Информационные процессы, Том 17, № 1, 2017, стр. 43–60

Упаковка в контейнеры (перспективные модели, примеры) [1]

Марк Ш. Левин

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук
Большой Каретный пер. 19, Москва 127994, Россия
email: mslevin@acm.org
Поступила в редколлегию 12.03.2017

Аннотация—Статья посвящена перспективным задачам упаковки в контейнеры и некоторым приложениям. Предложен системный взгляд на постановки задач на основе множества элементов (объектов), множества контейнеров, бинарных отношений над указанными множествами (предшествование, доминирование, соответствие элементов контейнерам). Описаны специальные версии задач упаковки с оценками элементов (объектов) на основе мультимножеств. Кратко рассмотрены примеры в сетях связи: выбор информационных сообщений, двумерная упаковка сообщений в системах WiMAX.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: комбинаторная оптимизация, упаковка в контейнеры, мультимножество, приложение

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача упаковки в контейнеры является одной из наиболее известных задач комбинаторной оптимизации [6, 22, 34, 58]. Эта задача представляет собой специальный случай двух комбинаторных задач: (а) задачи одномерного раскроя (“cutting-stock”) [36, 69], (б) задачи балансировки сборочной линии (“assembly-line balancing”) [21]. На Рис. 1 представлена иллюстрация отношений между задачами.

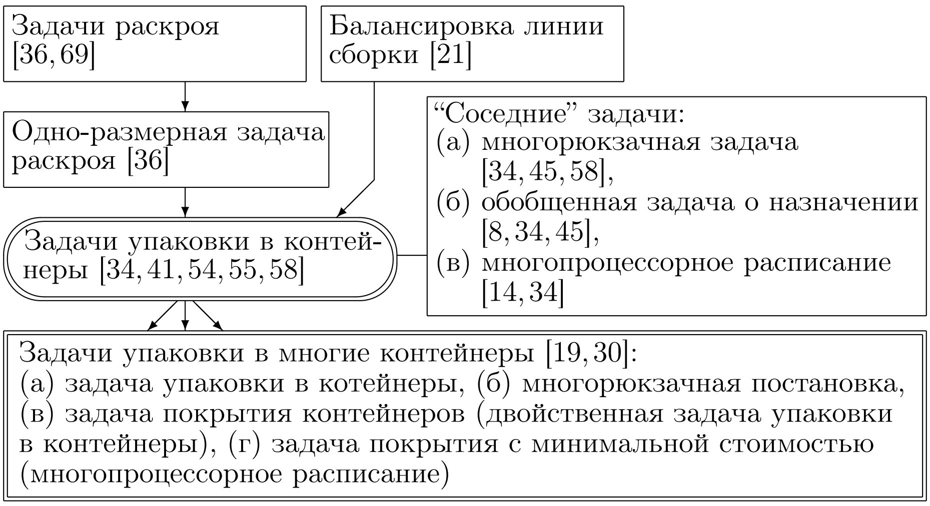

Рис. 1. Задачи упаковки в контейнеры и их соотношения

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований ном. 16-07-00092.

Задачу упаковки в контейнеры можно описать следующим образом (Рис. 2). Исходные данные включают следующее:

(i) множество элементов (объектов) $A = \{a_1, ..., a_i, ..., a_n\}$, каждый элемент a_i имеет вес $w_i \in (0, 1]$;

(ii) множество контейнеров (или блоков, рюкзаков) $B = \{B_1, ..., B_\kappa, ..., B_m\}$, объем (ресурс) каждого контейнера B_κ равен 1.

Основная (классическая) постановка задачи имеет вид [41–43, 68]:

Найти такое разбиение элементов (объектов), что:

(а) каждая часть множества элементов упакована в один и тот же контейнер с учетом ресурсного ограничения (т.е., сумма весов упакованных элементов в каждом контейнеры ≤ 1)

(б) общее число использованных контейнеров минимизируется.

Эта задача входит в число основных NP-трудных задач комбинаторной оптимизации [34,44].

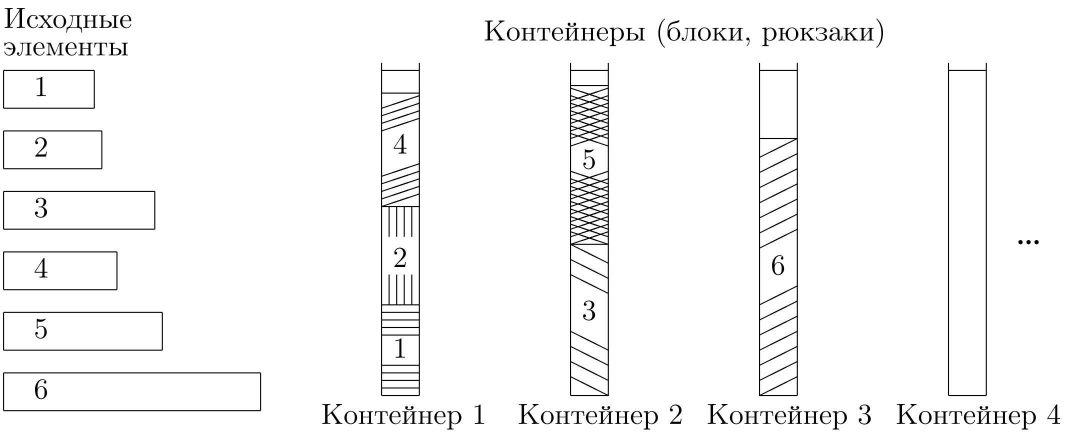

Рис. 2. Иллюстрация для задачи упаковки в контейнеры

Следует отметить, что могут рассматриваться различные типы элементов [2–5, 19, 24, 25, 31, 33, 34, 53, 56, 58, 59, 62, 65, 70]: прямоугольные элементы, 2D элементы, элементы с неправильной формой, элементы различного размера, составные 2D элементы (включая элементы с общими компонентами), 3D элементы, многоразмерные элементы, элементы в виде цилиндров, элементы в виде кругов и др.

Дополнительно, необходимо указать следующие бинарные отношения:

I. Бинарные отношения над исходными элементами и контейнерами

(элемент $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, контейнеры $B = \{B_1, ..., B_\kappa, ..., B_m\}$):

1.1. соответствие элементов контейнерами или предпочтение (для каждого элемента) как бинарное отношение (или взвешенное бинарное отношение): $R_{A \times B}$.

II. Бинарное отношение над элементами:

2.1. конфликты в виде бинарных отношения на парах элементов (такие пары элементов не должны быть упакованы в одном контейнере): $R^{confl}_{A \times A}$ (это отношение может рассматриваться как часть следующего отношения),

2.2. совместимость (например, по типу или цвету) как бинарное отношение для элементов, которые являются совместимыми (т.е., могут быть размещены в одном контейнере): $R^{compt}_{L \times L}$, здесь может быть использовано взвешенное бинарное отношение (например, для цветов, включая несимметричное бинарное отношение), *2.3.* совместимость (например, для составных элементов с общими компонентами), это близко к предыдущему случаю (может быть критично для "пересечения" составных элементов): $R^{compt-com}_{A\times A}$,

2.4. отношение предшествования над элементами (это может быть важно с случае упорядочения процесса упаковки элементов, упорядочения элементов в каждом контейнере): $R^{prec}_{A\times A}$,

2.5. важность (доминирование, предпочтение) элементов с точки зрения упаковки в контейнеры в виде линейного порядка или частичного порядка над элементами: $G(A, E^{dom})$ (частичный порядок может основываться на следующих оценках элементов: векторные оценки, оценки в виде мультимножеств).

