

Выпуклая аппроксимация пространства дизайна в задаче оптимизации крыла самолета¹

А.А.Бедринцев, В.В.Чепыжов

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 01.04.2016

Аннотация—В настоящей статье построена выпуклая аппроксимация пространства дизайна на подмодели крыла самолета, которая описывает множество его профилей в выбранных сечениях. В известной модели на параметры сечений накладываются ограничения, задающие невыпуклое множество. При моделировании крыла применяются методы снижения размерности, которые позволяют с некоторой погрешностью описывать крыло меньшим числом параметров. В статье предлагается подход, позволяющий в рамках той же точности заменить ограничения, которые задают невыпуклое множество, на систему неравенств, описывающих выпуклый многогранник. В полученной модели система ограничений для каждого сечения может быть заменена на одно ограничение в форме экстремального эллипсоида, который строится на основе выборки имеющихся эталонных профилей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: профиль крыла, метод главных компонент, суррогатное моделирование, снижение размерности, выпуклое программирование, экстремальные эллипсоиды.

1. ВВЕДЕНИЕ

С развитием вычислительной техники появились новые методы математического моделирования, которые стали востребованными на этапе концептуального проектирования технических объектов. При разработке технических решений стала актуальной задача оптимизации геометрической формы объекта, для численного решения которой ранее не было достаточно эффективных средств.

Крыло самолета как трехмерный объект может быть задано с помощью множества точек на трехмерной сетке. Для этого выбирается набор параллельных плоскостей, в которых с помощью двумерных координат точек описывается контур сечения объекта данной плоскостью. Такое описание X необходимо для проведения аэродинамических расчетов с помощью CFD-систем (Computational Fluid Dynamics software). Размерность вектора X может достигать сотен тысяч. Отдельные величины из такого описания не являются независимыми. Без учета других компонент X каждое значение из X не имеет ясного геометрического смысла.

Стоящая перед инженерами задача состоит в подборе оптимальной конфигурации крыла с точки зрения некоторой характеристики $f(X)$ (например, коэффициента сопротивления или подъемной силы), вычисляемой с помощью CFD-систем на основе трехмерного описания X :

$$\min_{X \in \Omega} f(X) ,$$

где Ω – пространство дизайна – множество допустимых сеточных описаний крыла самолета. Расчеты с помощью CFD-систем занимают достаточно большое время. Ввиду большой размерности сеточного описания и вычислительной сложности функции $f(X)$ такая задача не может быть эффективно решена.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Размерность трехмерного сеточного описания X крыла самолета может быть уменьшена с помощью модели крыла, которая служит для задания крыла небольшим числом *модельных* переменных x [1–3]. Модель содержит *вычисляемые характеристики* и правила их вычисления и задает область их валидности. Также модель формулирует процедуру построения трехмерного сеточного описания X крыла по модельным параметрам x [4]. Перед запуском расчета с помощью CFD-системы для крыла, заданного набором модельных параметров x , строится трехмерная сетка $X(x)$, и для вектора X запускается расчет целевой функции $f(X) = f(X(x)) = \hat{f}(x)$. Описание крыла с помощью модельных параметров x сужает множество допустимых конфигураций крыла до некоторого класса. В рамках этих ограничений предыдущая задача оптимизации сводится к задаче

$$\min_{x \in \omega} \hat{f}(x) = \min_{x \in \omega} f(X(x)) \quad ,$$

которая решается в пространстве дизайна ω меньшей размерности, где отдельные координаты и ограничения, задающие множество допустимых значений, имеют прозрачный геометрический смысл. Размерность модельного описания крыла составляет несколько сотен, что еще не позволяет эффективно решать задачу оптимизации функционала, вычисляемого с помощью CFD-системы.

В последнее время начало развиваться новое направление в анализе данных – суррогатное моделирование [5–8]. Одно вычисление функции $\hat{f}(x)$ может занимать до нескольких минут или часов, а в связи с высокой размерностью пространства дизайна ω может потребоваться большое количество этих вычислений. Пусть имеется база данных $\Phi = \left\{ \left(x_i; \hat{f}_i = \hat{f}(x_i) \right) \right\}_{i=1}^N$ проведенных вычислительных экспериментов или физических измерений. Используя эти данные, строится функция $f_s(x)$, которая в некоторой метрике близка к функции $\hat{f}(x)$. Функцию $f_s(x)$ называют суррогатной моделью для функции $\hat{f}(x)$ [9]. Вычисления с помощью суррогатной модели выполняются пусть и с небольшой погрешностью, но за значительно меньшее время.

Другим направлением суррогатного моделирования является снижение размерности. На практике часто данные лежат вблизи некоторого многообразия меньшей размерности. Задача снижения размерности состоит в построении процедуры сжатия исходного вектора (проецирования на это многообразие) и восстановления исходного описания. При последовательном сжатии и восстановлении возникает ошибка, однако это позволяет с допустимой точностью описывать объекты сравнительно небольшим числом параметров [10, 11]. При использовании этих методов размерность описания крыла самолета может быть снижена до нескольких десятков.

