*Информационные процессы, Том 18, № 3, 2018, стр. 149–162*




# О трансляционно компактных функциях[1]

**В.В.Чепыжов**

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*
Поступила в редколлегию 25.06.2018

**Аннотация**—В работе рассмотрены трансляционно компактные функции, которые являются обобщением почти периодических функций по Бору или по Степанову. Доказаны критерии трансляционной компактности в пространствах $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$, $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ и $L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Приведены примеры трансляционно компактных функций, которые не являются почти периодическими функциями. Доказаны основные свойства трансляционно компактных функций.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** почти периодические функции, трансляционно компактные функции.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Теория почти периодических функций, которые обобщают периодические и квазипериодические функции, являются важным разделом функционального анализа. Для непрерывных функций это понятие было введено Гаральдом Бором (см., например, [1]) и затем было обобщено для измеримых функций другими математиками, например, в работах В.В.Степанова. Почти периодические функции используются в задачах, связанных с дифференциальными уравнениями, в теории устойчивости, в динамических системах и т.п. (см., например, [2–4]).

Принято определять почти периодические функции с помощью понятия $\varepsilon$-периода. Однако существует альтернативный способ определения этих функций, который состоит в следующем. Пусть $\mathcal{M}$ – полное метрическое пространство с метрикой $\mu_{\mathcal{M}}(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим пространство непрерывных ограниченных функций $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ со значениями в $\mathcal{M}$. Функция $f \in C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ называется почти периодической по Бору, если семейство ее сдвигов $\{f(s+h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ образует предкомпактное множество в пространстве $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ с топологией равномерной сходимости, в которой последовательность функций $\{f_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к функции $f(s)$ при $n \to \infty$, если

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} \rho_{\mathcal{M}}(f_n(s), f(s)) \to 0 \ (n \to +\infty).$$

Трансляционно компактные функции являются обобщением почти периодических функций. В определении этих функций топология равномерной сходимости пространства $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ заменяется на более слабую топологию, например, на топологию локальной сходимости в пространстве $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$. В этой топологии последовательность функций $\{f_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $f(s)$ при $n \to \infty$, если для любого $[t_1,t_2] \subset \mathbb{R}$

$$\max_{s\in[t_1,t_2]} \rho_{\mathcal{M}}(f_n(s), f(s)) \to 0 \ (n \to +\infty).$$

Функция $f \in C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ называется трансляционно компактной, если семейство ее сдвигов $\{f(s+h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в пространстве $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ с топологией локальной сходимости.

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Легко построить примеры трансляционно компактных функций, которые не являются почти периодическими. Если рассмотреть измеримые функции, а вместо топологии локальной сходимости в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ взять другую, например, топологию локальной сходимости в пространстве $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – это некоторое банахово пространство, то получатся другие классы трансляционно компактных функций, которые являются обобщением понятия почти периодической функции по Степанову.

Трансляционно компактные функции, как и почти периодические функции, весьма полезны при изучении асимптотического поведения решений неавтономных дифференциальных уравнений, в частности в теории аттракторов динамических систем, порождаемых диссипативными дифференциальными уравнениями с частными производными. Понятие трансляционно компактной функции позволяет существенно расширить классы неавтономных дифференциальных уравнений, для которых можно построить глобальные аттракторы и изучит их структуру (см., например, [4–8]).

Опишем кратко содержание статьи. В разделе 2 рассмотрены почти периодические функции и сформулированы их основные свойства. В разделе 3 изучены трансляционно компактные функции в различных топологических пространствах. Основное внимание уделено трансляционно компактным функциям в пространствах $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$, $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ и $L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Сформулированы основные свойства этих функций и доказаны критерии трансляционной компактности, а также приведены примеры трансляционно компактных функций, которые не являются почти периодическими функциями.

## 2. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе будут коротко сформулированы основные свойства почти периодических функций. Более подробное изложение можно найти в книгах [2, 3].

Пусть $\mathcal{M}$ – полное метрическое пространство, и пусть имеется некоторая непрерывная функция $f(s),\ s\in\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}$.

Для некоторого $\varepsilon>0$ число $\tau\in\mathbb{R}$ называется *$\varepsilon$-периодом* функции $f(s)$, если

$$\mu(f(s+\tau),f(s))<\varepsilon,\quad \forall s\in\mathbb{R},$$

где $\mu(a_1,a_2)=\mu_{\mathcal{M}}(a_1,a_2)$ обозначает метрику (расстояние) в пространстве $\mathcal{M}$ между точками $a_1,\ a_2\in\mathcal{M}$.

Множество чисел $A\subseteq\mathbb{R}$ называется *относительно плотным,* если найдется такое число $l>0$, что $[\alpha,\alpha+l]\cap A\neq\emptyset$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$.

**Определение 1.** Непрерывная функция $f(s)$ называется *почти периодической (по Бору)*, если множество $\varepsilon$-периодов $f$ образует относительно плотное множество для любого $\varepsilon>0$, то есть, найдется такое число $l=l(\varepsilon)$, что для всех $\alpha\in\mathbb{R}$ отрезок $[\alpha,\alpha+l]$ содержит некоторый $\varepsilon$-период $\tau$ функции $f(s)$: $\tau\in[\alpha,\alpha+l]$.

Почти периодические (п.п.) функции имеют следующие основные свойства. Множество значений $\{f(s)\mid s\in\mathbb{R}\}$ любой п.п. функции $f$ предкомпактно в $\mathcal{M}$. В частности, функция $f$ ограничена. П.п. функция является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Сумма п.п. функций будет тоже п.п. функцией. Равномерный (по $s\in\mathbb{R}$) предел п.п. функций – вновь п.п. функция.