III. Бинарные отношения над контейнерами:

3.1. важность контейнеров с точки зрения первого использования, линейный порядок или частичный порядок над контейнерами: $G(B, E^{imp})$ (частичный порядок может основываться на следующих оценках контейнеров: векторные оценки, оценки в виде мультимножеств).

Численные примеры указанных отношений могут быть представленя следующим образом (на основе примера на Рис. 2: 6 элементов и 4 контейнеров): (i) соответствие элементов контейнерам $R_{A\times B}$ (Таблица 1), (ii) отношение конфликтов элементов $R^{confl}_{A\times A}$ (Таблица 2), (iii) отношение совместимости элементов $R^{comp}_{A\times A}$ (например: по типу/цветы) (Таблица 3), (iv) отношение предшествования элементов $R^{prec}_{A\times A}$ (Рис. 3), (v) отношение доминирования элементов $G(A, E^{dom})$ (Рис. 4), (vi) отношение важности контейнеров $G(B, E^{imp})$ (Рис. 5).

Рассмотрим решение задачи упаковки в контейнеры (размещение элементов в контейнеры в виде Булевой матрицы): $S = \{A^1, ..., A^{\kappa}, ..., A^k, ..., A^m\}$, где $|A^{\kappa_1} \bigcap A^{\kappa_2}| = 0 \ \ \forall \kappa_1, \kappa_2 = \overline{1, m}$ (т.е., пересечение - пусто), $A = \bigcup_{\kappa=1}^{m} A^{\kappa}$.

В классической задаче упаковки в контейнеры (минимизация числа использованных контейнеров), $|A^{\kappa}| = 0 \ \forall \kappa = \overline{k+1, m}$ (использованы первые k контейнеров) и $A = \bigcup_{\kappa=1}^{m} A^{\kappa}$.

В обратной задаче упаковки в контейнеры (максимизация числа упакованных элементов в ограниченное число контейнеров), упаковывается часть наиболее важных элементов в m контейнеров: $\bigcup_{\kappa=1}^{m} A^{\kappa} \subseteq A$.

Дополнительные требования к решениям задачи упаковки (соответствие ограничениям) имеют вид:

1. Соответствие элементов контейнерам.

Выполняется следующее: $a_i \in A_{\kappa}$ **Если** $(a_i, B_{\kappa}) \in R_{A\times B}$.

2. Важность/доминирование элементов.

Это соответствует обратной задаче: **Если** $(a_{i_1}, a_{i_2}) \in R^{dom}_{A\times A}$ (т.е., $a_{i_1} \succeq a_{i_2}$) **Тогда** три случая являются правильными: (а) оба a_{i_1} и a_{i_2} упакованы в контейнер(ы), (б) оба a_{i_1} и a_{i_2} не упакованы в контейнер(ы), (в) a_{i_1} - упакован в контейнер и a_{i_2} - не упакован в контейнер.

3. Предшествование элементов.

В случае ограничения предшествования соответствующего отношению предшествования над элементами $R^{prec}_{A\times A}$, элементы должны быть линейно упорядочены в каждом контейнере (т.е., для каждого контейнера $\forall \kappa$): **Если** $(a_{i_1}, a_{i_2}) \in R^{prec}_{A\times A}$ и $a_{i_1}, a_{i_2} \in A_{\kappa}$ **Тогда** $a_{i_1} \rightarrow a_{i_2}$.

4. Конфликт элементов. В данном случае должно выполняться следующее:

$a_{i_1}, a_{i_2} \in A_{\kappa}$ **Если** $(a_{i_1}, a_{i_2}) \overline{\in} R^{confl}_{A\times A}$.

5. Совместимость элементов.

Здесь должно выполняться следующее: $a_{i_1}, a_{i_2} \in A_{\kappa}$ **Если** $(a_{i_1}, a_{i_2}) \in R^{comp}_{A\times A}$.

В общем случае, возможно использование функций штрафа для оценивания нарушения ограничений.

Таблица 1. Соответствие элементов контейнерам $R_{L\times B}$

Элемент a_i \ контейнер B_κ	B_1	B_2	B_3	B_4
a_1	3	2	1	0
a_2	3	1	0	0
a_3	1	3	2	0
a_4	3	2	2	0
a_5	1	3	1	1
a_6	2	3	3	1

Таблица 2. Отношение конфликтов элементов $R^{confl}_{A\times A}$

Элемент a_i \ элемент a_j	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	$\star$	1	1	1	0	0
a_2	1	$\star$	1	1	1	0
a_3	1	3	$\star$	4	1	0
a_4	1	1	1	$\star$	1	0
a_5	1	1	1	1	$\star$	0
a_6	1	0	0	0	0	$\star$

Таблица 3. Отношение совместимости элементов $R^{comp}_{A\times A}$

Элемент a_i \ элемент a_j	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	$\star$	1	1	1	0	0
a_2	1	$\star$	1	1	1	0
a_3	1	3	$\star$	4	1	0
a_4	1	1	1	$\star$	1	0
a_5	1	1	1	1	$\star$	0
a_6	1	0	0	0	0	$\star$

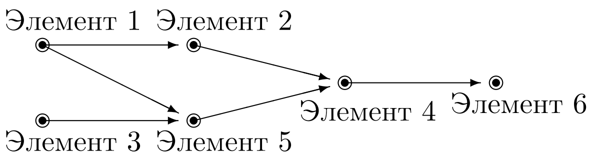

Рис. 3. Предшествование элементов $R^{prec}_{A\times A}$

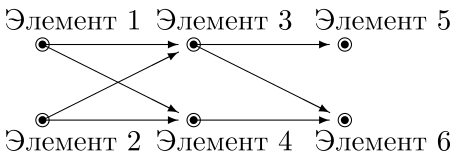

Рис. 4. Важность элементов $G(A, E^{dom})$

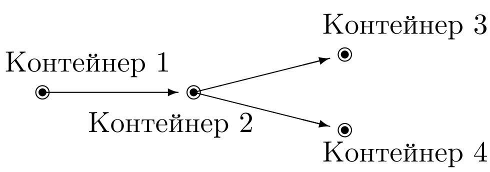

Рис. 5. Важность контейнеров $G(B, E^{imp})$

Большое число публикаций посвящено исследованию различных версия статических и динамических задач упаковки в контейнеры. Например, имеются известные обзорные работы [17–20, 23, 32, 34, 55, 58, 66]. Основная типология задач упаковки в контейнеры исследована в [19, 24, 25, 53, 70]. Многие работы посвящены обзорам алгоритмов [16, 20, 23, 28, 30, 37, 38, 41, 58, 63, 67]. Общая схема классификации задач упаковки в контейнеры предложена в [19]:

область | **целевая функция** | **класс алгоритмов** | **результаты** | **ограничения**,

где использованы следующие компоненты: (a) **область** описывает типы контейнеров (размеры и др.), (b) **целевая функция** описывает типы задач (т.е., минимизация числа контейнеров и др.), (c) **класс алгоритмов** описывает алгоритм (статический, реального времени, оценка сложности, жадный и др.), (d) **ограничения** описывают качество решений (например, асимптотическое поведение в худшем случае, абсолютное наихудшее значение, значение в среднем), (e) **ограничения** описывают ограничения на размеры элементов, на число элементов, которые могут быль упакованы, бинарные отношения над элементами, и т.п.

Рис. 6 иллюстрирует основные современные тренды развития постановок задач упаковки в контейнеры: (1) многокритериальные задачи, (2) задачи в условиях неопределенности, (3) задачи с дополнительными отношениями над элементами и контейнерами, (4) динамические задачи.

