

===== ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ =====

## Анализ пропускной способности радиоканала системы ММО в условиях пространственно коррелированных замираний

Крейнделин В. Б., Панкратов Д. Ю.

*Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*  
*e-mail: vitkrend@gmail.com, dpankr@mail.ru*

Поступила в редколлегию 01.09.2017

**Аннотация**— Представлены результаты теоретического анализа и компьютерного моделирования пропускной способности системы ММО в условиях пространственно коррелированных замираний. В результате теоретического анализа были получены приближенные аналитические выражения для пропускной способности радиоканала системы ММО. Эти выражения позволяют аналитически получить количественные оценки пропускной способности радиоканала системы ММО для различных конфигураций антенн в условиях пространственно коррелированных замираний. Приведенные результаты моделирования подтверждают результаты теоретического анализа.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** пропускная способность, пространственная корреляция, замирания, ММО.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В современных системах радиосвязи широко применяется технология, использующая несколько передающих и несколько приемных антенн (ММО, Multiple Input Multiple Output – много входов, много выходов) в сочетании с алгоритмами кодирования и модуляции [1], [2]. Применение технологии ММО позволяет существенно повысить пропускную способность систем радиосвязи по сравнению традиционными системами с одной передающей и одной приемной антеннами (SISO, Single-Input-Single Output – один вход, один выход) [3], [4]. Однако при наличии в радиоканале замираний с существенной пространственной корреляцией выигрыш в пропускной способности систем ММО по сравнению с системами SISO заметно уменьшается [5],[6]. При разработке систем связи необходимо учитывать пространственную корреляцию замираний, которая обычно описывается большим числом параметров [7], [8].

Известны модели, учитывающие пространственную корреляцию замираний в каналах связи ММО и имеющие небольшое число параметров, которые позволяют исследовать свойства каналов связи без явного учета структуры антенной решетки и условий распространения радиоволн [4]. Эти результаты позволяют исследовать влияние пространственной корреляции замираний на пропускную способность системы ММО путем имитационного моделирования. Известны также теоретические исследования пропускной способности каналов связи ММО в условиях пространственно-коррелированных замираний, но эти результаты носят, к сожалению, асимптотический характер (при неограниченном возрастании числа антенн) [4], [9].

Задача исследования моделей каналов связи ММО является актуальной, поскольку при разработке алгоритмов обработки сигналов в системах ММО учет особенностей модели канала связи позволяет получить характеристики системы, близкие к потенциально возможным [9]. В данной работе проведен теоретический анализ зависимости пропускной способности каналов связи ММО от уровня пространственной корреляции замираний при различных конфигурациях антенн системы ММО. Получено приближенное выражение для пропускной способности канала связи ММО с произвольным числом антенн, учитывающее пространственную корреляцию замираний.

## 2. МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ММО И ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ

Рассмотрим систему ММО с  $M$  передающими антеннами и  $N$  приемными антеннами. Полагаем, что модель сигнала на входе приемника имеет следующий вид [2]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{y}$  – вектор принимаемых сигналов размерности  $N \times 1$ ,  $\mathbf{H}$  – комплексная матрица канала размерности  $N \times M$ ,  $\mathbf{s}$  – вектор передаваемых комплексных информационных символов размерности  $M \times 1$ ,  $\mathbf{n}$  – комплексный гауссовский случайный вектор размерности  $N \times 1$  с нулевым средним и корреляционной матрицей  $E\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'\} = \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица размерности  $N \times N$ ,  $\sigma_n^2$  – суммарная дисперсия действительной и мнимой частей шума в одной приемной антенне. Каждый элемент  $h_{ij}$  матрицы  $\mathbf{H}$  канала связи ММО представляет собой комплексный коэффициент передачи от  $j$ -й передающей антенны к  $i$ -й приемной антенне. Полная мощность, излучаемая с помощью всех передающих антенн, равна  $P = E[\mathbf{s}'\mathbf{s}] = M\sigma_s^2$ , где  $\sigma_s^2$  – дисперсия излучаемого с помощью одной антенны сигнала. Нужно подчеркнуть, что элементы вектора  $\mathbf{s}$  комплексных информационных символов предполагаются независимыми дискретными случайными величинами с единичными дисперсиями. Их независимость обусловлена предположением, что комплексные информационные символы получаются путем модуляции независимыми двоичными символами от источника информации. Если в системе используется помехоустойчивое кодирование, то на выходе кодера двоичные кодированные символы, строго говоря, зависимы, но мы этой зависимостью пренебрегаем, следуя при этом [10], [11]. Дисперсии элементов вектора  $\mathbf{s}$  одинаковы, поскольку предполагается, что в рассматриваемой системе ММО во всех передающих антеннах сигналы используют один и тот же метод модуляции (т.е., они используют одинаковые созвездия). Для упрощения дальнейшего рассмотрения предполагается, что дисперсии элементов вектора  $\mathbf{s}$  нормированы к единице.

Далее предполагается, что в радиоканале ММО имеют место релеевские замирания. Это означает, что каждый элемент матрицы  $\mathbf{H}$  канала связи ММО является комплексной гауссовской случайной величиной с нулевым средним. Модуль этой случайной величины распределен по релеевскому закону, а аргумент имеет равномерное распределение внутри интервала  $[-\pi; \pi]$  [12], [13]. Элементы матрицы  $\mathbf{H}$  могут быть некоррелированными или коррелированными между собой. Радиоканал с такой матрицей будем называть некоррелированным (коррелированным) релеевским радиоканалом.