С помощью суррогатных моделей и снижения размерности стоящая перед инженерами задача сводится к оптимизации аппроксимированной функции в пространстве умеренной размерности:

$$\min_{\hat{x} \in \hat{\omega} = \{\hat{x} | C(\hat{x}) \leq 0\}} f_s(\hat{x}) \quad ,$$

где пространство дизайна $\hat{\omega}$ описаний \hat{x} объекта в сжатом пространстве задается с помощью набора функциональных или параметрических ограничений $C(\hat{x})$. Данные ограничения известны из предметной области, задают условия корректности описания геометрической формы объекта и учитывают условия его функционирования.

Функции $C(\hat{x})$ есть вычисляемые характеристики модели и в реальных задачах могут быть невыпуклыми, и, таким образом, система неравенств задаёт невыпуклое множество $\hat{\omega}$. Например, одной из самых информативных характеристик профиля крыла является максимальная толщина, вычисляемая как максимум разности ординат точек верхнего и нижнего контуров профиля, и на максимальную толщину профиля накладываются ограничения снизу.

Чтобы построить суррогатную модель $f_s(\hat{x})$, необходимо спланировать эксперименты – значения x_i (или их прообразы \hat{x}_i в пространстве меньшей размерности) для построения выборки Φ . Для простоты генерации объектов, а также для корректности процедуры интерполяции и аппроксимации важно иметь выпуклое пространство дизайна [12, 13].

Выпуклая оптимизация является развитой областью оптимизации. Выпуклыми являются задачи оптимизации выпуклых функций $F(u)$ при линейных ограничениях и ограничениях вида $h(u) \leq 0$, где $h(u)$ – выпуклая функция. Для решения выпуклых задач разработаны эффективные методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования обладают рядом практически важных свойств, среди которых единственность решения, причем локальный минимум является глобальным. Для многокритериальной задачи полный Парето-фронт выпуклой задачи может быть получен методом скаляризации [14, 15].

В настоящей работе решается задача аппроксимации функций $C(\hat{x})$, задающих невыпуклое пространство дизайна, с помощью выпуклых функций $\hat{C}(\hat{x})$, близких в некоторой метрике:

$$\epsilon_C = \left\| \hat{C}(\hat{x}) - C(\hat{x}) \right\| .$$

В статье эта задача решена для пространства дизайна крыла самолета.

В разделе 2 кратко описывается ранее известная модель крыла. В ее составе есть подмодель профилей в выбранных сечениях крыла. На параметры профилей, лежащих в различных сечениях, накладываются ограничения, задающие невыпуклое множество допустимых значений модельных параметров. В задаче моделирования профилей крыла применяют методы снижения размерности (см. раздел 3). Решение этой задачи анализа данных позволяет с допустимой точностью заменить полноразмерное описание объекта вектором значительно меньшей размерности [11, 13, 16, 17]. Раздел 4 доказывает, что с той же степенью точности, что и при снижении размерности описания профилей, можно в известной модели крыла заменить исходные ограничения на такие, которые формируют выпуклое пространство дизайна. Изменения в модели крыла формулируются в разделе 5. В разделе 6 обсуждается возможность дальнейшего упрощения и улучшения подмодели профилей крыла путем замены линейных ограничений на параметры каждого сечения на одно ограничение в форме эллипсоида, построенного на основе эталонной выборки профилей. В разделе 7 подводятся итоги статьи.

2. МОДЕЛЬ КРЫЛА

Модель крыла состоит из нескольких подмоделей [18, 19]. Подмодель крыла в плане определяет проекцию крыла на горизонтальную плоскость $O_w X_w Y_w$ (вид сверху) и задает основные линейные и угловые размеры крыла (см. рис. 1). Подмодель 3D-формы крыла определяется профилями – сечениями крыла плоскостями, параллельными плоскости симметрии самолета (см. рис. 2) [12]. Выбираются k опорных сечений, в которых устанавливаются опорные профили. Нумерация сечений начинается от плоскости симметрии самолета.

Каждый профиль задается ординатами точек верхнего и нижнего контура в точках с фиксированными абсциссами $Y_i = \{y_{low}^i(x_1), \dots, y_{low}^i(x_n), y_{upper}^i(x_1), \dots, y_{upper}^i(x_n)\}$, $i = 1, \dots, k$. Координаты профилей относятся к длине их хорд так, что длины хорд всех профилей равны 1. Для вычисления ординат в промежуточных точках применяются методы интерполяции. Дополнительно трехмерная поверхность крыла задается с помощью углов крутки профиля – углов поворота профилей в вертикальной плоскости $O_w Z_w X_w$, которые равны углам между хордами профилей и плоскостью $O_w X_w Y_w$ крыла. Параметры сечений, отличных от опорных, определяются с помощью интерполяции.