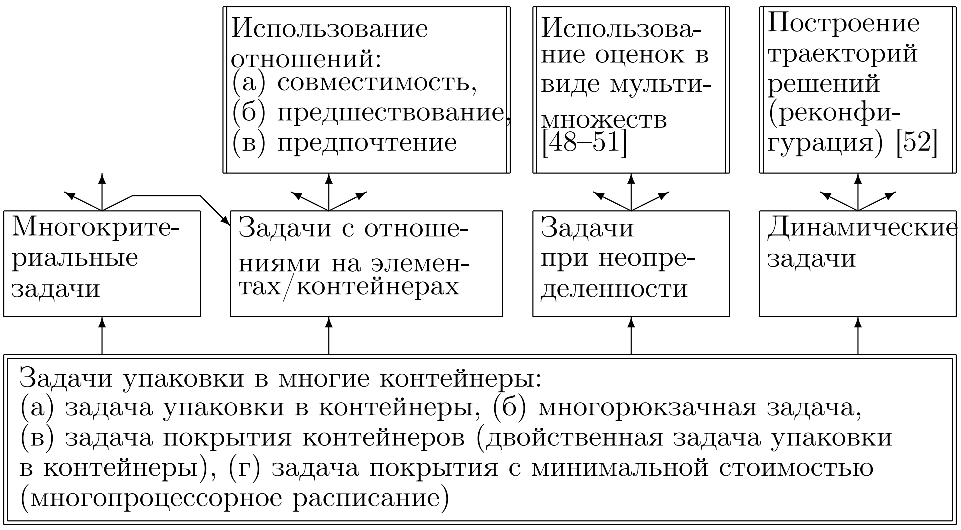

Рис. 6. Тренды развития постановок задач упаковки в контейнеры

Данная статья направлена на описание некоторых новых моделей задачи упаковки в контейнеры, включая задачи с оценками элементов в виде мультимножеств. Задачи упаковки в контейнеры (и их версии и обобщения) являются NP-трудными [34]. Материал статьи основан на предварительной публикации [51].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

2.1. Базовая постановка задачи

Классическая задача упаковки в контейнеры имеет следующие вид [41–43, 68]. Дано множество контейнеров размера V и набор n элементов (объектов) для упаковки с различными размерами $a_1, ..., a_n$. Задача имеет вид:

Найти целое число контейнеров B и B-разбиение $S_1 \bigcup ... \bigcup S_B$ множества $\{1, ..., n\}$ такое, что $\sum_{i \in S_k} a_i \leq V \ \ \forall k = 1, ..., B$.

Оптимальное решение имеет минимальное значение B. Значение B для оптимального решения обозначается OPT. Формальная постановка данной задачи в виде модели целочисленного линейного программирования имеет вид [58]:

$$\min B = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s.t. \quad B \geq 1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \leq V y_i, \ \forall i \in \{1, ..., n\} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \forall j \in \{1, ..., n\}$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \ \forall i \in \{1, ..., n\} \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall i \in \{1, ..., n\}, \ \forall j \in \{1, ..., n\},$$

где $y_i = 1$ если контейнер i- использован и $x_{ij} = 1$ если элемент j упакован в контейнер i.

2.2. Максимизация числа упакованных элементов (обратная задача)

Обратная задача упаковки в контейнеры направлена на максимизацию числа упакованных элементов (объектов). Два типа задач могут быть рассмотрены:

(i) максимизация числа упакованных элементов (число контейнеров фиксировано) [13];

(ii) "максимзация" общей оценки предпочтения для упакованных элементов (число контейнеров фиксировано) (имеется отношение предпочтения над множеством элементов) [31].

Описание данной обратной задачи рассмотрено в следующей секции.

3. ЗАДАЧИ С ОЦЕНКАМИ В ВИДЕ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

Описание введенных автором оценок в виде мультимножеств и соответствующих комбинаторных задач содержится в [48–50]. Далее приведены описания задач с оценками в виде мультимножеств, начиная с простейших постановок из [49,50] (задача о рюкзаке, задача блочного рюкзака).

3.1. Задача о рюкзаке с оценками в виде мультимножеств

Базовая задача о рюкзаке ("$0-1$ задача о рюкзаке") имеет вид [34,45,58]: (i) дано множество элементов $A = \{1, ..., i, ..., m\}$ параметрами $\forall i \in A$: полезность γ_i, требование по ресурсу (например, вес) a_i; (ii) дано органичение по ресурсу для рюкзака b. Модель имеет вид:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i \qquad s.t. \ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b, \quad x_i \in \{0, 1\}, \ i = \overline{1, m}$$

где $x_i = 1$ если отбирается элемент i и $x_i = 0$ - иначе.

В случае оценок в виде мультимножест полезность элемента имеет вид мультимножества $e_i, \ i \in \{1, ..., i, ..., n\}$ (вместо γ_i), агрегированная оценка в виде мультимножества используется для целевой функции ("максимизация") [48–50]: (а) агрегированная оценка в виде "обобщенной медианы", (б) агрегированная оценка в виде "медианы множества", (в) интегрированная оценка в виде мультимножества. Формальная постановка задачи о рюкзаке с оценками в виде мультимножеств и интегрированной оценкой для решения (решение $S = \{i | x_i = 1\}$) имеет вид:

$$\max \ e(S) = \biguplus_{i \in S = \{i | x_i = 1\}} e_i, \qquad s.t. \ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b; \quad x_i \in \{0, 1\},$$

где $\biguplus$ - оператор интегрирования оценок в виде мультимножеств.

В случае, когда для целевой функции используется оценка в виде медианы (M), модель имеет вид:

$$\max\ e(S) = \max\ M = arg \min_{M \in D} \quad | \biguplus_{i \in S = \{i | x_i = 1\}} \delta(M, e_i)| \qquad s.t.\ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

Дополнительно можно рассмотреть новую модель с учетом числа отобранных элементов (т.е., специальная двухкритериальная постановка) (решение $S = \{i|x_i = 1\}$):

$$\max\ e(S) = \max\ M = arg \min_{M \in D} \quad | \biguplus_{i \in S = \{i | x_i = 1\}} \delta(M, e_i)| \qquad \max \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

На Рис. 7 изображена соответствующая 2D-область качества решения.

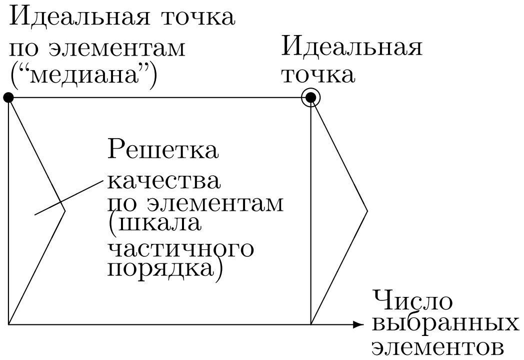

Рис. 7. “2D” область качества решения

3.2. Блочный рюкзак с оценками в виде мультимножств

В задаче блочного рюкзака элементы разделены на группы (без пересечения) и элементы отбираются из каждой группы с учетом общего ресурсного ограничения [34, 45, 58]. В простейшей версии из каждой группы отбирается одни элемент. Модель имеет вид (Булева переменная $x_{i,j} = 1$ если выбирается элемент (i, j)):