Среднее отношение сигнал/шум в одной приемной антенне определяется следующим образом [2]:

$$\rho = \frac{P}{\sigma_n^2} = M \cdot \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}. \quad (2)$$

Из (1) следует, что текущее отношение сигнал/шум  $\rho_i$  в  $i$ -й приемной антенне описывается следующим соотношением:

$$\rho_i = \frac{\mathbf{h}(i) \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' \cdot \mathbf{h}'(i)}{\sigma_n^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\mathbf{h}(i)$  -  $i$ -я строка матрицы радиоканала  $\mathbf{H}$ .

Если это соотношение усреднить по распределению вектора  $\mathbf{s}$  (учитывая ранее сделанное допущение о независимости его элементов) и по распределению вектора  $\mathbf{h}(i)$  (при этом не используется требование некоррелированности его элементов), то нетрудно получить (2).

Здесь следует отметить, что величина  $\rho$  носит усредненный характер (усреднение проводится по распределению матрицы  $\mathbf{H}$ ) не зависит от конкретной реализации матрицы  $\mathbf{H}$ .

Пропускная способность  $C$  радиоканала системы ММО с заданной комплексной матрицей  $\mathbf{H}$  определяется соотношением [4], [7], [8], [14]:

$$C = \log_2 \det \left( \mathbf{I} + \frac{\rho}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}' \right), \text{ бит/с/Гц.} \quad (3)$$

Рассматриваемая пропускная способность  $C$  для упрощения нормирована к ширине полосы частот радиоканала.

Соотношение (3) является обобщением известной формулы К. Шеннона [15] на случай канала связи системы ММО. Если матрица  $\mathbf{H}$  канала является детерминированной матрицей, то пропускная способность  $C$  будет детерминированной величиной. Однако, из-за наличия замираний в реальных каналах связи элементы матрицы  $\mathbf{H}$  являются случайными величинами. Тогда пропускная способность  $C$  также будет случайной величиной. В этом случае распределение пропускной способности  $C$  будет определяться совместным распределением элементов матрицы  $\mathbf{H}$  радиоканала системы ММО. Совместное распределение элементов комплексной матрицы  $\mathbf{H}$  определяется свойствами радиоканала системы ММО, и, как правило, является многомерным гауссовским распределением с нулевым средним (если отсутствует прямая видимость) [4], [16].

### 3. УЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ЗАМИРАНИЙ

В радиоканале почти всегда имеет место пространственная корреляция замираний, например, из-за небольшого расстояния между антеннами. При наличии пространственно коррелированных замираний элементы матрицы радиоканала ММО будут коррелированы между собой.

Пусть  $\mathbf{H}$  - матрица некоррелированного релейского радиоканала ММО размерности  $N \times M$ , состоящая из комплексных некоррелированных гауссовских случайных величин с нулевыми средними и одинаковыми дисперсиями  $2\sigma_h^2$ ;  $\mathbf{H}_{cor}$  - матрица коррелированного радиоканала ММО также размерности  $N \times M$ ;  $vec(\dots)$  - операция<sup>1</sup> преобразования матрицы  $N \times M$  в вектор-столбец размерности  $M \cdot N \times 1$ . Имеет место следующее очевидное соотношение [17]:  $vec(\mathbf{H}_{cor}) = \mathbf{R}^{1/2} \cdot vec(\mathbf{H})$ ,

где  $\mathbf{R}$  - корреляционная матрица пространственно коррелированных замираний размерности  $M \cdot N \times M \cdot N$ , определяемая следующим образом [12]:

$$\mathbf{R} = E \left\{ vec(\mathbf{H}_{cor}) \cdot vec(\mathbf{H}_{cor})' \right\}.$$

Модель радиоканала ММО, основанная на этих соотношениях, точно описывает корреляционные взаимосвязи между всеми случайными элементами матрицы канала  $\mathbf{H}_{cor}$ , однако эта модель имеет высокую размерность  $M \cdot N \times M \cdot N$  и поэтому ее практическое использование весьма затруднительно (особенно в системах с большим числом антенн).

В связи с этим на практике используются приближенные, но существенно более простые модели замираний в радиоканале ММО. Наиболее широко на практике в системах подвижной радиосвязи используется простая модель коррелированного радиоканала ММО, называемая моделью Кронекера [4], [9], [18], [19], [20], [21]. Согласно этой модели, корреляционная матрица замираний  $\mathbf{R}$  аппроксимируется следующим произведением [4]:  $\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_t^T \otimes \mathbf{R}_r$ ,

где знак  $\otimes$  обозначает операцию внешнего (кронекерова) умножения матриц [22].

Далее мы будем использовать следующее матричное тождество:  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{1/2} = \mathbf{A}^{1/2} \otimes \mathbf{B}^{1/2}$ .