Таким образом, модельными параметрами крыла являются следующие величины:

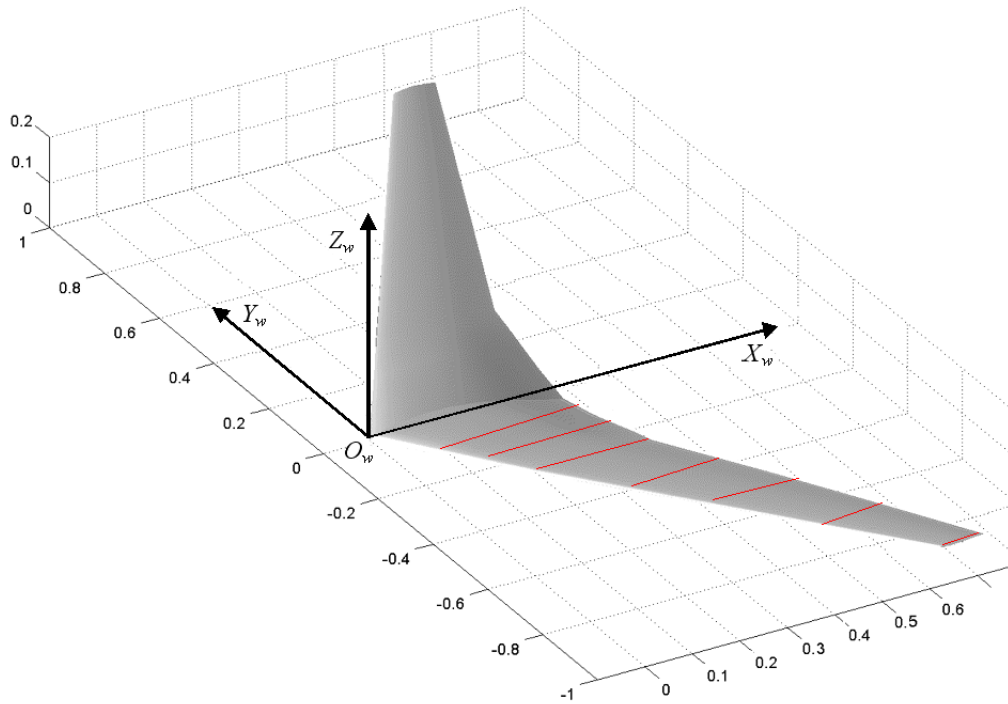


Рис. 1. Общий вид крыла самолета. Отрезками показаны положения опорных сечений.

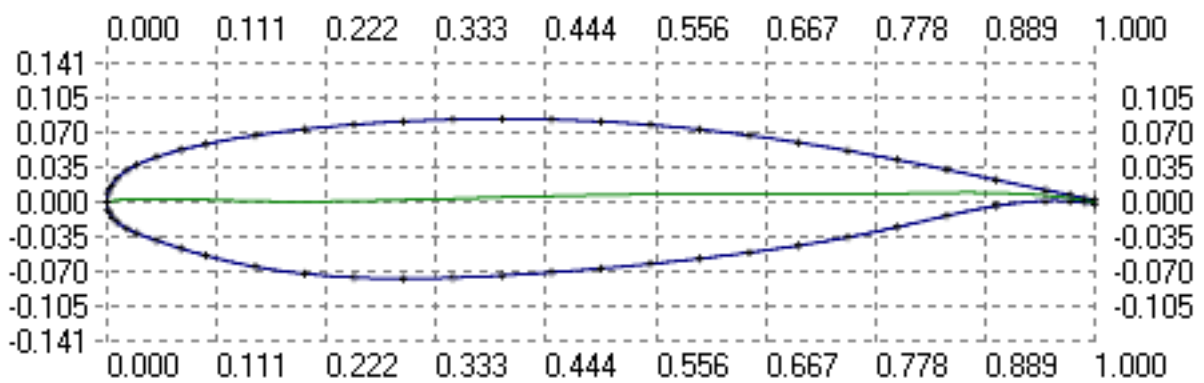


Рис. 2. Типичный профиль крыла самолета.

1. Параметры крыла в плане – геометрические характеристики проекции крыла на горизонтальную плоскость.
2. Число опорных сечений и их координаты по размаху крыла.
3. Углы крутки в опорных сечениях $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$.
4. Опорные профили $\{Y_i, i = 1, \dots, k\}$ – координаты точек верхнего и нижнего контуров профилей в опорных сечениях.

Все остальные геометрические параметры крыла могут быть вычислены на базе модельных параметров.

Указанные группы модельных параметров являются независимыми друг от друга переменными. В настоящей статье рассматривается задача оптимизации 3D-формы крыла, задаваемой совокупностью опорных профилей, так как они вносят существенный вклад в аэродинамические характеристики самолета [12]. Значения остальных модельных параметров будем считать фиксированными.

На значения модельных параметров накладывается ряд ограничений. Для большинства переменных известны их максимальное и минимальное возможные значения:

$$p^{min} \leq p \leq p^{max} .$$

Кроме того, существуют ограничения, связывающие различные модельные или вычисляемые характеристики друг с другом. Так, например, параметры профилей, установленных в опорные сечения, должны удовлетворять следующим условиям:

1. Условие несамопересечения профиля:

$$y_{low}^i(x_j) \leq y_{upper}^i(x_j), j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, k . \quad (1)$$

