Кроме общего случая возможны следующие.

– Касательные параллельны и, следовательно, совпадают, т.к. P их общая точка. По условию, в таком случае P и T не являются точками перегиба и находятся на участках выпуклости. В этом случае через точки в окрестности точки P проходит ровно одна касательная из близких к T точек кривой. В окрестности пары $(t,\, p)$ множество S является кривой, где t зависит от p. На каждом из участков по разные стороны от P зависимость монотонная (рис. 5).
– Отличная от P точка T расположена в точке перегиба, касательные различны (по условию леммы). В этом случае касательные из близких к T точек кривой пересекают кривую по одной точке в окрестности P. Множество S в окрестности $(t,\, p)$ является кривой, где p зависит от t, монотонно на каждом из участков по разные стороны от T (рис. 6, 7).

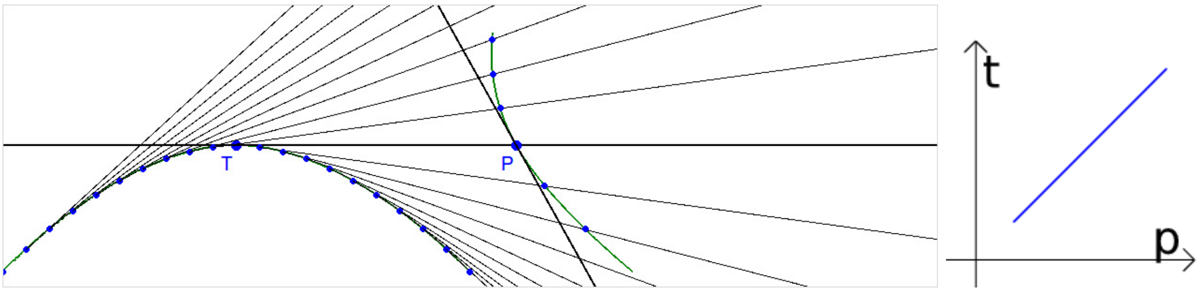


Рис. 4.

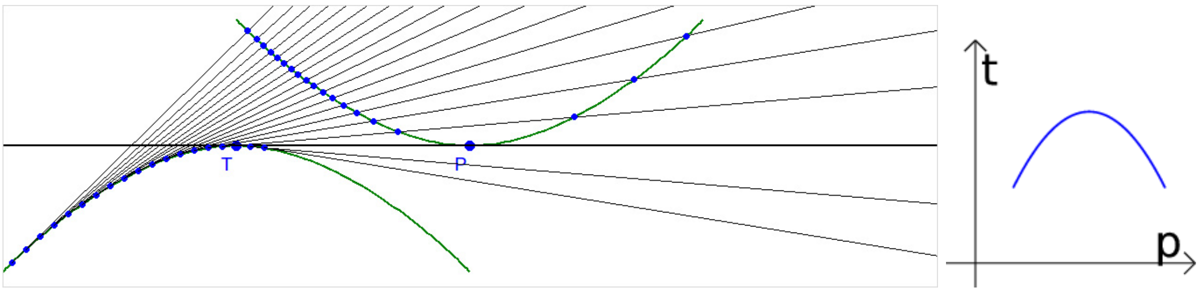


Рис. 5.

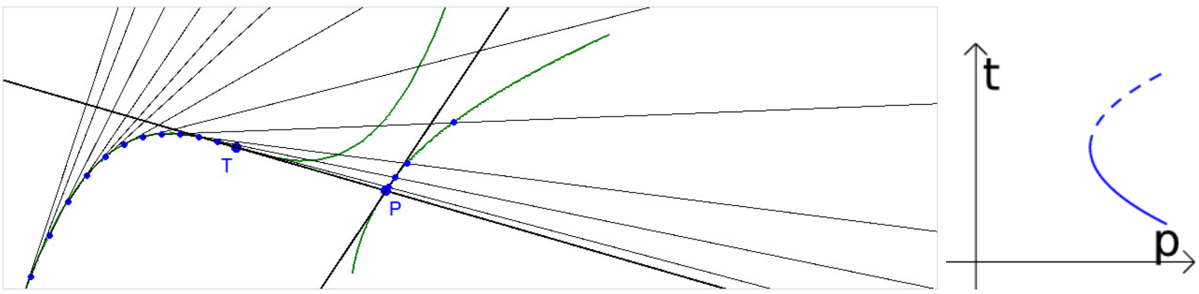


Рис. 6.