Справедливость этого тождества следует из известного матричного тождества [12], [22]:  $(\mathbf{G} \otimes \mathbf{P}) \cdot (\mathbf{S} \otimes \mathbf{F}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{S} \otimes \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}$ . Действительно, рассмотрим выражение

<sup>1</sup> Если  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \dots \quad \mathbf{h}_M]$  есть матрица размерности  $N \times M$ , то  $vec(\mathbf{H}) = [\mathbf{h}_1^T \quad \mathbf{h}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{h}_M^T]^T$  есть вектор-столбец размерности  $M \cdot N \times 1$ .

$$(\mathbf{A}^{1/2} \otimes \mathbf{B}^{1/2}) \cdot (\mathbf{A}^{1/2} \otimes \mathbf{B}^{1/2})' = (\mathbf{A}^{1/2} \otimes \mathbf{B}^{1/2}) \cdot \left( (\mathbf{A}^{1/2})' \otimes (\mathbf{B}^{1/2})' \right).$$

Если применить к этому выражению тождество  $(\mathbf{G} \otimes \mathbf{P}) \cdot (\mathbf{S} \otimes \mathbf{F}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{S} \otimes \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}$ , то нетрудно убедиться в справедливости тождества  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{1/2} = \mathbf{A}^{1/2} \otimes \mathbf{B}^{1/2}$ .

На основе этого матричного тождества и известного матричного тождества [12], [22]  $\text{vec}(\mathbf{ADB}) = [\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}] \cdot \text{vec}(\mathbf{D})$  имеем:

$$\text{vec}(\mathbf{H}_{cor}) \approx (\mathbf{R}_t^T \otimes \mathbf{R}_r)^{1/2} \text{vec}(\mathbf{H}) = \left( (\mathbf{R}_t^T)^{1/2} \otimes \mathbf{R}_r^{1/2} \right) \text{vec}(\mathbf{H}) = \text{vec}(\mathbf{R}_r^{1/2} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{R}_t^{1/2}).$$

Отсюда следует простое представление для матрицы канала  $\mathbf{H}_{cor}$ , которое известно под названием модели Кронекера коррелированного радиоканала ММО [4], [9], [18], [19]:

$$\mathbf{H}_{cor} \approx \mathbf{R}_r^{1/2} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{R}_t^{1/2}. \quad (4)$$

Матрица  $\mathbf{R}_r$  является корреляционной матрицей размерности  $N \times N$  вектора-столбца  $\mathbf{h}_{cor}(j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , матрицы радиоканала ММО и определяется следующим образом:

$$\mathbf{R}_r = E \{ \mathbf{h}_{cor}(j) \cdot \mathbf{h}_{cor}'(j) \}, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Аналогичным образом, матрица  $\mathbf{R}_t$  является корреляционной матрицей размерности  $M \times M$  вектора-строки  $\mathbf{h}_{cor}(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , матрицы радиоканала ММО и определяется следующим образом:  $\mathbf{R}_t = E \{ \mathbf{h}_{cor}'(i) \cdot \mathbf{h}_{cor}(i) \}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Модель Кронекера (4) предполагает, что корреляция замираний в скалярных радиоканалах от всех  $M$  передающих антенн к  $i$ -й приемной антенне одинакова и не зависит от  $i$ . Аналогично, модель (4) предполагает, что корреляция замираний в скалярных радиоканалах от  $j$ -й передающей антенны ко всем  $N$  приемным антеннам также одинакова и не зависит от  $j$  [2], [23].

В литературе матрицы  $\mathbf{R}_r$  и  $\mathbf{R}_t$  получили названия корреляционной матрицы на приемной стороне и корреляционной матрицы на передающей стороне, соответственно [2], [4], [9], [18], [19]. Обе корреляционные матрицы  $\mathbf{R}_r$  и  $\mathbf{R}_t$  являются положительно полуопределёнными эрмитовыми матрицами (все собственные значения которых действительны и неотрицательны).

Модель Кронекера коррелированного радиоканала ММО (4) была предметом многочисленных исследований, направленных на определение границ ее адекватности [23], [24]. Результатом этих исследований, в частности, стал тот факт, что модель Кронекера (4) вошла в стандарт систем подвижной связи LTE/LTE-Advanced [20, раздел B5]. В связи с этим модель Кронекера (4) используется при практическом тестировании средств связи, используемых в системах подвижной связи LTE/LTE-Advanced [20, раздел 10.3].

Следует заметить, что стандарт LTE/LTE-Advanced [20] предусматривает наличие в системе связи до  $M = 8$  передающих антенн и до  $N = 8$  приемных антенн. Кроме того, в работе [21] приводятся результаты практических измерений параметров радиоканала ММО, показывающих адекватность модели Кронекера при  $M \leq 8$  и  $N \leq 8$ .

Корреляционные матрицы  $\mathbf{R}_r$  и  $\mathbf{R}_t$  могут быть вычислены, например, следующим образом [8], [25]:

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} 1 & \rho_t & \rho_t^4 & \cdots & \rho_t^{(N-1)^2} \\ \rho_t & 1 & \rho_t & \cdots & \vdots \\ \rho_t^4 & \rho_t & 1 & \cdots & \rho_t^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \rho_t \\ \rho_t^{(N-1)^2} & \cdots & \rho_t^4 & \rho_t & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} 1 & \rho_r & \rho_r^4 & \cdots & \rho_r^{(N-1)^2} \\ \rho_r & 1 & \rho_r & \cdots & \vdots \\ \rho_r^4 & \rho_r & 1 & \cdots & \rho_r^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \rho_r \\ \rho_r^{(N-1)^2} & \cdots & \rho_r^4 & \rho_r & 1 \end{bmatrix},$$

где  $\rho_t$  и  $\rho_r$  - коэффициенты корреляции сигналов в двух соседних антенных элементах, которые зависят от расстояния между этими элементами. Отметим, что указанный вид корреляционных матриц соответствует матрицам, приведенным в стандарте [20]. Эти корреляционные матрицы могут применяться при антенных конфигурациях, соответствующих  $M \leq 8$  и  $N \leq 8$ .