Через $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ обозначается метрическое пространство ограниченных непрерывных функций со следующей метрикой:

$$\mu_b(f_1,f_2)=\sup_{s\in\mathbb{R}}\mu_{\mathcal{M}}(f_1(s),f_2(s)).\tag{1}$$

Если пространство $\mathcal{M} = \mathcal{E}$ – банахово, то пространство $C_b(\mathbb{R};\mathcal{E})$ также банахово, и множество всех п.п. функций, которое обозначается $\overset{\circ}{C}(\mathcal{E})$, образует в нем замкнутое подпространство.

Имеет место следующий критерий Бохнера–Америо.

**Теорема 1.** *Непрерывная функция $f(s)$ из $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ является п.п. если, и только если, семейство функций $\{f^h \mid h \in \mathbb{R}\} = \{f(s+h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ является предкомпактным в $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$.*

Множество $\{f^h \mid h \in \mathbb{R}\}$ называется множеством трансляций функции $f$.

В пространстве $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ действует естественная трансляционная группа

$$\{T(t)\}: \ (T(t)f)(s) = f(t+s),$$

которая, очевидно, является изометрией на $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$, т.е.,

$$\mu_b(T(t)f_1, T(t)f_2) = \mu_b(f_1, f_2), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ясно так же, что группа $\{T(t)\}$ непрерывна в пространстве $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$.

Пусть $f(s)$ – некоторая п.п. функция. Замыкание его множества трансляций в пространстве $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ называется *оболочкой* функции $f(s)$ в $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ и обозначается

$$\mathcal{H}(f) = \Big[\{f^h \mid h \in \mathbb{R}\}\Big]_{C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{H}(f) \subseteq \overset{\circ}{C}(\mathcal{M})$. Оболочка $\mathcal{H}(f)$ имеет следующее важное свойство: для любой функции $g(s) \in \mathcal{H}(f)$ семейство ее положительных трансляций $\{g^h(s)\}_{h\geq 0}$ является всюду плотным множеством в $\mathcal{H}(f)$. (Это свойство называется свойством *рекуррентности* п.п. функции). В частности,

$$\mathcal{H}(f) = \omega(\mathcal{H}(f)) = \omega(\{f\}) = \omega(\{g\}), \ \forall\, g \in \mathcal{H}(f),$$

где $\omega(A)$ – это $\omega$-предельное множество для $A$. Напомним, что

$$\omega(A) = \bigcap_{\tau\geq 0}\left[\bigcup_{t\geq\tau} S(t)A\right]_{C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})}.$$

Очевидно, множество $\mathcal{H}(f)$ является строго инвариантным относительно группы трансляций,

$$T(t)\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(f), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

В силу свойства рекуррентности, $\mathcal{H}(f)$ обладает следующим свойством минимальности: любое замкнутое строго инвариантное подмножество $\mathcal{H}(f)$ совпадает с самим $\mathcal{H}(f)$.

В заключении, отметим еще одно полезное свойство. Почти периодическая функция однозначно определяется своими значениями но любой полуоси $[\alpha, +\infty)$, в частности, для любой пары п.п. функций $f_1$, $f_2$ выполнены равенства

$$\mu_b(f_1, f_2) = \sup_{s\in\mathbb{R}} \mu_{\mathcal{M}}(f_1(s), f_2(s)) = \sup_{s\geq\alpha} \mu_{\mathcal{M}}(f_1(s), f_2(s)), \quad \forall\,\alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Особым подклассом п.п. функций служат квазипериодические функций.

Обозначим через $\mathbb{T}^k = [\mathbb{R} \bmod 2\pi]^k$ $k$-мерный тор. Рассматривается функция

$$\varphi(\omega) \in C(\mathbb{T}^k; \mathcal{M}),\ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \mathbb{T}^k.$$

Иначе говоря, функция $\varphi(\omega) \in C(\mathbb{R}^k; \mathcal{M})$ и она является $2\pi$-периодической по каждому аргументу $\omega_i$ :

$$\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_i + 2\pi, \ldots, \omega_k) = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_k), \quad \forall\, i = 1, \ldots, k.$$

**Определение 2.** Функция

$$\sigma(s) = \varphi(\alpha_1 s, \alpha_2 s, ..., \alpha_k s) = \varphi(\alpha s) \tag{3}$$

называется *квазипериодической* со значениями в пространстве $\mathcal{M}$. Здесь $\alpha = (\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ – некоторый вектор, у которого компоненты $\{\alpha_i\}$ являются рационально независимыми числами.

Легко проверить, например, с помощью критерия Бохнера–Америо, что равенство (3) задает п.п. функцию со значениями в $\mathcal{M}$. Рассмотрим оболочку этой функции.

**Предложение 1.** *Оболочка $\mathcal{H}(\sigma)$ функции $\sigma(s)$ равна*

$$\{\varphi(\alpha s + \omega_0) \mid \omega_0 \in \mathbb{T}^k\} = \mathcal{H}(\sigma). \tag{4}$$

**Доказательство.** В самом дел, если $\sigma(s+h_n) = \varphi(\alpha s+\alpha h_n) \to g(s)\ (n \to \infty)$ в $C_b(\mathbb{R};\, \mathcal{M})$, то в силу компактности множества $\mathbb{T}^k$, можно считать (после перехода к подпоследовательности), что $\alpha h_n \bmod (2\pi)^k \to \omega_0\ (n \to \infty)$ для некоторого $\omega_0 \in \mathbb{T}^k$. Следовательно, $\varphi(\alpha s + \alpha h_n) \to \varphi(\alpha s+\omega_0)\ (n \to \infty)$ в $C_b(\mathbb{R};\, \mathcal{M})$ и $g(s) = \varphi(\alpha s+\omega_0)$ . Поэтому, $\mathcal{H}(\sigma) \subseteq \{\varphi(\alpha s+\omega_0) \mid \omega_0 \in \mathbb{T}^k\}$. С другой стороны, кривая $\left\{\alpha s \bmod (2\pi)^k \ \mid s \in \mathbb{R}\right\}$ образует всюду плотную обмотку тора $\mathbb{T}^k$, так как числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ являются рационально независимыми. В частности, для любого $\omega_0 \in \mathbb{T}^k$, существует последовательность $\{h_n\}$ такая, что $\alpha h_n \bmod (2\pi)^k \to \omega_0\ (n \to \infty)$ и, следовательно, $\varphi(\alpha s+\alpha h_n) \to \varphi(\alpha s+\omega_0)\ (n \to \infty)$ в $C_b(\mathbb{R};\, \mathcal{M})$, то есть, $\varphi(\alpha s+\omega_0) \in \mathcal{H}(\sigma)$ для любого $\omega_0 \in \mathbb{T}^k$.