– Точка $T = P$ расположена в точке перегиба. Соответствующая пара $(t,\, p)$ не принадлежит множеству S, т.к. точки тривиальной прямой $t = p$ по определению из него выкинуты. Однако она является предельной точкой S, и поэтому должна быть рассмотрена. Множество пар в окрестности этой точки состоит из двух участков кривой. Каждой касательной в

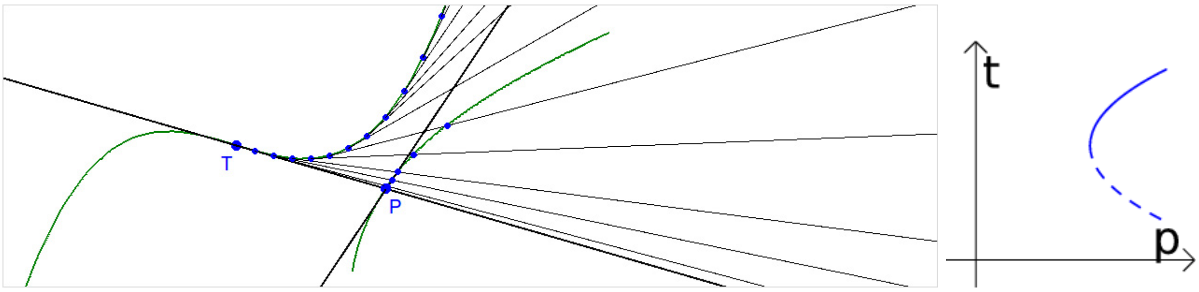


Рис. 7.

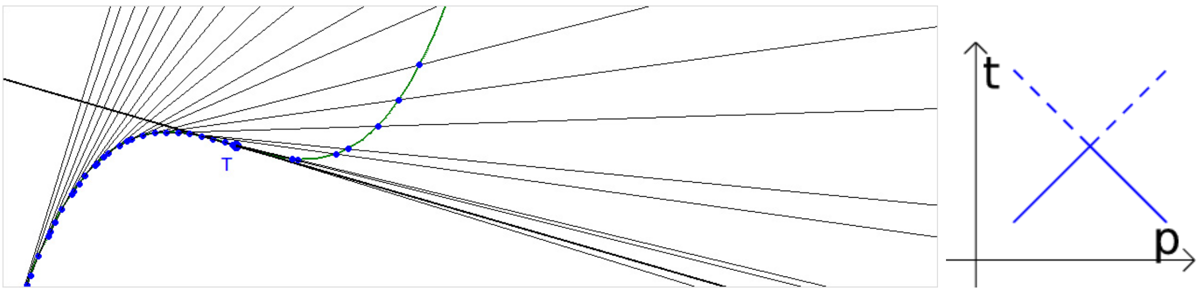


Рис. 8.