Также следует указать, что для корреляционных матриц  $\mathbf{R}_t$  и  $\mathbf{R}_r$  справедливы соотношения [4], [9]:

$$\det(\mathbf{R}_r) \leq 1, \det(\mathbf{R}_t) \leq 1.$$

Вернемся к обсуждению проблемы вычисления пропускной способности. При подстановке (4) в (3) получаем, что пропускная способность радиоканала системы ММО при наличии пространственной корреляции замираний определяется следующим соотношением [4]:

$$C_{cor} = \log_2 \det \left( \mathbf{I} + \frac{\rho}{M} \mathbf{H}_{cor} \mathbf{H}'_{cor} \right) = \log_2 \det \left( \mathbf{I} + \frac{\rho}{M} \mathbf{R}_r^{1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_t \mathbf{H}' (\mathbf{R}_r^{1/2})' \right), \text{ бит/с/Гц.} \quad (5)$$

Выражение (5) при высоких значениях отношениях сигнал/шум ( $\rho \gg 1$ ) можно аппроксимировать следующим образом [4]:

$$C_{cor} \approx \log_2 \det \left( \frac{\rho}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}' \right) + \log_2 \det(\mathbf{R}_r) + \log_2 \det(\mathbf{R}_t), \text{ бит/с/Гц.} \quad (6)$$

В качестве критерия для анализа пропускной способности радиоканала системы ММО с пространственно-коррелированными замираниями будем использовать среднюю пропускную способность  $C_{av,cor}$ , которая определяется следующим соотношением, полученным путем усреднения (5):

$$C_{av,cor} = \int_{\mathbf{H}} C_{cor}(\mathbf{H}) p(\mathbf{H}) d\mathbf{H} = \int_{\mathbf{H}} \log_2 \left\{ \det \left( \mathbf{I} + \frac{\rho}{M} \mathbf{R}_r^{1/2} \mathbf{H} \mathbf{R}_t \mathbf{H}' (\mathbf{R}_r^{1/2})' \right) \right\} p(\mathbf{H}) d\mathbf{H}, \text{ бит/с/Гц,} \quad (7)$$

где усреднение производится по распределению  $p(\mathbf{H})$  случайной матрицы  $\mathbf{H}$ . В формуле (7) только матрица  $\mathbf{H}$  является случайной, а остальные компоненты этой формулы являются детерминированными матрицами или числами. Поэтому для вычисления средней пропускной способности канала связи в (7) и производится усреднение по распределению  $p(\mathbf{H})$ .

При усреднении будем учитывать, что элементы матрицы  $\mathbf{H}$  являются независимыми комплексными гауссовскими случайными величинами с одинаковыми дисперсиями и одинаковыми математическими ожиданиями (в случае релейских замираний в радиоканале математические ожидания этих величин равны нулю).

#### 4. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ

На основании соотношений (6) и (7) возможно проведение теоретического анализа средней пропускной способности. Обратим внимание на тот факт, что второе и третье слагаемые в (6) являются детерминированными величинами, в то время как первое слагаемое в (6) является случайной величиной, зависящей от случайной матрицы канала связи  $\mathbf{H}$ . Поэтому выражение (7) в случае высоких отношений сигнал/шум с учетом (6) может быть приближенно представлено следующим образом:

$$C_{av,cor} \approx \int_{\mathbf{H}} \log_2 \det \left( \frac{\rho}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}' \right) p(\mathbf{H}) d\mathbf{H} + \log_2 \det(\mathbf{R}_r) + \log_2 \det(\mathbf{R}_i), \text{ бит/с/Гц.} \quad (8)$$

С целью упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что число передающих антенн  $M$  равно числу приемных антенн  $N$ , тогда матрица  $\mathbf{H}$  будет квадратной матрицей размерности  $M \times M$ . Преобразуем первое слагаемое в соотношении (6), используя известные свойства определителей [22]:

$$\log_2 \det \left( \frac{\rho}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}' \right) = \log_2 \left( \left( \frac{\rho}{M} \right)^M \cdot \det(\mathbf{H} \mathbf{H}') \right) = M \log_2 \left( \frac{\rho}{M} \right) + 2 \cdot \log_2 |\det(\mathbf{H})|. \quad (9)$$

Для нахождения средней пропускной способности  $C_{av}$  необходимо усреднить случайную величину  $\lambda = 2 \cdot \log_2 |\det(\mathbf{H})|$  по распределению  $p(\mathbf{H})$ . Найдем распределение случайной величины  $\gamma = \det(\mathbf{H})$ . Выражение для величины  $\gamma$  может быть представлено следующим образом [22]:

$$\gamma = \det(\mathbf{H}) = \sum_p (-1)^{f(p)} \cdot h_{1f(1)} \cdot h_{2f(2)} \cdots h_{Mf(M)} = \sum_{i=1}^{M!} d_i, \quad (10)$$

где  $f(p)$  -  $p$ -я перестановка чисел  $1; 2; \dots; M$ . Всего перестановок в (10) -  $M!$ . Случайные величины  $d_i$  представляют собой произведения  $M$  независимых комплексных гауссовских случайных величин  $h_{ij}$ , являющихся элементами матрицы  $\mathbf{H}$ . Случайные величины  $d_i$  некоррелированы (это следует непосредственно из (10)), но зависимы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии, определяемые следующим выражением:

$$E\{d_i\} = 0, \quad D_i = D\{d_i\} = (2\sigma_h^2)^M = 2^M \sigma_h^{2M}. \quad (11)$$

Из некоррелированности случайных величин  $d_i$  следует, что дисперсия случайной величины  $\gamma$   $D_\gamma$  есть сумма дисперсий величин  $d_i$ , т.е.,  $D_\gamma = M! \cdot 2^M \cdot \sigma_h^{2M}$ .