2. Важное значение для аэродинамики крыла имеют максимальные толщины его профилей [20]:

$$t_i = \max_{j=1, \dots, n} [y_{upper}^i(x_j) - y_{low}^i(x_j)] . \quad (2)$$

Максимальная толщина профиля должна лежать в определенном диапазоне допустимых значений [13, 21]:

$$t_i^{min} \leq t_i \leq t_i^{max}, i = 1, \dots, k . \quad (3)$$

3. Последовательность максимальных толщин профилей в опорных сечениях образует монотонную последовательность, убывающую по размаху крыла:

$$t_{i-1} \geq t_i, i = 2, \dots, k . \quad (4)$$

Пространство дизайна ω рассматриваемой подмодели описания профилей крыла лежит в декартовом произведении пространств координат $\{Y_1, \dots, Y_k\}$, в которых ограничения (1) линейны, а (3) и (4) задают невыпуклое множество. Действительно, функция максимальной толщины профиля является максимумом среди конечного набора линейных функций, поэтому является выпуклой. Однако (3) накладывает на нее ограничения снизу, делая множество решений этого неравенства невыпуклым. Аналогично, невыпуклы ограничения (4). Задача состоит в том, чтобы приблизить заданное этими ограничениями пространство дизайна ω с помощью выпуклого множества с допустимой для решения задачи оптимизации погрешностью.

3. СНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Профиль имеет гладкий обтекаемый контур, и поэтому отдельные компоненты вектора Y не являются независимыми. На практике все профили приближенно лежат на многообразии значительно меньшей размерности. Поэтому вектор Y размерности $D = 2n$ может быть представлен вектором $\lambda(Y)$ размерности $d \ll D$ [10, 13]. Процедура $\lambda(Y)$ построения такого вектора называется процедурой сжатия, а функция получения полноразмерного описания $\hat{Y}(\lambda) \approx Y$ – процедурой восстановления, а вместе они являются решением задачи снижения размерности (dimension reduction) [1, 16, 17].

Качество процедуры снижения размерности определяется некоторой метрикой различия исходного вектора Y и результата его восстановления \hat{Y} после сжатия. Пусть дана выборка $\Phi = \{Y_1, \dots, Y_N\}$ из N векторов в D -мерном пространстве. Обычно в качестве метрики выбирается погрешность восстановления:

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|Y_i - \hat{Y}_i\|^2 . \quad (5)$$

Самый распространенный метод снижения размерности – метод главных компонент (Principal components Analysis, PCA) [11, 22, 23]. В нем процедуры сжатия и восстановления линейны. Процедура сжатия имеет вид:

$$\lambda(Y) = C(Y - a) ,$$

где C – матрица $N \times d$, и a – вектор размерности d . Процедура восстановления выполняется следующим образом:

$$\hat{Y}(\lambda) = C^T \lambda + a . \quad (6)$$

Параметры процедуры выбираются из соображении минимизации функционала (5) на обучающей выборке Φ [24].

В [25] размерность профилей с допустимой точностью снижена до значения $d = 6$.

В известных моделях крыла [18, 19] вместо векторов Y_i (D -мерных описаний профилей в опорных сечениях) в качестве модельных параметров используется их сжатое описание λ_i . Тогда ограничения (1) изменятся таким образом, чтобы при восстановлении получающийся вектор \hat{Y} удовлетворял ограничениям (1). Перепишем систему неравенств (1) в матричном виде:

$$AY \leq 0 . \quad (7)$$

Вместо исходного вектора Y подставим результат \hat{Y} функции восстановления и получим ограничения в пространстве меньшей размерности параметров λ :

$$AC^T \lambda + a \leq 0 . \quad (8)$$

В сжатом пространстве они остаются линейными и задают выпуклый многогранник.

При использовании сжатого представления λ опорных профилей в качестве модельных параметров ограничения (3) и (4) могут быть проверены с помощью следующих шагов:

1. Восстановление полноразмерных описаний опорных профилей $\hat{Y}_i(\lambda)$.
2. Вычисление максимальной толщины (2) по вектору \hat{Y}_i :

$$\hat{t}_i(\lambda_i) = \max_{j=1, \dots, n} [\hat{y}_{upper}^i(x_j) - \hat{y}_{low}^i(x_j)] . \quad (9)$$

3. Проверка условий (3):

$$t_i^{min} \leq \hat{t}_i \leq t_i^{max}, i = 1, \dots, k. . \quad (10)$$

4. Проверка условий (4) для толщин, вычисленных по восстановленному профилям:

$$\hat{t}_{i-1} \geq \hat{t}_i, i = 2, \dots, k. \tag{11}$$

Заданные таким образом ограничения на параметры $\lambda_i, i = 1, \dots, k$, во-первых, сложны, и, во-вторых, задают невыпуклое пространство дизайна $\hat{\omega}$ размерности $k \cdot d$ и не могут быть использованы при формулировании задачи выпуклой оптимизации.

4. МАКСИМАЛЬНАЯ ТОЛЩИНА ПРОФИЛЯ ПРИ СНИЖЕНИИ РАЗМЕРНОСТИ

Рассмотрим, насколько сильно при сжатии-восстановлении искажается максимальная толщина профиля, и каков характер ее зависимости от координат вектора λ – описания профиля в сжатом пространстве.

В качестве исходных данных для экспериментов используется множество из $N = 206$ эталонных профилей, отобранных экспертами [13, 26].

Первый эксперимент проведен следующим образом. Разобьем профили на две группы – обучающую Φ_{train} и тестовую Φ_{test} выборки. По векторам обучающей выборки построим процедуру снижения размерности $DR(\Phi_{train})$ в d -мерное пространство. Используя вектора из тестовой выборки Φ_{test} , посчитаем различные метрики качества полученной процедуры для двух различных значений d (см. таблицу 1).