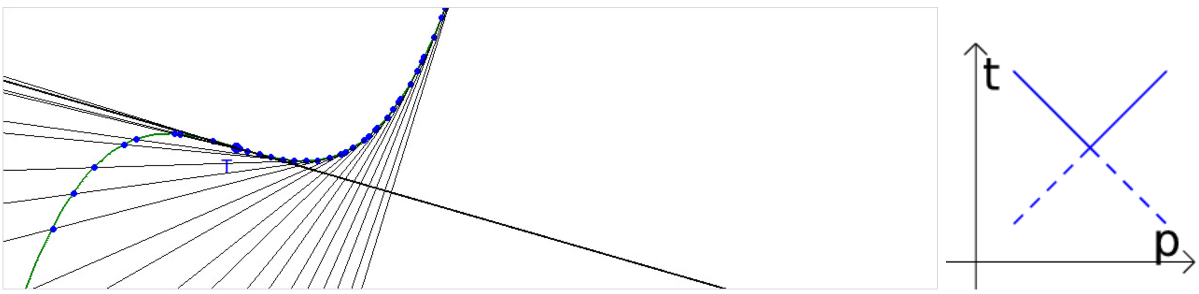


Рис. 9.

(проколотой) окрестности точки T непрерывно соответствует ровно одна точка пересечения с кривой в окрестности точки T (рис. 8, 9).

Этого достаточно для доказательства леммы. Действительно, известно, как ведёт себя множество S в любой достаточно малой окрестности произвольной пары $(P, T) \in Tf$ (кроме рассмотренных случаев есть точки на тривиальной прямой, соответствующие участкам выпуклости и точки вне S и тривиальной прямой; в окрестностях таких точек нет точек S). В каждой из них S если присутствует, то является участком кривой, возможно с выколотой точкой. В силу компактности тора Tf, он покрывается конечным числом таких окрестностей.

Следовательно, множество S пар точка-касательная разбивается на непересекающиеся петли (с выколотыми точками).

6. ЛЕММА О ПРЕОБРАЗОВАНИИ Н-ПОЛЯРЫ

Назовём *простым видом* кривой на проективной плоскости следующий:

– график некоторой функции, имеющий горизонтальную асимптоту (общую для $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$) и не содержащий вертикальных касательных (производная конечна);
– бесконечно удаленная точка, соответствующая горизонтальным прямым.

Существует проективное преобразование, переводящее Н-поляру к простому виду. Причем в бесконечно удаленную точку может быть переведена произвольная.

6.1. Доказательство

Рассмотрим полюс и произвольную точку на Н-поляре.

Известно, что любые 4 неколлинеарные точки на проективной плоскости можно перевести в любые другие такие 4 точки с помощью проективного преобразования. Следовательно, эти 2 точки можно перевести в произвольные две точки проективной плоскости. Переведем их в бесконечно удаленные точки, соответствующие вертикальной и горизонтальной прямым соответственно.

Такое преобразование приводит Н-поляру к простому виду. Действительно:

– Любая вертикальная прямая является образом прямой, проходящей через полюс. Однако на любой такой прямой была ровно одна точка Н-поляры. Следовательно, полученная кривая является графиком (в не бесконечно удаленных точках).
– Касательная к Н-поляре не может проходить через полюс (т.к. проходит через точку T, а точки P, T, H не лежат на одной прямой). Следовательно, касательная к полученной кривой не может быть вертикальной.
– Бесконечно удаленная прямая также проходит через образ полюса. Следовательно, на кривой ровно одна бесконечно удаленная точка, а именно точка, соответствующая горизонтальным прямым (по построению).
– Касательная в выбранной точке Н-поляры переходит при таком преобразовании в асимптоту (т.к. точки, близкие к выбранной, лежат между близкими к касательной прямыми).

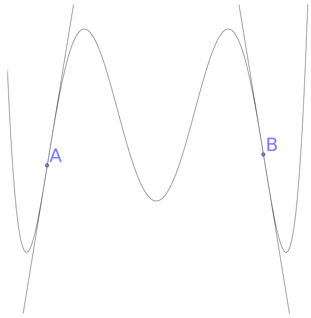
7. ЛЕММА О 3 ХОРОШИХ ДУГАХ

7.1. Определение хорошей дуги

Пусть дана дуга AB гладкой кривой h. Назовём точку P *нечётной (чётной)*, если количество таких T на дуге AB, что касательная к T проходит через P, нечётно (четно).