Аппроксимируем распределение случайной величины  $\gamma$  гауссовским распределением:

$$p_\gamma(x) \approx \frac{1}{2\pi D_\gamma} \exp\left(-\frac{x^2}{2D_\gamma}\right) \quad (12)$$

с параметром  $D_\gamma = M! \cdot 2^M \cdot \sigma_h^{2M}$ . Ниже возможность использования гауссовской аппроксимации будет исследована путем статистического моделирования.

Теперь найдем распределение  $p_\delta(x)$  случайной величины  $\delta = |\gamma| = |\det(\mathbf{H})|$ . Из теории вероятностей известно, что модуль комплексной гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием имеет релеевское распределение [11], [17]:

$$p_\delta(x) = \frac{x}{D_\gamma} \exp\left(-\frac{x^2}{2D_\gamma}\right), \quad x \geq 0. \quad (13)$$

Усредним теперь по распределению  $p(\mathbf{H})$  случайную величину  $2 \cdot \log_2 |\det(\mathbf{H})| = 2 \cdot \log_2 |\gamma| = 2 \cdot \log_2 \delta$ . Это эквивалентно с учетом известного правила вычисления математического ожидания от функции от случайной величины [17] усреднению случайной величины  $2 \cdot \log_2 |\det(\mathbf{H})| = 2 \cdot \log_2 \delta$  по релеевскому распределению (13) величины  $\delta = |\gamma|$ :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} \log_2 |\det(\mathbf{H})| p(\mathbf{H}) d\mathbf{H} &= 2 \int_0^{\infty} \log_2 |\det(\mathbf{H})| \frac{|\det(\mathbf{H})|}{D_\gamma} \exp\left(-\frac{|\det(\mathbf{H})|^2}{2D_\gamma}\right) d|\det(\mathbf{H})| = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \log_2 \delta \cdot p_\delta(\delta) d\delta = 2 \int_0^{\infty} \log_2 \delta \frac{\delta}{D_\gamma} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2D_\gamma}\right) d\delta = const \cdot \int_0^{\infty} \delta \exp(-p \cdot \delta^2) \ln \delta d\delta, \quad (14) \end{aligned}$$

где  $p = \frac{1}{2D_\gamma}$ ;  $const = \frac{2}{D_\gamma} \cdot \log_2 e$ .

Используя известный табличный интеграл [16, Раздел 2.6.21.2, стр. 527], из (14) можно получить следующее выражение:

$$2 \cdot \int_{\mathbf{H}} \log_2 |\det(\mathbf{H})| d\mathbf{H} \approx [-C_e + \ln(2D_\gamma)] \cdot \log_2 e \approx 1.443 \cdot [-0.577 + \ln(2D_\gamma)], \quad (15)$$

где  $C_e \approx 0.577$  - константа Эйлера.

Используя (8), (14) и (15), получим приближенную формулу для средней пропускной способности  $C_{av}$  системы ММО, в которой отсутствует пространственная корреляция замираний:

$$C_{av} \approx M \log_2 \left(\frac{\rho}{M}\right) + 1.443 \cdot [-0.577 + \ln(2D_\gamma)], \text{ бит/с/Гц.} \quad (16)$$

Если в канале связи имеет место пространственная корреляция замираний, то с учетом (8) и (16) нетрудно получить приближенное выражение для средней пропускной способности  $C_{av,cor}$ :

$$C_{av,cor} \approx M \log_2 \left(\frac{\rho}{M}\right) + 1.443 \cdot [-0.577 + \ln(2D_\gamma)] + \log_2 \det(\mathbf{R}_r) + \log_2 \det(\mathbf{R}_t), \text{ бит/с/Гц.} \quad (17)$$