Таблица 1. Точность сжатия описания профилей. Y обозначает исходный вектор профиля, \hat{Y} – восстановленный профиль, t – максимальная толщина (2), посчитанная по вектору Y , \hat{t} – толщина (9) восстановленного вектора \hat{Y} .

Метрика ошибки	$d = 6$	$d = 10$
Средняя ошибка восстановления профиля $\frac{1}{ \Phi_{test} D} \sum_{i=1}^{ \Phi_{test} } \sum_{j=1}^D Y_i^j - \hat{Y}_i^j $	0.000426	0.000176
Максимальная покоординатная средняя ошибка $\max_{j=1, \dots, D} \frac{1}{ \Phi_{test} } \sum_{i=1}^{ \Phi_{test} } Y_i^j - \hat{Y}_i^j $	0.000819	0.000374
Максимальная ошибка восстановления $\max_{i=1, \dots, \Phi_{test} , j=1, \dots, D} Y_i^j - \hat{Y}_i^j $	0.003082	0.002693
Средняя ошибка восстановления толщины $\frac{1}{ \Phi_{test} } \sum_{i=1}^{ \Phi_{test} } t_i - \hat{t}_i $	0.000524	0.000110
Максимальная ошибка восстановления толщины $\max_{i=1, \dots, \Phi_{test} } t_i - \hat{t}_i $	0.002005	0.000422

Из анализа величины ошибок восстановления видно, что функция толщины, которая является разностью некоторых двух компонент вектора Y , соответствующим точкам верхнего и нижнего контура в точках с некоторой абсциссой x_m , при снижении размерности искажается на величину, которая по порядку величины равна средней ошибке восстановления и не превосходит максимальной из средних ошибок для каждой компоненты вектора Y . По определению (2) максимальной толщины модуль разности $|\hat{t} - t|$ не превосходит двойной максимальной ошибки восстановления профиля. На практике максимальная толщина достигается в середине профиля, где он достаточно гладок, поэтому хорошо восстанавливается (наибольшая ошибка восстановления достигается в носике и хвосте профиля), в связи с чем ошибка восстановления толщины меньше погрешности восстановления профиля.

Второй эксперимент заключается в следующем. По полной выборке Φ создана процедура снижения размерности $DR(\Phi)$. Найдено множество сжатых описаний эталонных профилей $\Lambda = \{\lambda_1 = \lambda(Y_1), \dots, \lambda_N = \lambda(Y_N)\}$. Вычислены покоординатные минимумы и максимумы

среди векторов множества Λ :

$$\alpha^i = \min_{j=1, \dots, |\Lambda|} \lambda_j^i, i = 1, \dots, d,$$

$$\beta^i = \max_{j=1, \dots, |\Lambda|} \lambda_j^i, i = 1, \dots, d,$$

и в параллелипипеде

$$\Pi = \{\lambda | \alpha^i \leq \lambda^i \leq \beta^i, i = 1, \dots, d\}$$

случайно с равномерным распределением выбрано $M = 10000$ векторов λ . Затем получены соответствующие профили \hat{Y} с помощью процедуры восстановления и вычислены максимальные толщины профилей \hat{t} . На основе полученных данных построена линейная регрессия величины \hat{t} по вектору λ :

$$t^* = q^T \lambda + w, \tag{12}$$

где $q \in \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}$ – параметры регрессии.