Важным обобщением непрерывных почти периодических функций (по Бору) служат почти периодические функции по Степанову (см. [3]). Пусть $\mathcal{E}$ – банахово пространство. Обозначим через $L_p^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ пространство функций $f(s)$, $s \in \mathbb{R}$, со значениями в $\mathcal{E}$, которые являются локально интегрируемыми по норме в степени ($p \geq 1$), то есть,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds < \infty, \quad \forall [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}.$$

Обозначим через $L_p^b(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ пространство функций $f$ из $L_p^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ таких что,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds < \infty.$$

Пространство $L_p^b(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})} = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds\right)^{1/p}. \tag{5}$$

**Определение 3.** Функция $f \in L_p^b(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ называется *почти периодической по Степанову*, если множество трансляций $\{f^h(s) = f(h+s) \mid h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $L_p^b(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ относительно нормы (5).

Свойства п.п. функций по Степанову аналогичны свойствам п.п. функций по Бору. Можно всюду в этом разделе заменить пространство $C_b(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ на $L_p^b(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ и получить соответствующие свойства для этого класса функций (см, [2,3]).

## 3. ТРАНСЛЯЦИОННО КОМПАКТНЫЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе будут рассмотрены некоторые классы трансляционно компактных (тр.к.) функций в различных топологических (метрических) пространствах. Мы сформулируем критерии трансляционной компактности, а также докажем основные свойства тр.к. функций. В основном будут изучаться тр.к. функции в пространствах $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ и $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$.

Рассматривается некоторое топологическое пространство $\Xi = \{\xi(s), s \in \mathbb{R} \mid \xi(s) \in \Psi$ при почти всех $s \in \mathbb{R}\}$, которое предполагается хаусдорфовым. Здесь $\Psi$ – некоторое метрическое или банахово пространство. В частности, $\Xi$ может быть метрическим пространством. Рассмотрим операторы трансляции $T(h)$, на $\Xi$:

$$T(h)\xi(s) = \xi(h+s),\ s \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}.$$

Предполагается, что операторы $\{T(h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ образуют непрерывную группу на $\Xi$.

Рассмотрим произвольную функцию $\sigma_0(s) \in \Xi$. Напомним, что множество

$$\mathcal{H}(\sigma_0) = [\{T(h)\sigma_0 \mid h \in \mathbb{R}\}]_\Xi\,.$$

называется *оболочкой* функции $\sigma_0(s)$ в пространстве $\Xi$. Здесь $[X]_\Xi$ обозначает замыкание множества $X$ в топологии $\Xi$. Легко видеть, что $T(h)\mathcal{H}(\sigma_0) = \mathcal{H}(\sigma_0)$ для любого $h \in \mathbb{R}$.

**Определение 4.** Функция $\sigma_0(s) \in \Xi$ называется *трансляционно компактной (тр.к.) в пространстве* $\Xi$, если ее оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактна в $\Xi$.

Заметим, что почти периодические (по Бору) функции являются трансляционно компактными в пространстве $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ с топологией равномерной сходимости на всей оси, а функции, почти периодические по Степанову, являются трансляционно компактными в пространстве $L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})$ с метрикой (5).

Теперь будут рассмотрены другие примеры трансляционно компактных функций в различных пространствах $\Xi$.

### *3.1. Трансляционно компактные функции в* $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$

Рассматривается пространство $\Xi = C(\mathbb{R};\mathcal{M})$, состоящее из непрерывных функций $f(s), s \in \mathbb{R}$, со значениями в полном метрическом пространстве $\mathcal{M}$ с метрикой $\rho_\mathcal{M}(\cdot,\cdot)$. Пространство $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ снабжено топологией $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ локальной равномерной сходимости на любом ограниченном интервале числовой оси. По определению, последовательность $\{\sigma_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ сходится к функции $\sigma(s)$ при $n \to \infty$ в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$, если для любого $[t_1,t_2] \subset \mathbb{R}$

$$\max_{s\in[t_1,t_2]} \rho_\mathcal{M}(\sigma_n(s),\sigma(s)) \to 0\ (n \to +\infty). \tag{6}$$

Легко проверить, что введенное топологическое пространство $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ является метризуемым, например, с помощью метрики Фреше

$$\mu_1(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{n=1}^\infty a_n \frac{\mu_1^{(n)}(\sigma_1,\sigma_2)}{1+\mu_1^{(n)}(\sigma_1,\sigma_2)}, \tag{7}$$

где

$$\mu_1^{(n)}(\sigma_1,\sigma_2) = \max_{s\in[-R_n,R_n]} \rho_\mathcal{M}(\sigma_n(s),\sigma(s)).$$

Здесь $\{R_n\}$ – произвольная фиксированная монотонно возрастающая последовательность, для которой $R_n > 0,\ R_n \to +\infty\ (n \to \infty)$, и $\{a_n\}$ – любая фиксированная положительная последовательность такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Отметим, что топология, порождаемая метрикой (7) не зависит от выбора последовательностей $\{R_n\}$, $\{a_n\}$. Пространство $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ с метрикой (7) является полным.

Сформулируем простой критерий компактности в $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$.