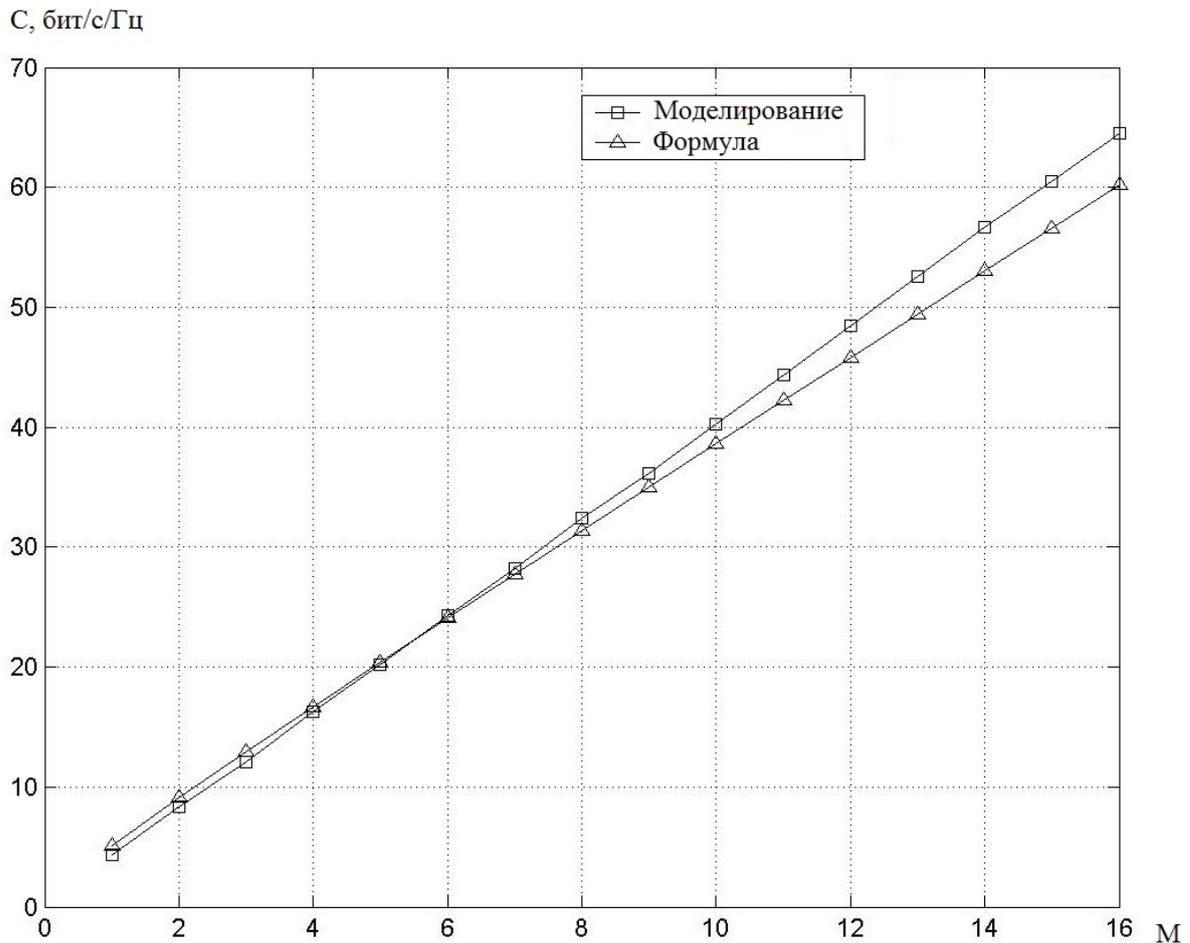
## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для исследования справедливости полученных формул (16) и (17), а также влияния пространственной корреляции на среднюю пропускную способность системы канала связи ММО было проведено ее статистическое моделирование для различного числа антенн  $M$ .

На рис. 1 приведены графики зависимостей средней пропускной способности  $C_{av}$  от числа антенн  $M$  для радиоканала системы ММО с некоррелированными замираниями, полученные при отношении сигнал/шум 12 дБ с помощью формулы (16) и путем моделирования. Как видно из рис. 1, результаты теоретического анализа (16) незначительно отличаются от результатов моделирования, особенно при небольшом ( $M \leq 8$ ) числе антенн. Это показывает справедливость формулы (16) и возможность использования гауссовской аппроксимации распределения случайной величины  $\gamma$ . На рис. 1 наблюдается практически линейный рост средней пропускной способности с увеличением числа антенн  $M$ , что согласуется с известными асимптотическими результатами, имеющими место при большом числе антенн [2], [4], [10], [26], [27], [28].

На рис. 2 для радиоканала системы ММО с различным числом антенн приведены зависимости средней пропускной способности от коэффициента корреляции  $r$  замираний в соседних антеннах. Указанные зависимости получены с помощью формулы (17), а также с помощью моделирования. Кривые пропускной способности построены для пространственно коррелированных замираний в % по отношению к пропускной способности для некоррелированных замираний

$$\left(\frac{C_{av,cor}}{C_{av}}\right).$$



**Рис. 1.** Зависимости средней пропускной способности  $C$  (бит/с/Гц) канала ММО с некоррелированными замираниями от числа антенн  $M$ , полученные путем моделирования и по формуле (16).

Методика моделирования следующая: моделирование проводилось с помощью формулы (7). На каждом шаге генерируется реализация случайной матрицы  $\mathbf{H}$ , состоящей из независимых комплексных гауссовских случайных величин, для которой вычисляется пропускная способность  $C_{\text{cor}}(\mathbf{H})$ , эти значения суммируются и находится средняя пропускная способность  $C_{\text{av,cor}}$  для всех реализаций матрицы  $\mathbf{H}$ . Корреляция в радиоканале ММО учитывается с помощью корреляционных матриц  $\mathbf{R}_r$  и  $\mathbf{R}_t$ , структура которых остается постоянной.