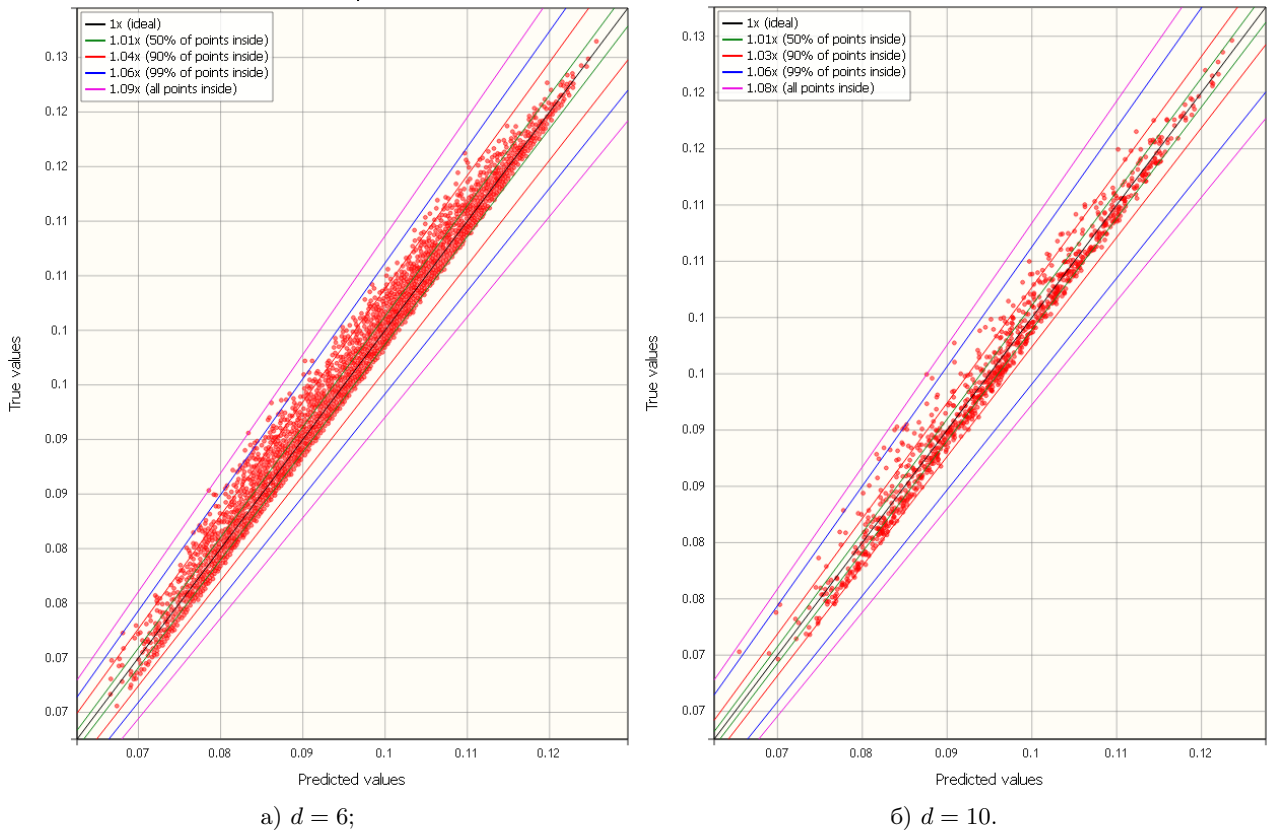


Рис. 3. Диаграмма рассеяния для линейной аппроксимации максимальной толщины по сжатому описанию профиля при снижении размерности до значения d .

На графиках 3 показаны диаграммы рассеяния полученной линейной регрессии. По оси ординат отложено значение максимальной толщины (9) \hat{t} , посчитанное по восстановленному описанию профиля \hat{Y} . По оси абсцисс отложены значения максимальной толщины t^* , предсказанные по формуле (12). В качестве метода линейной регрессии использовался регуляризованный метод наименьших квадратов, реализованный в составе библиотеки MACROS GTApprox [27].

По графикам видно, что относительная ошибка при подсчете толщины не превосходит 10%, а в большинстве случаев составляет единицы процентов. В абсолютном выражении это составляет величины, совпадающие по порядку величины с указанными в таблице 1. В таблице 2

приведены более подробные сведения о точности линейного приближения максимальной толщины профиля.

Таблица 2. Точность линейной аппроксимации максимальной толщины профиля. \hat{t} обозначает максимальную толщину профиля (9), посчитанную по восстановленному вектору $\hat{Y}(\lambda)$, t^* – величину, оцененную с помощью линейной регрессии (12).

Метрика ошибки	$d = 6$	$d = 10$
Максимальная ошибка $\max_{i=1, \dots, M} \hat{t}_i - t_i^* $	0.0077	0.0074
Квантиль 99% $Q_{0.99} : \{i : \hat{t}_i - t_i^* \leq Q_{0.99}\} = 0.99M$	0.0042	0.0053
Квантиль 90% $Q_{0.90} : \{i : \hat{t}_i - t_i^* \leq Q_{0.90}\} = 0.90M$	0.0021	0.0025
Средняя ошибка $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{t}_i - t_i^* $	0.0010	0.0012

Из полученных результатов следует, что существует аффинная функция от координат образа профиля в пространстве меньшей размерности, в пределах погрешности восстановления равная максимальной толщине профиля:

$$t \approx q^T \lambda + w \quad (13)$$

5. ВЫПУКЛАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ДИЗАЙНА

В разделе 2 перечислены модельные параметры крыла самолета. В разделе 3 указано, что вместо описания профиля вектором большой Y размерности D можно в качестве модельных параметров использовать вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$ меньшей размерности. При этом ограничения (1) заменяются ограничениями (8), а ограничения (3) и (4) проверяются после предварительного восстановления D -мерного описания профиля по формулам (10) и (11).

Заданные таким образом ограничения (10) и (11) являются невыпуклыми. Однако результат раздела 4 позволяет сделать эти ограничения линейными. Для этого необходимо по имеющемуся набору профилей построить процедуру снижения размерности, а затем найти параметры линейной регрессии (13) для расчета максимальной толщины профиля \hat{t} по его сжатому описанию λ . Тогда ограничения (10) будут приближенно соответствовать следующей системе неравенств:

$$t_i^{min} \leq q^T \lambda_i + w \leq t_i^{max}, i = 1, \dots, k \quad (14)$$

Ограничения (11) заменяются следующими неравенствами:

$$q^T \lambda_{i-1} + w \geq q^T \lambda_i + w, i = 2, \dots, k \quad (15)$$

При замене исходных ограничений (10) и (11) на (14) и (15) погрешность модели не превосходит ошибки (5) процедуры снижения размерности профиля. В рамках этой точности неравенства (14) и (15) накладывают на параметры сечений крыла ограничения, задающие выпуклое пространство допустимых значений.