**Предложение 2.** *Для того чтобы некоторое множество $\Sigma$ из пространства $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ было предкомпактно в $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$, необходимо и достаточно, чтобы множество $\Sigma_{[t_1,t_2]}$ было предкомпактно в $C([t_1, t_2]; \mathcal{M})$ при любом $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. (Здесь $\Sigma_{[t_1,t_2]}$ обозначает ограничение множества функций $\Sigma$ на отрезок $[t_1, t_2]$).*

**Доказательство.** Необходимость этого условия очевидна. Проверим достаточность. Пусть множество $\Sigma_{[t_1,t_2]}$ предкомпактно в $C([t_1, t_2]; \mathcal{M})$ при любом $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим любую последовательность $\{\sigma_n\} \subset \Sigma$. По условию, для отрезка $[-R_1, R_1]$ найдется подпоследовательность $\{\sigma_{n,1}\} \subset \{\sigma_n\}$, сходящаяся в $C([-R_1, R_1]; \mathcal{M})$. Аналогично, $\{\sigma_{n,1}\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{\sigma_{n,2}\}$ в $C([-R_2, R_2]; \mathcal{M}),\ R_2 > R_1$. Повторяя эту процедуру для каждого $R_k$, мы получим сходящиеся подпоследовательности $\{\sigma_{n,k}\} \subset \{\sigma_{n,k-1}\}$ в $C([-R_k, R_k]; \mathcal{M})$. Рассмотрим теперь диагональную последовательность $\{\sigma_{n,n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$, которая является подпоследовательностью каждой $\{\sigma_{n,k}\}$. Следовательно, $\{\sigma_{n,n}\}$ сходится в каждом пространстве $C([-R_k, R_k]; \mathcal{M})$, то есть, $\{\sigma_{n,n}\}$ сходится в $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$. Значит, множество $\Sigma$ – предкомпактно в $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$.

**Следствие 1.** *Множество $\Sigma \subset C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ предкомпактно в пространстве $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$, если, и только если*

**(i)** *при любом $t > 0$ множество $\{\sigma(t) \mid \sigma \in \Sigma\}$ предкомпактно в $\mathcal{M}$;*

**(ii)** *при любом $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ множество функций $\Sigma_{[t_1,t_2]}$ равностепенно непрерывно на $[t_1, t_2]$, то есть,*

$$\rho(\sigma(s_1), \sigma(s_2)) \le \alpha(|s_1 - s_2|, t_1, t_2),\ \forall \sigma \in \Sigma,\ \forall s_1, s_2 \in [t_1, t_2],$$

*где $\alpha(s, t_1, t_2) \to 0\ (s \to 0+)$, и функция $\alpha$ не зависит от $\sigma$.*

Это утверждение вытекает из критерия компактности Арцела–Асколи в $C([t_1, t_2]; \mathcal{M})$ и из предложения 2.

Пусть $\sigma(s) \in C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$, и ее оболочка $\mathcal{H}(\sigma) = [\{\sigma(t + s) \mid t \in \mathbb{R}\}]_{C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})}$. Рассмотрим трансляционно компактные (тр.к.) функции $\sigma(s)$ в пространстве $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$. По определению 4, оболочка $\mathcal{H}(\sigma)$ компактна в топологии $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$.

**Лемма 1.** *Любая тр.к. функция $\sigma(s)$ в пространстве $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ является ограниченной, то есть, $\rho_{\mathcal{M}}(\sigma(s), a) \le R$ при всех $s \ge 0$ для некоторых $a \in \mathcal{M}$ и $R \in \mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность функций $\sigma_n(s) = \sigma(s + n),\ n \in \mathbb{Z}$ на отрезке $[0, 1]$. Функция $\sigma(s)$ – тр.к. в $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$, следовательно, последовательность $\{\sigma_n(s)\}$ предкомпактна в $C([0, 1]; \mathcal{M})$. Критерий Арцела–Асколи влечет ограниченность последовательности $\{\sigma_n(s)\}$ в пространстве $C([0, 1]; \mathcal{M})$, то есть, $\rho_{\mathcal{M}}(\sigma_n(s), a) \le R$ при $s \in [0, 1]$ для некоторого $a \in \mathcal{M}$ и $R \in \mathbb{R}$, то есть, $\rho_{\mathcal{M}}(\sigma(s), a) \le R$ при всех $s \in \mathbb{R}$.

Из следствия 1 получаем

**Теорема 2.** *Функция $\sigma(s)$ является трансляционно компактной в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ если, и только если*

**(i)** *множество $\{\sigma(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $\mathcal{M}$;*

**(ii)** *функция $\sigma(s)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то есть, найдется положительная функция $\alpha(s) \to 0$ $(s \to 0+)$ такая, что*

$$\rho_{\mathcal{M}}(\sigma(t_1), \sigma(t_2)) \le \alpha(|t_1 - t_2|) \;\; \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Сформулируем основные свойство тр.к. функций в пространстве $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$, которые аналогичны свойствам п.п. функций.

**Предложение 3.** *Пусть $\sigma(s)$ – тр.к. функция в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$. Тогда*

**(i)** *любая функция $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$ также тр.к. в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$, и $\mathcal{H}(\sigma_1) \subseteq \mathcal{H}(\sigma)$ (включение может быть строгим);*

**(ii)** *множество $\mathcal{H}(\sigma)$ ограничено в $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$, то есть, $\rho_{\mathcal{M}}(\sigma_1(s), a) \le R$ при всех $s \in \mathbb{R}$ и для любого $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$, где $a$ и $R$ не зависят от $\sigma_1$;*

**(iii)** *множество $\mathcal{H}(\sigma)$ равностепенно непрерывно на $\mathbb{R}$, то есть, любая функция $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$ удовлетворяет (8) с одной и той же функцией $\alpha(s)$;*

**(iv)** *трансляционная группа $\{T(t)\}$ непрерывна на оболочке $\mathcal{H}(\sigma)$ в топологии пространства $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$;*

**(v)** *$T(t)\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.*

**Доказательство.** **(i)** Пусть $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$. Тогда $\sigma_0(s + h_n) \to \sigma_1(s)$ $(n \to \infty)$ в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ для некоторой $\{h_n\} \subset \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\{\sigma_1(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq [\{\sigma_0(t) \mid t \in \mathbb{R}\}]_{\mathcal{M}} \Subset \mathcal{M}.$$

Кроме того, неравенство (8) справедливо для $\sigma_1$ с той же самой функцией $\alpha$. В силу предложения 2, функция $\sigma_1(s)$ является тр.к. в пространстве $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$.