Назовём дугу AB гладкой кривой h *хорошей*, если

1. касательные в точках A и B не пересекаются (нетривиально) с h;
2. почти все (кроме конечного числа) точки кривой h нечётные.



Для того, чтобы дуга была хорошей достаточно, чтобы выполнялось условие 1 и следующее условие вместо условия 2:

3 Существует простой вид h, в котором дуга AB не содержит бесконечно удаленных точек и «касательные направлены в разные стороны»: производные в точках A и B не равны нулю и имеют разный знак.

Действительно, касательная в точке T делит плоскость на две полуплоскости и гладко меняется с движением T от A к B. Рассмотрим, в какой полуплоскости находится точка P. Моменты смены полуплоскости однозначно соответствуют моментам прохождения касательной через P за двумя исключениями. Первое: точки, лежащие на касательной в точке перегиба. Таких точек не более, чем конечное число на кривой h, этот случай не влияет на четность дуги. Второе: при $P = T \in AB$ касательная проходит через точку, хотя полуплоскость с точкой не меняется. Это меняет четность точек на дуге AB.

Точки P на дуге AB лежат в одной полуплоскости относительно касательных в точках A и B. Точки кривой вне дуги — в разных. Следовательно, все, кроме не более чем конечного числа, точки кривой — нечётные.

Замечание. Т.к. четность точки определяется сменой плоскости, почти все точки кривой являются нечётными относительно всей кривой (достаточно рассмотреть дугу $-\infty, +\infty$, касательные в $\pm\infty$ совпадают).

Замечание. Для любой дуги, обладающей свойством 1, либо почти все точки чётные, либо почти все нечётные.

7.2. Лемма

Лемма. *На Н-поляре, можно выбрать не менее чем 3 попарно непересекающихся (не более, чем по точке) хороших дуги.*

Доказательство. Пусть X - произвольная точка, в которой H-поляра локально выпукла. Рассмотрим простой вид, в котором X находится на бесконечности и соответствует горизонтальным прямым. В этом виде касательная в точке X является горизонтальной асимптотой. Заметим, что имеются точки H-поляры по обе стороны этой асимптоты. Действительно, в силу выпуклости, близкие к касательной прямые, проходящие через X, пересекают H-поляру. Такие прямые в выбранном простом виде представляют собой горизонтальные прямые по разные стороны от асимптоты, причем на них есть точки H-поляры.

Рассмотрим минимум $X1 = (x_{min}; y_{min})$ и максимум $X2 = (x_{max}; y_{max})$ Н-поляры как графика функции f в выбранном простом виде (см. рис. 10). Без ограничения общности, $x_{min} < x_{max}$. Пусть $a = \underset{(-\infty, x_{min})}{\operatorname{argmin}} f'(x)$, $b = \underset{(x_{min}, x_{max})}{\operatorname{argmax}} f'(x)$, $c = \underset{(x_{max}, \infty)}{\operatorname{argmin}} f'(x)$. Тогда дуги AB и BC (где $A = (a, f(a))$, аналогично с B и C) H-поляры — искомые.