Необходимо отметить, что аффинные функции в неравенствах (14) и (15) являются приближением функции максимальной толщины (2). Если в процессе решения задачи оптимизации получается точка, в которой эти ограничения выполняются с недостаточным запасом или слабо нарушаются (например, если разность левой и правой частей по модулю не превосходит ошибки, указанной в таблице 2), то можно сказать, что точка попала в «полосу недоверия». В этом случае для того, чтобы определить, является ли оптимальная точка допустимой, ее следует рассмотреть отдельно и проверить ограничения по исходным формулам (10) и (11), восстановив описание профилей из векторов λ .

6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

В разделе 5 в качестве модельных параметров для описания профилей выбраны их сжатые описания λ в пространстве меньшей размерности d . На значения компонент векторов λ сжатых описаний отдельных профилей наложены ограничения (8), соответствующие условиям несамопересечения. Эти ограничения задают выпуклый многогранник.

При снижении размерности к любому d -мерному вектору λ можно применить процедуру восстановления (6) и получить D -мерный вектор \hat{Y} . Однако не каждый D -мерный вектор будет являться корректным описанием физически осмысленного профиля крыла. Ограничения (8) задают только необходимые условия корректности сжатого описания профиля λ и не являются достаточными. Также отметим, что при переходе в сжатое пространство координаты вектора λ теряют свой геометрический или физический смысл. Интуитивно понятно, что с большей вероятностью физически корректный профиль будет получаться из векторов, лежащих вблизи известных профилей [28].

В связи с этим в модель можно добавить дополнительное ограничение в форме эллипсоида, построенного по множеству известных профилей. Данное ограничение является выпуклым, достаточно простым как для описания, так и для генерации точек в нем. Если построенный по данным экстремальный эллипсоид будет принадлежать многограннику (8), то пространство дизайна будет задаваться значительно меньшим количеством неравенств. Следовательно, из-за уменьшения количества ограничений в задаче оптимизации возможно сокращение времени поиска ее решения.

В [29] ставится и предлагается подход к решению двухкритериальной задачи поиска эллипсоида, имеющего небольшой объем и содержащего большое количество точек из заданного множества. В [30] описан способ решения данной задачи без учета многогранника ограничений с помощью решения серии задач выпуклого программирования. В [28] сформулированы процедуры изменения построенного по точкам эллипсоида для учета линейных ограничений на пространство дизайна. Построение экстремальных эллипсоидов сводится к задачам выпуклого программирования.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важным для аэродинамики крыла является форма его сечений – профилей. Известная модель крыла накладывает на форму этих сечений ограничения, которые задают невыпуклое множество.

При моделировании крыла для параметризации профилей, лежащих в опорных сечениях, применяются методы снижения размерности. Процедура сжатия позволяет описывать профиль с помощью вектора значительно меньшей размерности, чем исходное описание. Сжатие возможно, так как профили приближенно лежат на многообразии меньшей размерности, отдельные точки профиля в силу его гладкости не являются независимыми.

При сжатии и восстановлении вектор немного искажается (величина разности называется ошибкой восстановления). Ошибка восстановления является приемлемой для решения инженерной задачи. В статье показано, как, не внося дополнительной ошибки, заменить исходные ограничения на параметры профилей системой линейных неравенств, задающей выпуклый многогранник. Допустимо дальнейшее улучшение модели путем построения экстремального эллипсоида с использованием множества известных профилей крыла. Тем самым получена модель, значения параметров которой лежат в выпуклом множестве, что делает возможным применение методов выпуклой оптимизации в задачах моделирования крыла самолета.