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} \gamma_{ij} x_{ij} \qquad s.t.\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} a_{ij} x_{ij} \leq b, \quad \sum_{j=1}^{q_i} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1, m}, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Специальная новая модель блочной задачи о рюкзаке была предложено в [49, 50]: (1) оценка полезности элемента e_{ij} $\quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, q_i} \quad \forall i)$ (вместо c_{ij}); (2) агрегированная оценка целевой функции в виде ”обобщенной медианы” (или ”медианы множества”) (“максимизация”). Множество элементов: $\quad A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i, \ \ A_i = \{(i, 1), (i, 2), ..., (i, q_i)\}$. Решение задачи представляет собой подмножество исходного множества элементов: $S = \{(i, j)|x_{i,j} = 1\}$. Получается модель:

$$\max\ e(S) = \max\ M = \ \arg \min_{M \in \overline{D}} \sum_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{i,j} = 1\}} |\delta(M, e_{i,j})|$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{q_i} a_{ij} x_{i,j} \leq b,\ \sum_{j=1}^{q_i} x_{ij} = 1, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

3.3. Многорюкзачная задача с оценками в виде мультимножеств

Базовая многорюкзачная задача включает следующее [34, 45, 58]: (i) множество элементов $A = \{1, ..., i, ..., m\}$; (ii) множество рюкзаков $B = \{B_1, ..., B_j, ..., B_k\}$ $(k \leq m)$; (iii) параметры $\forall i \in A$: полезность c_i, ограничения по ресурсу (например, вес) a_i; (iv) ресурс для каждого рюкзака $B_j \in B$: b_j. Такая задача является специальным случаем обобщенной задачи о назначении (многорюкзачная задача включает задачу упаковки в контейнеры как специальный случай). Модель имеет вид (т.е., “$0-1$ многорюкзачная задача”):

$$\max \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \leq b_j, \ \forall j = \overline{1,k}, \ \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \leq 1, \forall i = \overline{1,m}, \ x_{ij} \in \{0,1\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k},$$

где $x_{ij} = 1$ если элемент i отбирается в рюкзак B_j, $x_{ij} = 0$ - иначе.

При использовании оценок в виде мультимножеств, рассматривается оценка полезности элемента $e_i, i = \overline{1,m}$ (вместо c_i). Многорюкзачная задача с оценками в виде мультимножеств и интегрированной оценки решения (решений $S = \{(i,j) | x_{ij} = 1\}$) имеет вид:

$$\max \ e(S) = \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{i,j} = 1\}} e_i,$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \leq b_j, \ \forall j = \overline{1,k}, \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \leq 1, \ \forall i = \overline{1,m}, \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,k}.$$

При использовании оценки решения в виде медианы, получается модель:

$$\max \ e(S) = \max \ M = arg \min_{M \in D} \ | \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{ij} = 1\}} \delta(M, e_i)|$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \leq b_j, \ \forall j = \overline{1,k}, \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \leq 1, \ \forall i = \overline{1,m}, \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,k}.$$

С учетом дополнительного критерия в виде числа отобранных элементов (максимизация) модель имеет вид (решение $S = \{(i,j) | x_{ij} = 1\}$):

$$\max \ e(S) = \max \ M = arg \min_{M \in D} \ | \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{i,j} = 1\}} \delta(M, e_i)|$$

$$max \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \leq b_j, \ \forall j = \overline{1,k}. \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \leq 1, \ \forall i = \overline{1,m}, \quad x_{ij} \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,k}.$$

Здесь также можно рассматривать 2D область качества решения (Рис. 7).

3.4. Задачи о назначении с оценками в виде мультимножеств

Простейшая задача о назначении включает неотрицательную матрицу соответствия $\Upsilon = ||\gamma_{ij}||$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m})$ где c_{ij} - полезность назначения элемента i на позицию j. Задача имеет вид [34]:

Найти назначение $\pi = (\pi(1), ..., \pi(m))$ *элементов* i $(i = \overline{1,m})$ *на позиции* $\pi(i)$, *которое соответствует обобщенной эффективности:* $\sum_{i=1}^{m} \gamma_{i\pi(i)} \rightarrow \max$.

Простейшая алгебраическая модель имеет вид:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{i,j} x_{i,j}$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \leq 1,\ j = \overline{1,m};\ \sum_{j=1}^{m} x_{i,j} = 1,\ i = \overline{1,m};\ x_{i,j} \in \{0,1\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,m}.$$

Здесь $x_{i,j} = 1$ если элемент i назначается на позицию j, c_{ij} - полезность такого назначения. Для данной задачи существуют полиномиальные алгоритмы, например, Венгерский метод [46].

В обобщенной задаче о назначении каждый элемент i $(i = \overline{1,m})$ может быть размещен на k $(k \leq m)$ позиций (контейнеров, рюкзаков), ресурсное ограничение рассматривается для каждой позиции j $(j = \overline{1,k})$ (с соответствующим ограничением $\leq b_j$) (Рис. 8).

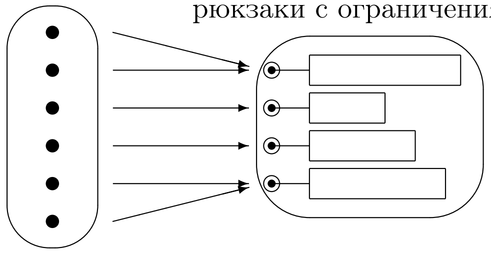

Рис. 8. Обобщенная задача о назначении

Модель имеет вид:

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \gamma_{i,j} x_{i,j}$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \leq 1,\ j = \overline{1,k};\ \sum_{j=1}^{k} x_{i,j} \geq 1,\ i = \overline{1,m};\ x_{i,j} \in \{0,1\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}.$$

При использовании оценок в виде мультимножеств, рассматривается оценка полезности назначения e_{ij} $(i = \overline{1,m}\quad j = \overline{1,k})$ вместо c_{ij}. Обобщенная задача о назначении с оценками в виде мультимножеств и интегрированной оценкой решения имеет вид (решение $S = \{(i,j) | x_{ij} = 1\}$):

$$\max\ e(S) = \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{i,j} = 1\}} e_i,$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \leq b_j,\ \forall j = \overline{1,k},\quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1,\ \forall i = \overline{1,m},\qquad x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}.$$

При использовании медианной оценки целевой функции, модель имеет вид:

$$\max\ e(S) = \max\ M = arg \min_{M \in D} \quad | \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{ij}=1\}} \delta(M, e_i)|$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \le b_j,\ \forall j = \overline{1,k}, \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1,\ \forall i = \overline{1,m}, \qquad x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}.$$

Дополнительно целесообразно рассмотреть новую постановку с учетом 2-го критерия в виде максимизации числа выбранных (т.е., назначенных) элементов (решение $S = \{(i,j) | x_{ij} = 1\}$):

$$\max\ e(S) = \max\ M = arg \min_{M \in D} \quad | \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{i,j}=1\}} \delta(M, e_i)| \qquad \max \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \le b_j,\ \forall j = \overline{1,k}. \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1,\ \forall i = \overline{1,m}, \qquad x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}.$$

Здесь также можно рассматривать 2D область качества решения (Рис. 7).

3.5. Обратная задача упаковки в контейнеры с оценками в виде мультимножеств

Следует отметить, обратная задача упаковки в контейнеры может быть сформулирована как многорюкзачная задача с равными рюкзаками (т.е., контейнерами). Базовая обратная задача упаковки в контейнеры имеет следующий вид [7, 9, 13, 26, 47, 61]. Имеются компоненты задачи: (i) множество элементов $A = \{1, ..., i, ..., m\}$; (ii) множество равных контейнеров $B = \{B_1, ..., B_j, ..., B_k\}$ (обычно, $k \le m$); (iii) параметры $\forall i \in A$: полезность γ_i, ресурсное требование (например, вес) a_i; (iv) одинаковое ресурсное ограничение в каждом контейнере $B_j \in B$: b. Модель имеет вид:

$$\max \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \le b, \forall j = \overline{1,k},\ \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le 1,\ \forall i = \overline{1,m},\ x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k},$$

где $x_{ij} = 1$ если элемент i обобран для контейнера B_j, $x_{ij} = 0$ - иначе.