В тоже время, очевидно, что $\sigma_0(s + h_n + h) \to \sigma_1(s + h)$ $(n \to \infty)$ в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ при любом $h \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\{\sigma_1(s+h) \mid h \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{H}(\sigma_0)$, то есть, $\mathcal{H}(\sigma_1) \subseteq \mathcal{H}(\sigma_0)$ для всех $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. Свойства **(ii)** и **(iii)** доказаны**.**

**(iv)** Пусть $\sigma_n(s) \to \sigma(s)$ $(n \to \infty)$ в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$. Тогда $\sigma_n(s + h) \to \sigma(s + h)$ $(n \to \infty)$ в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ при любом $h \in \mathbb{R}$. Следовательно, $T(h)\sigma_n(s) \to T(h)\sigma(s)$ $(n \to \infty)$ в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ и трансляционная группа $\{T(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ непрерывна в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$ (в частности, она непрерывна на $\mathcal{H}(\sigma_0)$).

Свойство **(v)** очевидно. Утверждение доказано.

Отметим, что любая п.п. (по Бору) функция, то есть, трансляционно компактная в пространстве $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$, является тр.к. и в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$, поскольку сходимость в метрике пространства $C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$ влечет сходимость в метрике $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$.

Рассмотрим некоторые примеры трансляционно компактных функций, которые не являются почти периодическими.

**Пример 1.** Пусть $\zeta(s) \in C_b(\mathbb{R};\mathcal{M})$, и $\zeta(s) \to \zeta_+$ $(s \to +\infty)$, $\zeta(s) \to \zeta_-$ $(s \to -\infty)$ в $\mathcal{M}$, $\zeta_+, \zeta_- \in \mathcal{M}$ $(\zeta_+ \ne \zeta_-)$. Тогда $\zeta(s)$ – тр.к. функция в $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$. Кроме того, $\mathcal{H}(\zeta) = \{\zeta(s + t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\zeta_1(s) \equiv \zeta_+, \zeta_2(s) \equiv \zeta_-\}$. Очевидно, что $\zeta(s)$ не является п.п. функций.

**Пример 2.** Пусть $\zeta_+(s) = \varphi_1(\alpha_1 s, \dots, \alpha_{k_1} s), \zeta_-(s) = \varphi_2(\beta_1 s, \dots, \beta_{k_1} s)$ – две квазипериодические функции с различным числом рационально независимых частот. Пусть непрерывная функция $\zeta(s)$ удовлетворяет условиям:

$$\rho_{\mathcal{M}}\left(\zeta(s), \zeta_+(s)\right) \ (s \to +\infty),$$
$$\rho_{\mathcal{M}}\left(\zeta(s), \zeta_-(s)\right) \ (s \to -\infty).$$

Тогда $\zeta(s)$ – тр.к. в $C^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{M})$ и $\mathcal{H}(\zeta) = \{\zeta(s+t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \mathcal{H}(\zeta_+) \cup \mathcal{H}(\zeta_-)$.

**Пример 3.** Пусть $\varphi \in C_0^\infty([0,1]; E)$, где $E$ – банахово пространство. Зафиксируем некоторую последовательность вещественных чисел $\{l_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ такую, что $l_{n+1} - l_n \geq 1$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию $\sigma_0(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(s + l_n)$. В силу теоремы 2, $\sigma_0(s)$ тр.к. в $C^{loc}(\mathbb{R}; E)$.

**(i)** Пусть $l_n = n$. Тогда $\sigma_0(s) = \sigma_0(s+1)$ – периодическая функция с периодом 1, кроме того, $\mathcal{H}(\sigma_0) = \{\sigma_0(s+t) \mid t \in [0,1[\}$.

**(ii)** Пусть $l_{n+1} - l_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ и $\sigma_0(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(s + l_n)$. Тогда $\mathcal{H}(\sigma_0) = \{\sigma_0(s+t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\} \cup \{\varphi(s+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

**(iii)** Пусть $l_{2k} = k^2,\ l_{2k+1} = k^2 + 1,\ k \in \mathbb{N}$ и $l_n = -n^2$ при $n \leq 0$. Тогда $\mathcal{H}(\sigma_0) = \{\sigma_0(s+t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\} \cup \{\varphi(s+t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\varphi(s+t) + \varphi(s+t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

**Пример 4.** Зафиксируем последовательность $\{\sigma_n(s)\}_{n\in\mathbb{N}}$ тр.к. функций в $C^{loc}(\mathbb{R}; E)$. Предположим, что

**(i)** $\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\sigma_n(s) \mid s \in \mathbb{R}\} \Subset E$;

**(ii)** семейство $\{\sigma_n(s)\}$ равностепенно непрерывно на $\mathbb{R}$, то есть, справедливо (8) при всех $\sigma(s) = \sigma_n(s)$.