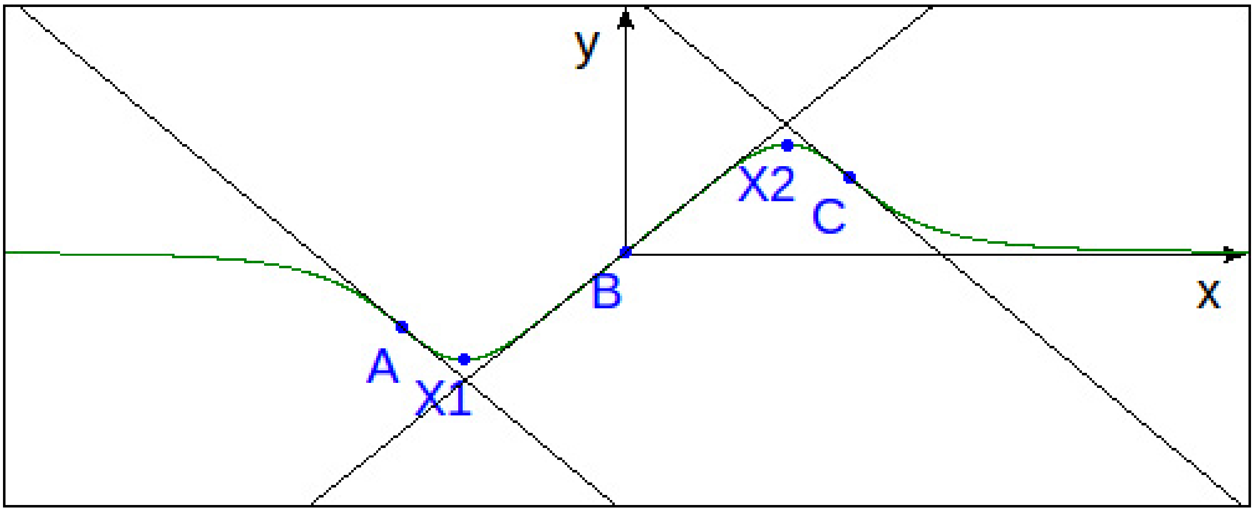


Рис. 10. Построение хороших дуг

Третьей искомой дугой является оставшаяся дуга CA (содержащая бесконечно удаленную точку). Действительно, почти все (кроме не более, чем конечного числа) точки кривой являются нечётными относительно AB и относительно BC. Однако почти все точки кривой являются также нечётными относительно всей кривой. Следовательно, почти все точки являются нечётными относительно CA (чтобы сумма была нечётной). Значит, CA — хорошая дуга.

8. ЛЕММА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ

Пусть дано гладкое сечение касательного расслоения (в проективном смысле) хорошей дуги AB и его образ t при естественном отображении $g : T(AB) \to t$. Тогда кривая t пересекается с h (если сечение не пересекало базу AB, то даже с $h \setminus \{A, B\}$)

8.1. Доказательство

Зафиксируем систему координат, в которой h имеет простой вид, в частности является графиком. В таком случае точки кривой задаются координатами.

$$A = h(a_x), B = h(b_x),\ a_x, b_x \in \mathbb{R}P^1$$

Также координатами можно задавать точки касательного пространства, с помощью абсциссы точки касания T и абсциссы точки на касательной, рассматриваемой как часть проективной плоскости.

$$(P, T) = (l_T(p_x), h(t_x)) \in Th,\ p_x, t_x \in \mathbb{R}P^1$$

Рассмотрим все точки h на всех касательных к дуге AB.

$$S = \{(P, T) = (p_x, t_x) \mid P \in l(T), t_x \in [A_x, B_x], P = h(p_x), T = h(t_x)\}$$

Множество S состоит из соответствующей дуге AB части множества пар точка-касательная и отрезка тривиальной прямой (см. рис. 11).