При использовании оценок в виде мультимножеств, оценка полезность элемента $e_i, i = \overline{1,m}$ рассматривается (вместо c_i). Обратная задача упаковки в контейнеры с оценками в виде мультимножеств и интегрированной оценкой решения имеет вид (решение $S = \{(i,j) | x_{ij} = 1\}$):

$$\max\ e(S) = \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{i,j}=1\}} e_i,$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \le b,\ \forall j = \overline{1,k}, \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le 1,\ \forall i = \overline{1,m}, \qquad x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}.$$

В случае медианной оценки для целевой функции, модель имеет вид:

$$\max\ e(S) = \max\ M = arg \min_{M \in D} \quad | \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j) | x_{ij}=1\}} \delta(M, e_i)|$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \le b,\ \forall j = \overline{1,k}, \quad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le 1,\ \forall i = \overline{1,m}, \qquad x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}.$$

Двухкритериальная формулировка задачи с максимизацией числа упакованных элементов имеет вид (решение $S = \{(i,j)|x_{ij} = 1\}$):

$$\max\ e(S) = \max\ M = arg \min_{M \in D}\ | \biguplus_{(i,j) \in S = \{(i,j)|x_{i,j}=1\}} \delta(M, e_i)| \qquad \max \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} \leq b,\ \forall j = \overline{1,k}.\ \ \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \leq 1,\ \forall i = \overline{1,m}, \quad x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}.$$

Здесь также можно рассматривать 2D область качества решения (Рис. 7).

3.6. Задача упаковки в контейнеры с конфликтами элементов

Задача упаковки в контейнеры с конфликтами элементов заключается в упаковке заданного множества элементов в минимальное число контейнеров с учетом ограничения несовместимости элементов (т.е., конфликта элементов) [27, 29, 35, 40, 64]. Описание задачи следующее. Задано n элементов (множество A), соответствующие веса элементов w_1, w_2, ... w_n, множество одинаковых контейнеров ($k = 1, 2, ...$) с ресурсом каждого контейнера b. Предполагается: $w_1 \geq w_2 \geq ... \geq w_n$. Отношение конфликта элементов задается в виде графа $G = (A, E)$, где ребро $(\iota_1, \iota_2) \in E$ существует в случае, если элементы $\iota_1, \iota_2 \in A$ находятся в конфликте или $w_{\iota_1} + w_{\iota_2} > b$. Вводятся бинарные переменные: (а) y_k: $y_k = 1$ если используется контейнер k, (б) $x_{\iota k}$ имеет вид: $x_{\iota k} = 1$ если элемент i упакован в контейнер k. Модель имеет вид:

$$min\ z = \sum_{\iota=1}^{n} y_k$$

$$s.t.\ \sum_{\iota=1}^{n} w_\iota x_{\iota k} \leq b y_k\ \forall k = \overline{1,n};\ \ \sum_{\iota=1}^{n} x_{\iota k} = 1\ \forall \iota = \overline{1,n};\ \ x_{\iota_2 k} + x_{\iota_2 k} \leq 1\ \forall (\iota_1, \iota_2) \in E,\ \forall k = \overline{1,n};$$

$$y_k \in \{0,1\}\ \forall k = \overline{1,n};\ \ x_{\iota k} \in \{0,1\}\ \forall \iota = \overline{1,n},\ \forall k = \overline{1,n}.$$

Очевидно, что данная модель обобщает классическую задачу упаковки в контейнеры.

Обратная задача формулируется иначе. Пусть γ_ι - важность (полезность) упаковки элемента $\iota \in A$. Модель имеет вид:

$$max\ \sum_{\iota=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} \gamma_\iota\ x_{\iota k}$$

$$s.t.\ \sum_{\iota=1}^{n} w_\iota x_{\iota k} \leq b,\ \forall k = \overline{1,n};\ \ \sum_{\iota=1}^{n} x_{\iota k} \leq 1\ \forall \iota = \overline{1,n};\ \ x_{\iota_2 k} + x_{\iota_2 k} \leq 1\ \ (\iota_1, \iota_2) \in E,\ \forall k = \overline{1,n};$$

$$x_{\iota k} \in \{0,1\}\ \forall \iota = \overline{1,n},\ \forall k = \overline{1,n}.$$

В случае использования оценок в виде мультимножеств: e_ι - оценка важности элемента при упаковке элемента $\iota \in A$. При использовании интегрированной оценки целевой функции (решение $S = \{(\iota,k)|x_{\iota k} = 1\}$) модель имеет вид:

$$\max\ e(S) = \biguplus_{(\iota,k) \in S = \{(\iota,k)|x_{\iota,k}=1\}} e_\iota,$$

$$s.t.\ \sum_{\iota=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} w_{\iota,k} x_{\iota k} \leq b,\ \forall k = \overline{1,n};\ \ \sum_{\iota=1}^{n} x_{\iota,k} \leq 1\ \forall \iota = \overline{1,n};\ \ x_{\iota_2 k} + x_{\iota_2 k} \leq 1\ \ (\iota_1, \iota_2) \in E,\ \forall k = \overline{1,n};$$

$$x_{\iota k} \in \{0,1\} \ \forall \iota = \overline{1,n}, \ \forall k = \overline{1,n}.$$

Дополнительно может быть использована следующая целевая функция:

$$\max \sum_{\iota=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} x_{\iota,k} \ \ \forall \iota = \overline{1,n}, \ \forall k = \overline{1,n}.$$

4. ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ

Задачи планирования многопроцессорных расписаний на основе моделей упаковки в контейнеры исследуются многие годы [14, 15, 21, 39]. Здесь описана комбинаторная задача планирования на основе 2D модели упаковки в контейнеры для систем связи (одно-канальная связь, планирование в системе WiMAX). Следует отметить, что похожие задачи используются для распределения ресурсов в спутниковых системах связи (multispot satellite networks) [1].

4.1. Выбор сообщений

Базовая задача планирования с одним процессором часто рассматривается как задача о секретаре. Имеется n элементов (т.е., запросов, сообщений) $A = \{a_1, ..., a_i, ..., a_n\}$, каждый элемент a_i характеризуется весом w_i (например, время обработки). Задача заключается в следующем (Рис. 9):

Найти расписание (упорядочение элементов в виде перестановки) элементов множества A: $S =< s[1], ..., s[\iota], ..., s[n] >$ ($s[\iota]$) - порядковый номер элемента a_i, который обрабатывается ι-ым в расписании S) такое, что среднее время пребывания каждого элемента в системе $a_i \in A$ (или сумма всех времен ожидания и обработки для всех элементов) является минимальной: $t(S) = \frac{1}{n} \sum_{\iota=1}^{n} \tau_{s[\iota]}$, где время ожидания имеет вид ($\tau_{s[1]} = w_{s[1]}$, $\iota = \overline{2,n}$): $\tau_{s[\iota]} = w_{s[\iota]} + \sum_{\kappa=1}^{\iota-1} w_{s[\kappa]}$ $\forall \kappa = \overline{1,n}$.

Очевидно, что для получения оптимального решения в данной задаче необходимо упорядочить элементы по невозрастанию w_i (т.е., элемент с минимальным весом должен обрабатываться первым и т.д.). Оценка сложности такого алгоритма равна $O(n \log n)$). Отметим, что решение задачи можно определить с помощью Булевых переменных: $x_{a_i,s[\iota]} \in \{0,1\}$, где $x_{a_i,s[\iota]} = 1$ если элемент a_i назначен на место порядковое место $s[\iota]$ в решении (упорядочении). Таким образом, решение определяется Булевой матрицей: $X = ||x_{a_i,s[\iota]}||$, $i = \overline{1,n}$, $\iota = \overline{1,n}$.