Построим новую тр.к. функцию $\sigma_0(s)$ в $C^{loc}(\mathbb{R}, E)$ такую, что множество $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{H}(\sigma_n) \subseteq \mathcal{H}(\sigma_0)$. Рассмотрим последовательность $\{\bar{\sigma}_i(s)\}$, в которой каждая функция начальной последовательности $\{\sigma_n(s)\}$ встречается бесконечно много раз. Такую последовательность легко построить. Пусть $\varphi \in C_0^\infty([-2,2]; \mathbb{R})$, $\varphi(s) \equiv 1$ при $s \in [-1,1]$. Положим

$$\sigma_0(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\sigma}_i(s - i^2)\varphi\left(\frac{s - i^2}{i}\right). \qquad (9)$$

Из теоремы 2 вытекает, что функция $\sigma_0$ является тр.к. в $C^{loc}(\mathbb{R}; E)$. Легко проверить, что $\sigma_n \in \mathcal{H}(\sigma_0)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то есть, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}(\sigma_n) \subseteq \mathcal{H}(\sigma_0)$.

Используя пример 4, получим следующее обобщение примера 1.

**Пример 5.** Пусть $\sigma_n(s) \equiv \sigma_n$, где $\sigma_n \in E$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\{\sigma_n\} \Subset E$. Для введенной выше функции $\sigma_0(s)$ выполнено: $\{\sigma_n\} \subseteq \mathcal{H}(\sigma_0)$, то есть, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность $\{t_i^{(n)}\}$ такая, что $\sigma_0(s + t_i^{(n)}) \to \sigma_n(s)$ $(i \to \infty)$ в $C^{loc}(\mathbb{R}; E)$.

### *3.2. Трансляционно компактные функции в $L_p^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{E})$*

Пусть $\mathcal{E}$ – банахово пространство, и $p \geq 1$. Рассмотрим пространство $\Xi = L_p^{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ функций $\sigma(s), s \in \mathbb{R}$, со значениями в $\mathcal{E}$, которые интегрируемы по Бохнеру по норме степени $p$. В частности, для любого отрезка $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\sigma(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds < +\infty.$$

Пространство $\Xi = L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ снабжено топологией локальной сходимости в среднем по норме в степени $p$, то есть, по определению, $\sigma_n \to \sigma$ $(n \to \infty)$ в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, если

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\sigma_n(s) - \sigma(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds \to 0 \ (n \to \infty) \text{ при любом } [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}.$$

Легко видеть, что $\Xi = L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ является линейным счетно нормируемым топологическим пространством. В частности, $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ метризуемо и полно.

Аналогично предложению 2 получаем

**Предложение 4.** *Множество $\Sigma \subset L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ предкомпактно в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, если, и только если множество $\Sigma_{[t_1,t_2]}$ предкомпактно в $L_p(t_1,t_2;\mathcal{E})$ для любого отрезка $[t_1,t_2] \subset \mathbb{R}$.*

Изучим тр.к. функции в пространстве $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Напомним, что функция $\sigma(s)$ называется тр.к. в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, если множество $\{\sigma(s+h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$.

Сформулируем критерий компактности в пространстве $L_p(a,b;\mathcal{E})$, который является обобщением критерия компактности в $L_p(a,b;\mathbb{R}^N)$ (см., например, [9, 10]).

**Предложение 5.** *Пусть $p \geq 1$. Множество $\Sigma$ предкомпактно в пространстве $L_p(a,b;\mathcal{E})$, если, и только если*

**(i)** *для любого $[t_1,t_2] \subseteq [a,b]$, множество $\left\{\int_{t_1}^{t_2} \psi(s)ds \mid \psi \in \Sigma\right\}$ предкомпактно в $\mathcal{E}$;*

**(ii)** *существует функция $\alpha(s)$, $\alpha(s) \to 0+$ $(s \to 0+)$, такая, что*

$$\int_a^b \|\psi(s) - \psi(s+l)\|_{\mathcal{E}}^p ds \leq \alpha(|l|) \ \text{ при всех } \psi \in \Sigma. \tag{10}$$

**Доказательство.** Для любой функции $\psi(s) \in L_p(a,b;\mathcal{E}) \equiv L_p$ положим $\psi(s) = 0$ при $s \notin [a,b]$. Докажем необходимость условий **(i)** и **(ii)**. Пусть $\Sigma$ предкомпактно в $L_p$. Рассмотрим конечную $\varepsilon$-сеть $\{\psi_j(s) \mid j = 1,\ldots,N\}$ множества $\Sigma$ в пространстве $L_p$. Для любой функции $\psi \in \Sigma$ найдется $\psi_i$, такая, что $\|\psi - \psi_i\|_{L_p} \leq \varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left\|\int_{t_1}^{t_2} \psi(s)ds - \int_{t_1}^{t_2} \psi_i(s)ds\right\|_{\mathcal{E}} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\psi(s) - \psi_i(s)\|_{\mathcal{E}} ds \\ &\leq C_p \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\psi(s) - \psi_i(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\psi(s) - \psi_i(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \varepsilon, \end{aligned}$$

где $C_p = (t_2 - t_1)^{1/q}$, $1/q + 1/p = 1$ при $p > 1$ (в силу неравенства Гельдера) и $C_1 = 1$ при $p = 1$. Из этого неравенства следует, что множество $\left\{\int_{t_1}^{t_2} \psi_i(s)ds \mid i = 1,\ldots,N\right\}$ образует $C_p\varepsilon$-сеть для множества $\left\{\int_{t_1}^{t_2} \psi(s)ds \mid \psi \in \Sigma\right\}$ в пространстве $\mathcal{E}$. Установим свойство **(ii)**. Любая фиксированная функция $\psi \in L_p$ является непрерывной в среднем в $L_p$, то есть, она удовлетворяет (10) для подходящей функции $\alpha$, которая зависит от $\psi$. Для выбранной выше $\varepsilon$-сети множества $\Sigma$ найдем такое $\delta > 0$, что

$$\int_a^b \|\psi_i(s) - \psi_i(s+l)\|_{\mathcal{E}}^p ds \leq \varepsilon^p \text{ for } |l| < \delta, \ i = 1,\ldots,N.$$