Авторы выражают благодарность Черновой Светлане Станиславовне за помощь в обсуждении статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн А.В., Кулешов А.П. Когнитивные технологии в проблеме снижения размерности описания геометрических объектов. *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2008, №2, стр. 6–19.
2. Егер С.М. *Проектирование самолетов*. М.: Машиностроение, 1983.
3. Егер С.М., *Основы автоматизированного проектирования самолетов*. М.: Машиностроение, 1986.
4. Давыдов Ю.В., Злыгарев В.А. *Геометрия крыла*. М.: Машиностроение, 1987.
5. Кулешов А.П. Технология быстрого вычисления характеристик сложных технических объектов. *Приложение к журналу «Информационные технологии»*, 2006, № 3, стр. 4 - 11.
6. Forrester, A.I.J., Sobester A., Keane A.J. *Engineering Design via Surrogate Modelling. A Practical Guide*. New-York: Wiley, 2008.
7. Kuleshov A.P., Bernstein A.V. Cognitive technologies in adaptive models of complex plants. *Information Control Problems in Manufacturing*, 2009, vol. 13, part 1, pp. 1441–1452.
8. Wang G., Shan S. Review of Metamodeling Techniques in Support of Engineering Design Optimization. *Journal of Mechanical design*, 2006, 129(5), pp. 370–381.
9. Бернштейн А.В., Бурнаев Е.В., Кулешов А.П. Об одной методологии построения аппроксимаций многомерных зависимостей. *Труды «Пленарные и избранные доклады» IV международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления»*. Москва, 2008, стр. 56–62.
10. Айвазян, С.А., Бухштабер, В.М., Енюков, И.С., Мешалкин, Л.Д. *Прикладная статистика: классификация и снижение размерности*. М.: Финансы и статистика, 1989.
11. Бернштейн А.В. Снижение размерности в предсказательном моделировании: новые задачи и методы. *Сборник трудов конференции «Информационные технологии и системы - 2012» 20-24 августа 2012, г. Россия, г. Петрозаводск*. М.: ИППИ РАН, 2012.
12. Zhu F., Qin N., Burnaev E.V., Bernstein A.V., Chernova S.S. Comparison of Three Geometric Parameterization methods and Their Effect on Aerodynamic Optimization. In: *Poloni C. et al. (eds.) Eurogen 2011 Proceedings - Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems International Conference*, 2011, Sira, Capua, Italy, pp. 758–772.
13. Свириденко, Ю.Н. Применение сжатия данных для случайной генерации объектов с заданными аэродинамическими характеристиками. *Труды Центрального аэрогидродинамического института им. проф. Н.Е. Жуковского*, 2008, выпуск №2678 «Применение искусственных неронных сетей в задачах прикладной аэродинамики».
14. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge: University Press, 2004.
15. Нестеров Ю.Е. *Методы выпуклой оптимизации*. М.: МЦМНО, 2010.
16. Бернштейн А.В., Бурнаев Е.В. Задача снижения размерности в предсказательном моделировании. *Сборник докладов 9-й международной конференции Интеллектуализация обработки информации (ИОИ-9), Черногория, г. Будва, 2012*. М.: Торус Пресс, 2012, стр. 192–196.
17. С.С. Чернова, Е.П. Иванова. Снижение размерности сложных геометрических объектов при наличии частных параметрических моделей. *Искусственный интеллект и принятие решений*, 2009, №3, стр. 53–58.
18. Бернштейн А.В., Вышинский В.В., Кулешов А.П., Свириденко Ю.Н. Быстрый метод аэродинамического расчета для задач проектирования. *Труды Центрального аэрогидродинамического института им. проф. Н.Е. Жуковского*, 2008, выпуск №2678 «Применение искусственных неронных сетей в задачах прикладной аэродинамики».

19. Бернштейн А.В., Вышинский В.В., Кулепов А.П., Свириденко Ю.Н. Применение искусственных нейронных сетей для определения нагрузок по крылу пассажирского самолета на режиме крейсерского полета. *Труды Центрального аэрогидродинамического института им. проф. Н.Е. Жуковского*, 2008, выпуск №2678 «Применение искусственных нейронных сетей в задачах прикладной аэродинамики».
20. Dongli Ma, Yanping Zhao, Yuhang Qiao, Guanxiong Li. Effects of relative thickness on aerodynamic characteristics of airfoil at a low Reynolds number. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, vol. 28, issue 4, pp. 1003–1015.
21. Ялалетдинов А.Д., Чепыжов В.В., Чернова С.С. Применение процедур снижения размерности к суррогатной модели аэродинамики крыла самолета в задачах оптимизации. *Материалы 34-й конференции молодых ученых и специалистов ИППИ РАН «Информационные технологии и системы - 2011»*. Геленджик, 2011, стр. 90–96.
22. Jollie T. *Principal Component Analysis*. New-York: Springer, 2002.
23. Jolliffe, I.T. *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
24. Jackson, J.E. *A Users Guide to Principal Components*. New York: Wiley, 1991.
25. Бурнаев Е.В., Чернова С.С. Об итеративном алгоритме подсчета главных компонент. *Информационные процессы*, 2008, том 8, №2, с. 99–107.
26. Кашафутдинов С.Т., Лушин В.Н. *Атлас аэродинамических характеристик крыловых профилей*. Новосибирск: Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С.А. Чаплыгина, 1994.
27. MACROS and pSeven software. <https://www.datadvance.net/>
28. Бедринцев А.А., Чепыжов В.В., Чернова С.С. Экстремальные эллипсоиды как аппроксиматоры пространства дизайна в задачах предсказательного метамоделирования. *Искусственный интеллект и принятие решений*, 2015, №2, стр. 35–44.
29. Бедринцев А.А., Чепыжов В.В. Двухкритериальная задача построения оптимальных эллипсоидов для представления данных. *Сборник трудов 38-й конференции-школы ИППИ РАН Информационные технологии и системы - 2014*», 2014, стр. 556–563.
30. Бедринцев А.А., Чепыжов В.В. Описание пространства дизайна с помощью экстремальных эллипсоидов в задачах представления данных. *Информационные процессы*, 2015, т. 4, стр. 402–413.

Convex Approximation of Design Space in Wing Shape Optimization Problem

Bedrintsev A., Chepyzhov V.

Convex approximation of wing airfoils submodel design space is discussed in the article. The known model implies constraints on its parameters. These inequalities form non-convex design space. Dimensionality reduction is widely used while mathematical modelling. It allows to describe a wing with fewer number of parameters without significant loss of accuracy. The paper offers an approach for replacing these constraints with new ones which form convex polyhedron and without further loss of accuracy. Extremal ellipsoid constructed based on available set of wing airfoils can be used for enhancement of the model.

KEYWORDS: wing airfoil, principal components analysis, surrogate modelling, dimensionality reduction, convex programming, extremal ellipsoids.