Условия проведения моделирования следующие: число передающих антенн  $M$  равно числу приемных антенн  $N$ ; в радиоканале системы ММО присутствуют неселективные релеевские замирания; корреляционная матрица  $\mathbf{R}_r$  замираний на приемной стороне равна соответствующей корреляционной матрице  $\mathbf{R}_t$  на передающей стороне [8]:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} 1 & r & r^4 & \dots & r^{(M-1)^2} \\ r & 1 & r & \dots & \vdots \\ r^4 & r & 1 & \dots & r^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & r \\ r^{(M-1)^2} & \dots & r^4 & r & 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где  $r$  - коэффициент корреляции замираний сигналов в двух соседних антеннах (при моделировании изменяется от 0.1 до 0.8 с шагом 0,1). Число реализаций составляет 10000, что обеспечивает приемлемую точность моделирования.

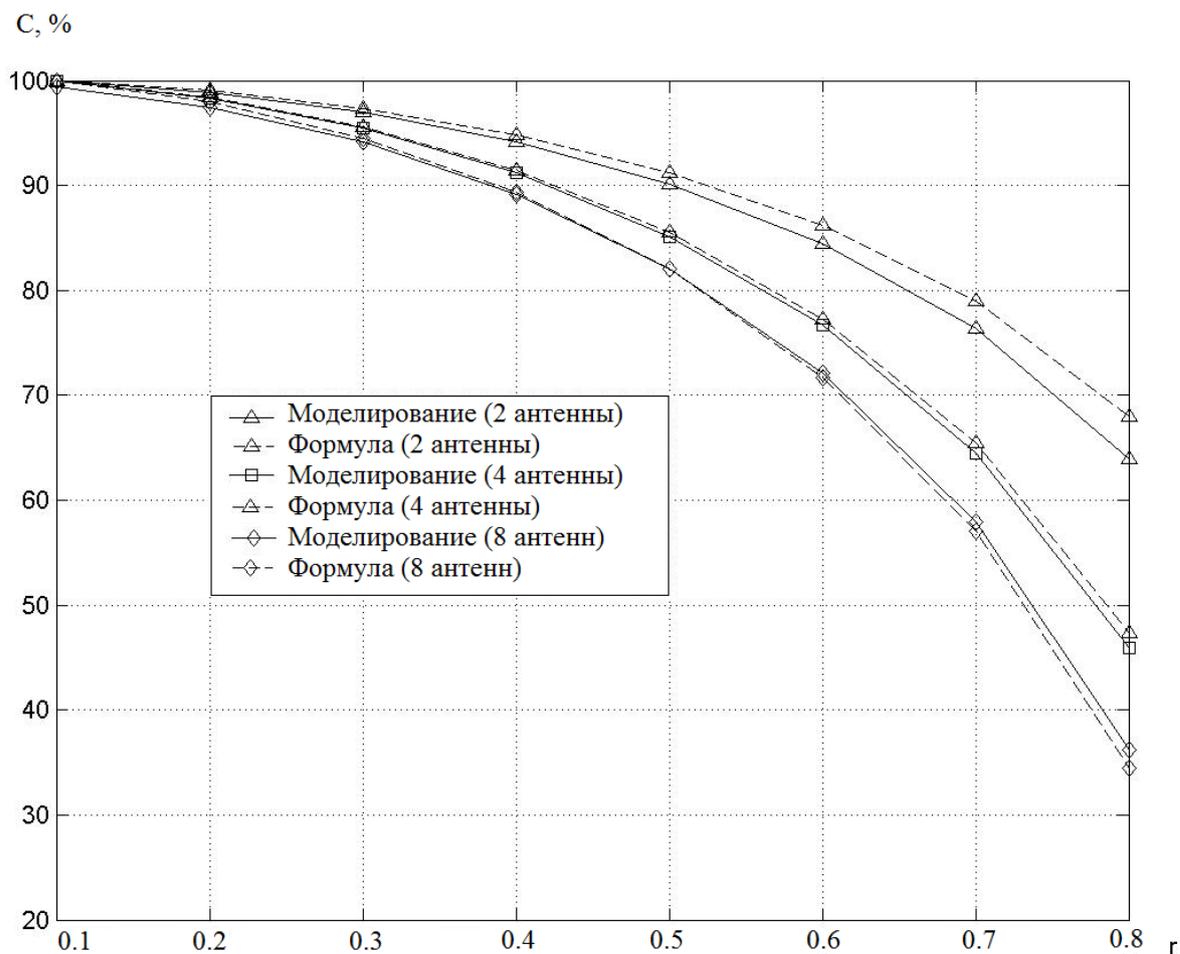


Рис. 2. Зависимости средней пропускной способности  $C$  (%) от коэффициента корреляции  $r$ , полученные путем моделирования и построенные по формуле (17) для разного числа антенн (2, 4, 8).

Рис. 2 показывает в целом хорошее совпадение теоретических результатов, полученных по формуле (17), с соответствующими результатами, полученными с помощью моделирования (с помощью формулы (7)). Следует заметить, что при увеличении числа передающих антенн в системе ММО точность формулы (17) повышается. Это объясняется тем, что гауссовская аппроксимация в выражении (10) становится более адекватной.

Из рис. 2 также видно, что с увеличением уровня пространственной корреляции в радиоканале системы ММО с релейскими замираниями средняя пропускная способность заметно снижается. Например, для случая  $M = 2$  антенн и значения  $r = 0.7$  коэффициента корреляции средняя пропускная способность радиоканала системы ММО уменьшается на 20 % по сравнению со средней пропускной способностью некоррелированного канала. С увеличением числа антенн  $M$  потери в пропускной способности увеличиваются. Так, например, для случая  $M = 8$  антенн и значения  $r = 0.7$  коэффициента корреляции средняя пропускная способность канала ММО снижается уже на 40 %.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены приближенные аналитические выражения (16) и (17) для пропускной способности каналов связи ММО с некоррелированными и пространственно-коррелированными релейскими замираниями. Указанные выражения позволяют весьма просто аналитически получить количественные оценки пропускной способности канала связи ММО для различных антенных конфигураций.