$$S = S' \cup I$$

$$S' = \{(P, T) \in S \mid P \neq T\} \subset T(AB)$$

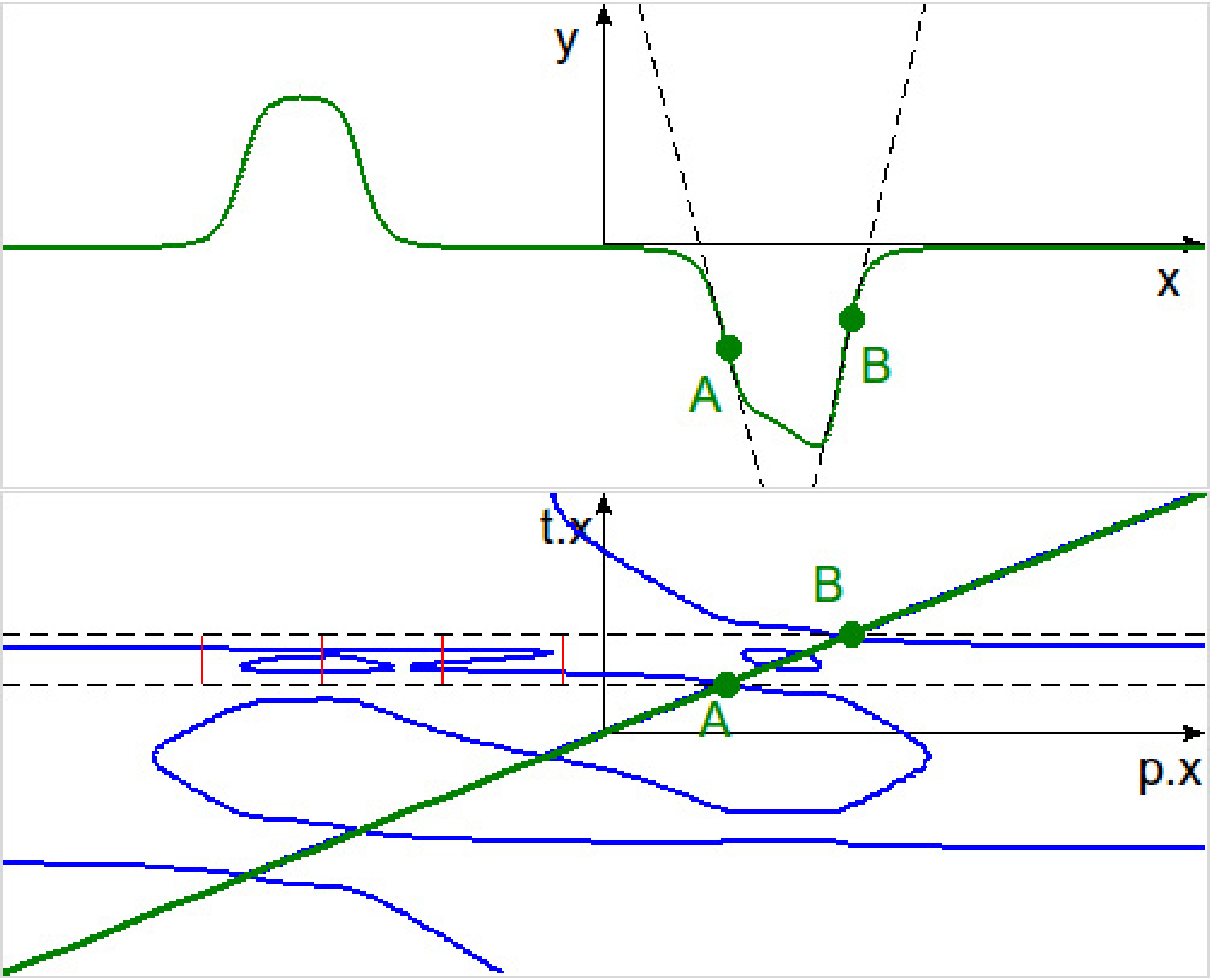


Рис. 11. Пример множества пар точка-касательная (снизу) для кривой h (сверху). Между пунктирными линиями находится множество S, соответствующее касательным к точкам на дуге AB. В данном примере S состоит из двух стягиваемых петель, отрезка AB и кривой AB (левая и правая части склеиваются на бесконечности). Отрезок AB и кривая AB образуют вместе нестягиваемую петлю. Вертикальные отрезки соответствуют срезам. Количество точек множества S в срезах нечетно.

$$I = \{(P,P) \mid P = h(p_x), p_x \in [A_x, B_x]\}$$

Так как дуга AB — хорошая, почти все точки кривой нечётны относительно S, то есть S содержит нечётное количество точек (p_x, t_x) при каждом фиксированном p_x. Будем называть такую часть произвольного множества M *срезом.*

$$M[p_0, *] = \{(p_x, t_x) \in M \mid p_x = p_0\}$$

Заметим, что S разбивается на петли. Действительно, выше показано, что множество пар точка-касательная разбивается на петли. Следовательно S' разбивается на петли, не считая участка петли, разрезанного точками перегиба A и B. Соединив её концы отрезком AB тривиальной прямой, получим еще одну петлю.