(Это возможно, так как семейство функций $\psi_i$ конечно.) Тогда для любой $\psi \in \Sigma$ по неравенству треугольника получаем

$$\left(\int_a^b \|\psi(s)-\psi(s+l)\|_{\mathcal{E}}^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b \|\psi(s)-\psi_i(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\left(\int_a^b \|\psi_i(s)-\psi_i(s+l)\|_{\mathcal{E}}^p ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \|\psi(s+l)-\psi_i(s+l)\|_{\mathcal{E}}^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le 3\varepsilon$$

при $|l| \le \delta$. Поскольку $\varepsilon$ было произвольным, свойство **(ii)** доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнены свойства **(i)** и **(ii)**. Построим $\varepsilon$-сеть множества $\Sigma$ для любого фиксированного $\varepsilon$. В силу **(ii)**, найдется $\delta > 0$, такое, что

$$\int_a^b \|\psi(s)-\psi(s+l)\|_{\mathcal{E}}^p ds \le \varepsilon \ \forall \psi \in \Sigma \tag{11}$$

если $|l| < \delta$. Рассмотрим отображение $J_h : L_p(a,b;\mathcal{E}) \to C([a,b];\mathcal{E})$, заданное формулой

$$(J_h\psi)(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \psi(s)ds.$$

Ясно, что $J_h\psi \in C([a,b];\mathcal{E})$. Зафиксируем $h$ и докажем, что $J_h\Sigma$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела–Асколи, и, следовательно, оно предкомпактно в $C([a,b];\mathcal{E})$. Во-первых, из **(i)** вытекает, что множество $J_h\Sigma = \{J_h\psi(t) \mid \psi \in \Sigma\}$ является предкомпактным в $\mathcal{E}$ для любого $t \in [a,b]$. Во-вторых, при любой $\psi \in \Sigma$

$$\|J_h\psi(t) - J_h\psi(t+l)\|_{\mathcal{E}} = \frac{1}{h}\left\|\int_t^{t+h} \psi(s)ds - \int_{t+l}^{t+l+h} \psi(s)ds\right\|_{\mathcal{E}}$$
$$= \frac{1}{h}\left\|\int_t^{t+h} \psi(s)ds - \psi(s+l)ds\right\|_{\mathcal{E}} \le \frac{C_p}{h}\left(\int_a^b \|\psi(s)ds - \psi(s+l)\|_{\mathcal{E}}^p ds\right)^{1/p} \le \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 = \frac{C_p}{h}\varepsilon$ и $|l| \le \delta$ (см. (11)). Следовательно, семейство $\{J_h\psi \mid \psi \in \Sigma\}$ равностепенно непрерывно при любом фиксированном $h$, а, значит, оно предкомпактно в $C([a,b];\mathcal{E})$. Одновременно с этим, $J_h\Sigma$ предкомпактно пространстве $L_p = L_p(a,b;\mathcal{E})$ с более слабой нормой. Следовательно, для любого фиксированного $\varepsilon$ найдется конечная $\varepsilon$-сеть $\{\psi_i(s) \mid j = 1,\dots,N\}$ для множества $J_h\Sigma$ в $L_p$. Используя свойство **(ii)**, выберем теперь $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha(|h|) \le \varepsilon^p$ в (10) при $|h| \le \delta$.

Оценим сверху норму $\|\psi - J_h\psi\|_{L_p}$ при любой $\psi \in \Sigma$. Имеем

$$\psi(t) - J_h\psi(t) = \frac{1}{h}\int_0^h (\psi(t) - \psi(s+t))\, ds.$$

Возьмем произвольную функцию $v(s) \in L_q(a,b;\mathcal{E}^*) = (L_p(a,b;\mathcal{E}))^* \equiv L_q^*$, $\|v\|_{L_q^*} \le 1$. Здесь $1/p + 1/q = 1$ и $q = \infty$ при $p = 1$. Имеем

$$|\langle v, \psi - J_h\psi\rangle| = \left|\int_a^b \left\langle v(t), \frac{1}{h}\int_0^h (\psi(t)-\psi(s+t))\, ds\right\rangle dt\right|$$
$$= \left|\frac{1}{h}\int_0^h \left\langle v(t), \int_a^b (\psi(t)-\psi(s+t))\, dt\right\rangle ds\right|$$
$$\le \|v\|_{L_q^*}\frac{1}{h}\int_0^h \left\{\int_a^b \|\psi(t)-\psi(s+t)\|^p\, dt\right\}^{\frac{1}{p}} ds \le \|v\|_{L_q^*}\frac{1}{h}\int_0^h \varepsilon ds = \|v\|_{L_q^*}\varepsilon \le \varepsilon.$$

Из теоремы Хана–Банаха (см. [11]) следует, что

$$\|\psi - J_h\psi\|_{L_p(a,b;\mathcal{E})} \le \varepsilon,\ 0 < h \le \delta,\ \forall\psi \in \Sigma. \tag{12}$$

Зафиксировав $h < \delta$, рассмотрим конечную $\varepsilon$-сеть $\{\psi_i(s) \mid i = 1, \ldots, N\}$ для $J_h\Sigma$ в $L_p$. Для любой функции $\psi \in \Sigma$ найдется $\psi_i$, такая, что $\|J_h\psi - J_h\psi_i\|_{L_p} \le \varepsilon$. Применяя (12), получаем

$$\begin{aligned}\|\psi - \psi_i\|_{L_p} \le \|\psi - J_h\psi\|_{L_p} + \|J_h\psi - J_h\psi_i\|_{L_p}\\ + \|J_h\psi_i - \psi_i\|_{L_p} \le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \quad \forall\psi \in \Sigma.\end{aligned}$$

Следовательно, $\{\psi_i(s) \mid i = 1, \ldots, N\}$ образует $3\varepsilon$-сеть для $\Sigma$ в пространстве $L_p$. Тем самым установлено, что множество $\Sigma$ предкомпактно в $L_p$. Предложение 5 доказано.