Показано, что средняя пропускная способность канала связи ММО существенно снижается с увеличением степени пространственной корреляции замираний, причем потери в пропускной способности канала увеличиваются с увеличением числа антенн в системе связи ММО.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hanzo L., Akhtman J., Wang L., et al. MIMO-OFDM for LTE, Wi-Fi and WiMAX. Coherent versus Non-Coherent and Cooperative Turbo-trancievers. U.K., Chichester: John Wiley & Sons, 2011.
2. Biglieri E., Calderbank R., Constantinides A., et al. MIMO Wireless Communication. U.K, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.
3. Foschini G. J., Gans M. J. On Limits of Wireless Communications in a Fading Environment When Using Multiple Antennas. Wireless Personal Communications, 1998, vol. 6, no 3, pp. 311–316.
4. Mohinder Jankiraman. Space-Time Codes and MIMO Systems. USA, IL, Boston: Artech House, 2004.
5. A. van Zelst. A Compact Representation of Spatial Correlation in MIMO Radio Channels. Proc. of the 10th Mediterranean Electrotechnical Conf. (MELECON), 2000, vol. 3, pp. 1218–1225.
6. Da-Shan Shiu, Foschini G. J., Gans M. J., et al. Fading Correlation and Its Effect on the Capacity of Multielement Antenna Systems. IEEE Transactions on Communications, 2000, vol. 48., no. 3. pp. 502–509.
7. MIMO System Technology for Wireless Communications. Edited by Tsoulos G. USA, FL, Boca Raton: CRC Press, 2006.
8. Paulraj, Arogyaswami, Rohit Nabar, and Dhananjay Gore. Introduction to Space-Time Wireless Communications. UK, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
9. Боккуци Д. Обработка сигналов для беспроводной связи. М.: Техносфера. 2012.
10. Costa N., Haykin S. Multiple-input, multiple-output channel models: theory and Practice. John Wiley & Sons, Inc., 2010.
11. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
12. David Tse and Pramod Viswanath. Fundamentals of Wireless Communication. U.K., Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
13. H. Ozcelic, M. Herdin, W. Weichselberger, et al. Deficiencies of the Kronecker MIMO radio channel model. IEEE Communication Letters, 2003, Vol. 39, no. 16, pp. 1209–1210.
14. Прокис Д. Цифровая связь. М.: Радио и связь, 2000.
15. Sibille A., Oestges C., Zanella A. MIMO from Theory to Implementation. UK: Elsevier, 2011.
16. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
17. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем, М.: Радио и связь, 1991.
18. Savo G. Glisic. Advanced Wireless Communications. 4G Cognitive and Cooperative Broadband Technologies. UK, Chichester: John Wiley & Sons, 2007.
19. S. Loyka and G.V. Tsoulos. Estimating MIMO system performance using the Correlation matrix approach. IEEE Communication Letters, 2002, vol. 6, no. 1, pp. 19-21.
20. 1GP97 Higher Order MIMO Testing with the R&S@SMW200A Vector Signal Generator. [http://www.rohde-schwarz.com/en/applications/higher-order-mimo-testing-with-the-r-s-smw200a-vector-signal-generator-application-note\\_56280-39170.html](http://www.rohde-schwarz.com/en/applications/higher-order-mimo-testing-with-the-r-s-smw200a-vector-signal-generator-application-note_56280-39170.html)
21. C. Oestges, Validity of the Kronecker model for MIMO correlated channels. IEEE 63rd Vehicular Technology Conference, 2006, vol. 6, pp. 2818–2822.
22. Тьртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007.
23. 3GPP TS 36.141 V12.3.0 (2014-03). 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Base Station (BS) conformance testing (Release 12).
24. J. Choi. Adaptive and Iterative Signal Processing. UK, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
25. Sassan Ahmadi. LTE-Advanced. A Practical Systems Approach for Understanding the 3GPP Releases 10 and 11 Radio Access Technologies. UK: Elsevier, 2014.
26. Jerry R. Hampton. Introduction to MIMO Communications. UK, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

27. Franco De Flaviis, Lluís Jofre, Jordi Romei, et al. Multiantenna Systems for MIMO Communications. USA, Boston: Morgan & Claupool, 2008.
28. Huang H., Papadias C., Venkatesan S. MIMO Communications for Cellular Networks. USA, Boston: Springer Science & Business Media, 2012.

## **Analysis of the capacity of MIMO system radio channel in conditions of spatially correlated fading**

**Kreindelin V.B., Pankratov D. Yu.**

The results of theoretical analysis and computer simulation of the capacity of MIMO system in conditions of spatially correlated fading are presented. As a result of the theoretical analysis, approximate analytical expressions were obtained for the capacity of MIMO system radio channel. These expressions allow to obtain analytically quantitative estimates of the capacity of MIMO system radio channel for various antenna configurations in the conditions of spatially correlated fading. The presented results of the simulation confirm the results of the theoretical analysis.

**KEYWORDS:** capacity, spatial correlation, fading, MIMO.