Рассмотрим цилиндр, в который вкладывается $S \subset T(AB)$. В координатах получаем $S \subset \mathbb{R}P^1 \times [A_x, B_x]$. Заметим, что t - путь между окружностями-основаниями в данном цилиндре (не проходящий через A и B, если сечение не пересекает базу расслоения).

Пусть ни одна из петель не пересекает t (иначе утверждение доказано). В таком случае, любая петля стягиваема (т.к. вкладывается в цилиндр, разрезанный по образующей t, что стягиваемо) и, следовательно, имеет почти везде четное количество точек в срезах (несложно увидеть, проектируя на нижнее основание и разбивая петлю на участки между пересечениями среза). Приходим к противоречию с нечетностью числа точек в срезах. Следовательно, t пересекает S , петля нестягиваема.

9. ДОКАТАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

В силу лемм, доказаны теорема 2 (формулировка в общих терминах) и теорема 1 (о пересечении поляр).

10. ОТКРЫТЫЙ ВОПРОС

Открытым остается вопрос, можно ли обобщить теорему 2 с графика функции до произвольной гладкой нестягиваемой кривой на проективной плоскости.

Иными словами, верно ли, что образ сечения t касательного расслоения к гладкой нестягиваемой кривой h на проективной плоскости обязательно пересекает кривую h не менее чем в трёх точках, при каких-либо общих ограничениях на кривую h и сечение t.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для общего вида гладкой замкнутой кривой на проективной плоскости рассмотрено специального вида касательное расслоение, слои которого являются проективными прямыми и вкладываются в плоскость кривой. Показано, что прообраз исходной кривой на своём расслоении разбивается на одну тривиальную петлю и непересекающиеся между собой петли. Для общего вида кривых типа «график функции» сформулирована и доказана теорема, что точек пересечения кривой и образа непересекающего базу сечения не менее чем 3.

Показано, что T-поляра является образом не пересекающего базу сечения касательного расслоения H-поляры. Сформулирована и доказана теорема, что T- и H-поляры пересекаются не менее чем в 3-х точках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаев П. П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. I. Анализ и инвариантное отображение составных овалов. *Сенсорные системы*, 2011, т. 25, № 2, стр. 118–137.

2. Николаев П. П. Проективно инвариантное распознавание составных овалов. *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2010, № 4, стр. 3–15.

3. Акимова Г. П., Богданов Д.С., Куратов П.А. Задача проективно инвариантного описания овалов с неявно выраженной центральной и осевой симметрией и принцип двойственности Плюккера. *Труды ИСА РАН*, 2014, т. 64, № 1, стр. 75–83.

4. Савелов А. А. *Плоские кривые. Систематика, свойства, применения.* М.: ГИ Ф-МЛ, 1960.

5. Николаев П. П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. II. Овал в композиции с дуальным элементом плоскости. *Сенсорные системы*, 2011, т. 25, № 3, стр. 245–266.

6. Программа для построения множества пар точка-касательная для графика функции `https://github.com/savfod/ptset` .

The Theorem of T- and H- Polars Intersections Count

Savchik A., Nikolaev P.

T- and H- polars are oval generalizations of polar line. We consider polars as projective invariants for oval and pole (inner point) configuration in projective plane. In paper we prove that there are at least three point of T- and H- polars intersections. The prove is based on tangent bundle of special type for curve in projective plane, tangent spaces of which are embedded in curve plane. Topological structure of curve preimage in it's tangent bundle is described.

KEYWORDS: projective invariants, topological methods, T- and H-polars.