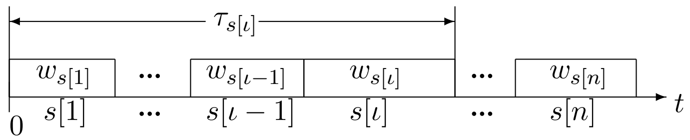

Рис. 9. Иллюстрация для задачи о секретаре

Описанная задача соответствует одно-канальной системе связи. В этом случае имеется временной интервал (T) и исходное множество сообщений A, которые нужно упорядочить для пересылки. Данная задача соответствует ситуации, когда все сообщения могут быть посланы в течение периода T (т.е., $\sum_{i=1}^{n} w_i \leq T$). Обычно временной интервал T недостаточен для пересылки всех сообщений (т.е., $\sum_{i=1}^{n} w_i \geq T$), и сообщения с высоким весом должны ждать следующего временного интервала. В этом случае задачу можно рассмотреть на основе рюкзачной модели:

$$\min \ t(S) = \frac{1}{n} \sum_{\iota=1}^{n} \ \tau_{s[\iota]} \ x_{a_i,s[\iota]}, \qquad \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{\iota=1}^{n} \ x_{a_i,s[\iota]}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}\ w_i \le T, \quad \sum_{\iota}^{n} x_{a_i,s[\iota]} \le 1 \ \ \forall i=\overline{1,n}, \quad x_{a_i,s[\iota]} \in \{0,1\}.$$

Здесь первая целевая функция требует линейного упорядочения элементов по неубыванию весов w_i (как в предыдущем случае). После использования данного алгоритма часть элементов (не вошедших в состав решения на данном временном интервале) формируют множества "ожидания" (т.е., множество элементов для следующего временного интервала). В общем случае целесообразно рассматривать для каждого элемента (сообщения) $a_i \in A$ два параметра: (i) вес (время обработки) w_i и (ii) число периодов ожидания $\gamma_i = 0, 1, \ldots$. В результате получается рюкзачная модель с тремя критериями:

$$\min\ t(S) = \frac{1}{n}\sum_{\iota=1}^{n} \tau_{s[\iota]}\ x_{a_i,s[\iota]}, \qquad \max \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}, \qquad \max \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}\ \gamma_i$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}\ w_i \le T, \quad x_{a_i,s[\iota]} \in \{0,1\}.$$

Рюкзачные модели относятся к классу NP-трудных задач. Процесс отбора элементов (сообщений) для включения в решение (т.е., для пересылки на даном временом интервале) может быть основан на выделении Парето-оптимальных элементов по двум паарметрам: (a) минимальный вес w_i и (b) максимальный "номер" ожидания γ_i. Получается эвристика:

Стадия 1. Определение $\widehat{A} = A$.

Стадия 2. Выделение Парето-оптимальных элементов в множестве $\widehat{A}$ по двум параметрам вес w_i (минимум) и важность γ_i (максимум) для получения подмножества $A^P \subseteq \widehat{A}$ (уровень элементов по Парето-правилу).

Стадия 3. Размещение элементов из A^P в контейнеры.

Стадия 4. Определение подмножества $\widehat{A} = A \backslash A^P$. Если $|\widehat{A}| = 0$, то переход к стадии 5. Иначе переход к стадии 2.

Стадия 5. Останов.

Оценки сложности приведенной версии алгоритма представлены в таблице 4 (по стадиям).

Таблица 4. Оценки сложности

Стадия	Описание	Оценка сложности (число шагов)
Стадия 1.	Определение $\widehat{A} = A$.	$O(1)$
Стадия 2.	Выделение уровня Парето-оптимальных элементов в $\widehat{A}$: $A^P \subseteq \widehat{A}$ (по параметрам w_i и γ_i)	$O(n^2)$
Стадия 3.	Размещение элементов из A^P в контейнеры.	$O(n)$
Стадия 4.	$\widehat{A} = A \backslash A^P$. Если все элементы рассмотрены, то переход к стадии 2. Иначе переход к стадии 5	$O(1)$
Стадия 5.	Останов	$O(1)$

Дополнительно, каждый элемент (сообщение) может иметь другие характеристики, например, важность. Тогда модель имеет вид:

$$\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} \beta_{a_i}\ x_{a_i,s[\iota]}, \quad \max \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}, \quad \max \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}\ \gamma_i$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}\ w_i \leq T, \quad x_{a_i,s[\iota]} \in \{0,1\},$$

где β_{a_i} - параметр важности элемента i.

В случае оценок в виде мультимножеств $e_{a_i,s[\iota]}$, получается модель:

$$\max\ M = arg \min_{M \in D}\ |\biguplus_{i \in \{i | x_{a_i,s[\iota]}=1\}} \delta(M, e_i)|, \quad \max \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}, \quad \max \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}\ \gamma_i$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{\iota=1}^{n} x_{a_i,s[\iota]}\ w_i \leq T, \quad x_{a_i,s[\iota]} \in \{0,1\},$$

Также можно рассматривать отношение предшествования над множеством элементв (сообщений). Это приводит к дополниьтельному логическому ограничению.

4.2. Двумерная задача упаковки в контейнеры для системы WiMAX

В последние годы 2D задача упаковки в контейнеры стала применяться при моделировании в современных телекоммуникационых систем (стандарты IEEE 802.16/WiMAX) [10–12, 57, 60]. На Рис. 10 приведена иллюстративная структура системы WiMAX.

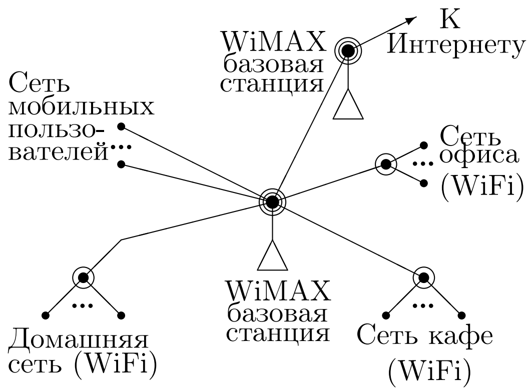

Рис. 10. Структура системы WiMAX

Общее описание данной подхода имеет вид [60]. Процесс передачи информации базируется на прямоугольном кадре (“down link zones”): время (ширина) $\times$ частота (высота). В результате пакеты данных соответствуют 2D элементам (объектам, прямоугольникам), которые размещаются в прямоугольном кадре (“down link zones”), т.е., в контейнере. Общая 3-фазная схема решения рассмотрена в [60]:

Фаза 1. Выбор информационных пакетов (сооообщений) для текущего периода передачи.

Фаза 2. Размещение выбранных пакетов в прямоугольных регионах (как обобщенный элемент).

Фаза 3. Размещение результирующих регионов в прямоугольном кадре.

Отметим, что фаза 1 может основываеться на модели из предыдущего раздела (т.е., на выбору Парето-оптимальных сообщений/пакетов для текущего временного интервала). Задача размещение (фаза 3) исследуется в [10–12] (включая постановку задачи, вопросы сложности, эвристики и вычислительные эксперименты). В мобильных системах системах связи типа

IEEE 802.16/WiMAX, применяется схема доступа OFDMA для улучшения эффективности использования частотного спектра. На уровне MAC (medium access control), кадр расширяется в двух направлениях (время, частота). Здесь используется двухстадийная схема для размещения ресурсов [10–12]: (а) упорядочение информационных пакетов в заданном временном кадре, (б) размещение пакетов между различными поднесущими частотами и временными интервалами. Вторая стадия может быть рассмотрена как 2D задача упаковки в контейнеры [10–12].

Представляется перспективным исследовать указанные задачи могут быть исследованы с применением порядковых оценок и/или оценок в виде мультимножеств.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье предложен общий взгляд на задачи упаковки в контейнеры на основе множества элементов (объектов), множества контейнеров и бинарных отношениях над указанными множествами. Рассмотрены целевые функции: (1) минимизация числа использованных бинов, максимизация числа упакованных элементов; (2) взвешенные и векторные версии указанных функций, (3) целевые функции на основе решеток. Представлены новые остановки задачи на основе применения оценок в виде мультимножеств. Приведены примеры для систем связи (выбор сообщений, упаковка сообщений в системах WiMAX).

Следует указать перспективные направления исследований: *1.* исследование различных версий задачи упаковки в контейнеры; *2.* рассмотрение многостадийных и динамических задач; *3.* проведение компьютерных экспериментов, *4.* использование рассмотренных в статье материалов в учебных курсах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alouf S., Altman E., Galtier J., Lalande J.-F., Touati C., Quasi-optimal resource allocation in multispot MFTDMA satellite networks. In: Cheng M.X., Li Y., Du D.-Z. (eds), *Combinatorial Optimization in Communication Networks.* Springer, pp. 325–365, 2006.

2. Bansal N., Caprara A., Sviridenko M., A new approximation method for set covering problems with applications to multidimensional bin packing. *SIAM J. Comput.*, 2009, vol. 39, no. 4, pp. 1256-1278.

3. Bennell J.A., Oliveira J.F., A tutorial in irregular shape packing problems. *J. of the ORS*, 2009, vol. 60, pp. S93-S105.

4. Bennell J.A., Song X., A beam search implementation for the irregular shape packing problem. *J. of Heuristics*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 167–188.

5. Birgin E.G., Martinez J.M., Ronconi D.P., Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach. *Eur. J. of Oper. Res.*, 2005, vol. 160, no. 1, pp. 19–33.

6. Brown A.R., *Optimal Packing and Depletion.* American Elsevier, New York, 1971.

7. Bruno J.I., Downey P.J., Probabilistic bounds for dual bin packing. *Acta Informatica*, 1985, vol. 22, pp. 333–345.

8. Cattrisse D.G., Van Wassenhove L.N., A survey of algorithms for the generalzied assignment problem. *Eur. J. of Oper. Res.*, 1992, vol. 60, no. 3, pp. 260–272.

9. Chung Y., Inverse bin-packing number problems: NP-hardness and approximation algorithms. *Manag. Sci. and Fin. Eng.*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 19–22.

10. Cicconetti C., Lenzini L., Lodi A., Martello S., Mingozzi E., Monaci M., Efficient two-dimensional data location in IEEE.802.16 OFDMA. In: *Proc. of IEEE INFOCOM 2010*, pp. 2160–2168, 2010.

11. Cicconetti C., Lenzini L., Lodi A., Martello S., Mingozzi E., Monaci M., A fast and efficient algorithm to exploit multi-user diversity in IEEE 802.16 BandAMC. *Comp. Netw.*, 2011, vol. 55, no. 16, pp. 3680–3693.

12. Cicconetti C., Lenzini L., Lodi A., Martello S., Mingozzi E., Monaci M., Efficient two-domensional data allocation in IEEE 802.16 OFDMA. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 2014, vol. 22, no. 5, pp. 1645–1658.

13. Coffman Jr. E.G., Leung J.Y.-T., Ting D.W., Bin packing: Maximizing the number of pieces packed. *Acta Informatica*, 1978, vol. 9, pp. 263–271.

14. Coffman Jr. E.G., Garey M.R., Johnson D.S., An application of bin-packing to multiprocessor scheduling. *SIAM J. Comput.*, 1978, vol. 7, no. 1, pp. 1–17.

15. Coffman Jr. E.G., Leung J.Y.-T., Combinatorial analysis of an efficient algorithm for processor and storage allocation. *SIAM J. Comput.*, 1979, vol. 8, no. 2, pp. 202–217.

16. Coffman Jr. E.G., Garey M.R., Johnson D.S., Approximation algorithms for bin packing: A survey. In: Hochbaum D. (Ed), *Approximation Algorithms.* PWS Publishing Company, pp. 46–93, 1996.

17. Coffman Jr. E.G., Courcoubetis C., Garey M.R., Johnson D.S., Shor P.W., Weber R.R., Yannkakis M., Bin packing with discrete item sizes, part I: Perfect packing theorems and the average case behavior of optimal packings. *SIAM J. Discr. Math.*, 2000, vol. 13, pp. 384–402.

18. Coffman Jr. E.G., Courcoubetis C., Garey M.R., Johnson D.S., Shor P.W., Weber R.R., Yannakakis M., Perfect packing theorem and the average-case behavior of optimal and online bin packing. *SIAM Review*, 2002, vol. 44, no. 1, pp. 95–108.

19. Coffman Jr. E.G., Csirik J., Classification scheme for bin packing theory. *Acta Cybern.*, 2007, vol. 18, no. 1, pp. 47–60.

20. Coffman Jr. E.G., Galambros G., Martello S., Vigo D., Bin packing approximation algorithms: combinatorial analysis. In: Pardalos P.M., Du D.-Z., Graham R.L. (eds), *Handbook of Combinatorial Optimization*, 2nd ed., Springer, pp. 455–531, 2013.

21. Conway R.W., Maxwell W.L., Miller L.W., *Theory of Scheduling.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

22. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C., *Introduction to Algorithms*, 2nd ed., Boston: MIT Press and McGraw-Hill, 2001.

23. Delorme M., Iori M., Martello S., *Bin Packing and Cutting Stock Problems: Mathematical Models and Exact Algorithms.* Res. Report OR-15-1 Univ. of Bologna, 2015.

24. Dyckhoff H., A typology of cutting and packing problems. *Eur. J. of Oper. Res.*, 1990, vol. 44, no. 2, pp. 145-159, 1990.

25. Dyckhoff H., Finke U., *Cutting and Packing in Production and Distribution: a Typology and Bibliography.* Springer, Berlin, 1992.

26. Epstein L., Favrholdt L.M., On-line maximizing the number of item packed in variable-sized bins. *Acta Cybern.*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 57–66.

27. Epstein L., Levin A., On bin packing with conflicts. *SIAM J. on Optim.*, 2008, vol. 19, no. 3, pp. 1270–1298.

28. Epstein L., Favrholdt L.M., Kohrt J.S., Comparing online algorithms for bin packing problems. *J. of Scheduling*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 13–21.

29. Fernandes Muritiba A.E., Iori M., Malaguti E., Toth P., Algorithms for the bin packing problem with conflicts. *INFORMS J. on Comput.*, 2010, vol. 22, no. 3, pp. 401-415.

30. Fukunaga A.S., Korf R.E., Bin completion algorithms for multicontainer packing, knapsack, and covering problems. *J. of Art. Intell. Res.*, 2007, vol. 28, pp. 393–429.

31. Фуремс Е.М., *Модели упаковки в многокритериальных задачах принятия решений при ограниченных ресурсах.* Препринт, ВНИИСИ, Москва, 1986.

32. Фуремс Е.М., Обратная задача упаковки с качественными критериями - постановки и обзор методов. *Искусственный интеллект и принятие решений*, 2016, вып. 3, С. 31–41.

33. Galambos G., Kellerer H., Woeginger G.J., A lower bound for on-line vector packing algorithms. *Acta Cybern.*, 1994, vol. 11, pp. 23–34.

34. Garey M.R., Johnson D.S., *Computers and Intractability. The Guide to the Theory of NP-Completeness.* W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

35. Gendreau M., Laporte G., Semmet F., Heuristics and lower bounds for the bin packing problem with conflicts. *Comp. and Oper. Res.*, 2004, vol. 31, no. 3, pp. 347–358.

36. Gilmore P.C., Gomory R.E., A linear programming approach to the cutting stock problem II. *Oper. Res.*, 1963, vol. 11, pp. 863–888.

37. Hopper E., Turton B., Application of genetic algorithms to packing problems - a review. In: Chawdry P.K., Roy R., Kant R.K. (eds.), *Proc. of the 2nd On-line World Conference on Soft Computing in Engineering Design and Manufacturing*, Springer, pp. 279-288, 1997.

38. Hopper E., Turton B.C.H., A review of the application of meta-heuristic algorithms to 2D strip packing problems. *Artif. Intell. Rev.*, 2001, vol. 16, no. 4, pp. 257–300.

39. Hubscher R., Glover F., Applying tabu search with influential diversification to multiprocessor scheduling. *Comp. and Oper. Res.*, 1994, vol. 21, no. 8, pp. 877–884.

40. Jansen K., An approximation scheme for bin packing with conflicts. *J. of Comb. Opt.*, 1999, vol. 3, pp. 363–377.

41. Johnson D.S., *Near-optimal bin-packing algorithm.* Doctoral Thesis, Dept. of Mathematics, MIT, Cambridge, Mass., 1973.

42. Johnson D.S., Fast algorithms for bin packing. *J. of Comp. and Syst. Sci.*, 1974, vol. 8, no. 3, pp. 272–314.

43. Johnson D.S., Demers A., Ullman J.D., Garey M.R.,Graham R.L., Worst-case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithm. *SIAM J. Optim.*, 1974, vol. 3, no. 4, pp. 299–325.

44. Karp R.M., Reducibility among combinatorial problems. In: Miller RE, Thatcher JW (eds) *Complexity of Computer Computations.* Plenum, pp. 85–103, 1972.

45. Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D., *Knapsack Problems.* Springer, Berlin, 2004.

46. Kuhn H.W., The Hungarian method for the assignment problems. *Nav. Res. Log.*, 2005, vol. 52, no. 1, pp. 7–21.

47. Labbe M., Laporte G., Martello S., Upper bounds and algorithms for the maximum cardinality bin packing problem. *Eur. J. of Oper. Res.*, 2003, vol. 149, no. 3, pp. 490–498.

48. Levin M.Sh., Modular design and improvement of the management system in the smart home with the use of interval multiset estimates. *J. of Commun. Technol. Electr.*, 2013, vol. 58, no. 6, pp. 584–593.

49. Левин М.Ш., *Технология принятия решений для модульных систем.* Элетр. книга, Москва, 2013. http://www.mslevin.iitp.ru/Levin-bk-Nov2013-071.pdf

50. Levin M.Sh., *Modular System Design and Evaluation.* Sprigner, 2015.

51. Levin M.Sh., Towards bin packing (preliminary problem survey, models with multiset estimates). Elec. prepr., 39 p., May 24, 2016. http://arxiv.org/abs/1605.07574 [cs.AI]

52. Левин М.Ш., О реконфигурации решений в комбинаторной оптимизации. *Информационные процессы*, 2016, том 16, ном. 4, pp. 414–429.

53. Lodi A., Martello S., Vigo D., Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two-dimensional bin packing problems. *INFORMS J. on Comput.*, 1999, vol. 11, no. 4, pp. 345–357.

54. Lodi A., Martello S., Vigo D., Recent advances on two-dimensional bin packing problems. *Disc. Appl. Math.*, 2002, vol. 123, no. 1-3, pp. 379–396.

55. Lodi A., Martello S., Monaci M., Two-dimensional bin packing problems: A survey. *Eur. J. of Oper. Res.*, 2002, vol. 141, no. 2, pp. 241–252.

56. Lodi A., Martello S., Vigo D., TSpack: a unified tabu search code for multidimensional bin packing problems. *Ann. of Oper. Res.*, 2004, vol. 131, no. 1-4, pp. 203–213.

57. Lodi A., Martello S., Monaci M., Cicconetti C., Lenzini L., Mingozzi E., Eklund C., Moilanen J., Efficient two-dimensional packing algorithms for mobile WiMAX. *Man. Sci.*, 2011, vol. 57, pp. 2130–2144.

58. Martello S., Toth P., *Knapsack Problems.* Wiley, Chichester, 1990.

59. Martello S., Pisinger D., Vigo D., The three-dimensional bin packing problem. *Oper. Res.*, 2000, vol. 48, no. 2, pp. 256–267.

60. Martello S., Two-dimensional packing problems in telecommunications. *Pesquisa Operacional*, 2014, vol. 34, no. 1, pp. 31–38.

61. Peeters M., Degraeve Z., Branch-and-price algorithms for dual bin packing and maximum cardinality bin packing problem. *Eur. J. of Oper. Res.*, 2006, vol. 170, no. 2, pp. 416–439.

62. Pisinger D., Sigurd M., The two-dimensional bin packing problem with variable sizes and costs. *Discr. Optim.*, 2005, vol. 2, no. 2, pp. 154-167.

63. Reeves C., Hybrid genetic algorithms for bin-packing and related problems. *Ann. of Oper. Res.*, 1996, vol. 63, no. 3, pp. 371-396.

64. Sadykov R., Vanderbeck F., Bin packing with conflicts: a generic branch-and-price algorithm. *INFORMS J. on Comput.*, 2013, vol. 25, no.2, pp. 244-255.

65. Seiden S.S., van Stee R., Epstein L., New bounds for variable sized online bin packing. *SIAM J. on Comput.*, 2003, vol. 32, no. 2, pp. 455–469.

66. Sweeney P.E.,Paternoster E.R., Cutting and packing problems: a categorized, application-orientated research bibliography. *J. of the ORS*, 1992, vol. 43, no. 7, pp. 691-706.

67. Terashima-Martin H., Ross P., Farias-Zarate C.J., Lopez-Camacho E., Valenzuela-Rendon M., Generalized hyper-heuristics for solving 2D regular and irregular packing problems. *Ann. of Oper. Res.*, 2000, vol. 179, no. 1, pp. 369-392.

68. Ullman J.D., *The performance of a memory allocation algorithm.* Techn. Report 100, Princeton Univ., Princeton, NJ, 1971.

69. Valerio de Carvalho J.M., LP models for bin packing and cutting stock problems. *Eur. J. of Oper. Res.*, 2002, vol. 141, no. 2, pp. 253-273.

70. Wascher G.,Haussner H., Schumann H., An improved typology of cutting and packing problems. *Eur. J. of Oper. Res.*, 2007, vol. 183, no. 3, pp. 1109-1130.

Bin Packing Problem (prospective models, examples)

Levin M.Sh.

The paper addresses some prospective bin packing problems and some applications. A systemic glance to bin packing problems is suggested: (a) basic element sets (item set, bin set, item subset assigned to bin), (b) binary relation over the sets: relation over item set as compatibility, precedence, dominance; relation over items and bins (i.e., correspondence of items to bins). Special versions of bin packing problems are described with multiset estimates of items. Applied examples are considered for communication systems: (i) selection of information messages, (ii) 2D packing of messages in WiMAX systems.

KEYWORDS: combinatorial optimization, bin-packing, multiset, application