Пусть $\sigma(s) \in L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Введем величину

$$\eta_\sigma(h) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+h} \|\sigma(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds. \tag{13}$$

**Лемма 2.** *Если $\sigma(s)$ – тр.к. функция в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, то $\eta_\sigma(h) < +\infty$ для любого $h \ge 0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

При $h = 1$ формула (13) задает норму в пространстве $L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})$ :

$$\|\sigma\|^p_{L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\sigma(s)\|_{\mathcal{E}}^p ds. \tag{14}$$

Из леммы 2 вытекает, что любая тр.к. функция в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ принадлежит $L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Пространство $L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})$ использовалось при определении п.п. функций по Степанову: функция $\sigma(s), s \in \mathbb{R}$ называется п.п. по Степанову, если она тр.к. в $L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Отметим, что класс тр.к. функций в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ существенно шире класса п.п. функций по Степанову.

Из предложения 5 следует аналогичный критерий тр.к. функций в пространстве $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$.

**Теорема 3.** *Функция $\sigma(s)$ является тр.к. в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, если, и только если*

**(i)** *для любого $h \in \mathbb{R}$ множество $\left\{\int_t^{t+h} \sigma(s)ds \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ предкомпактно в $\mathcal{E}$;*

**(ii)** *найдется функция $\alpha(s)$, $\alpha(s) \to 0+$ $(s \to 0+)$ такая, что*

$$\int_t^{t+1} \|\sigma(s) - \sigma(s + l)\|_{\mathcal{E}}^p ds \le \alpha(|l|)\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Обозначим, как обычно, через $\mathcal{H}(\sigma)$ оболочку функции $\sigma$ в пространстве $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Подобно предложению 3 доказывается

**Предложение 6.** *Пусть функция $\sigma(s)$ тр.к. в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Тогда*

**(i)** *любая функция $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$ будет тр.к. в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, более того, $\mathcal{H}(\sigma_1) \subseteq \mathcal{H}(\sigma)$ (включение может быть строгим);*

**(ii)** *множество $\mathcal{H}(\sigma)$ ограничено в $L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})$ и $\eta_{\sigma_1}(h) \le \eta_\sigma(h)$ при всех $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$;*

**(iii)** *любая функция $\sigma_1 \in \mathcal{H}(\sigma)$ удовлетворяет (15) с одной и той же функцией $\alpha(s)$;*

**(iv)** *трансляционная группа $\{T(t)\}$ непрерывна на $\mathcal{H}(\sigma)$ в топологии пространства $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$;*

**(v)** *$T(t)\mathcal{H}(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma)$ при всех $t \ge 0$.*

В заключение, сформулируем некоторые полезные достаточные условия трансляционной компактности в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ для важных частных случаев пространства $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{E} = L_2(\Omega)$, где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ и $Q_{0,1} = \Omega \times [0,1]$. Через $H^\delta(Q_{0,1})$ обозначим пространство Соболева порядка $\delta > 0$. Пусть $\sigma(x,s) \in L_2^{loc}(\Omega \times \mathbb{R}) = L_2^{loc}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$. Предположим, что

$$\|\sigma(x, s+t)\|_{H^\delta(Q_{0,1})} \leq M < +\infty \ \forall t \geq 0,$$

где число $M$ не зависит от $t$. Тогда $\sigma(x,s)$ тр.к. в $L_2^{loc}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$. Это утверждение следует непосредственно из теоремы вложения Соболева.

Для доказательства следующего признака следует применить теорему Обена (см. [7]).

**Предложение 7.** *Пусть $\mathcal{E}_1 \Subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_0$ – банаховы пространства. Предположим, что $\sigma(s) \in L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E}_1)$, $\sigma'(s) \in L_{p_0}^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E}_0)$, $(p, p_0 > 1)$, и*

$$\int_t^{t+1} \left( \|\sigma(s)\|^p_{\mathcal{E}_1} + \|\sigma'(s)\|^{p_0}_{\mathcal{E}_0} \right) ds \leq C \ \forall t \in \mathbb{R},$$

*тогда функция $\sigma(s)$ является тр.к. в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$.*

Обычно, в приложениях $\mathcal{E} = L_2(\Omega)$, $\mathcal{E}_1 = H^{s_1}(\Omega)$, $\mathcal{E}_0 = H^{s_0}(\Omega)$, где $s_1 > 0$, $s_0 < 0$, и $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$.

## 4. ТРАНСЛЯЦИОННО КОМПАКТНЫЕ ФУНКЦИИ В $L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$

Пусть $\mathcal{E}$ – рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Рассмотрим топологическое пространство $\Xi = L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, $p > 1$, совпадающее с пространством $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, которое снабжено топологией локальной слабой сходимости. То есть, по определению, последовательность $\{\sigma_n\}$ сходится к $\sigma$ при $n \to \infty$ в $L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ если

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v(s), \sigma_n(s) - \sigma(s) \rangle \, ds \to 0 \ (n \to \infty) \text{ для любого } [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$$
$$\text{и для любой функции } v(s) \in L_q(t_1, t_2; \mathcal{E}^*).$$

Как известно шар в рефлексивном банахово пространстве является слабо компактным множеством (см. [11]). Из этого факта вытекает следующий критерий трансляционной компактности в $\Xi = L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$.

**Теорема 4.** *Пусть $\mathcal{E}$ – рефлексивное сепарабельное банахово пространство и $p > 1$. Функция $\sigma(s) \in L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ является тр.к. в $L_{p,w}^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ если, и только если $\sigma(s)$ трансляционно ограничена в $L_p^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, то есть,*

$$\|\sigma\|^p_{L_p^b(\mathbb{R};\mathcal{E})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\sigma(s)\|^p_{\mathcal{E}} ds < \infty. \tag{16}$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольный отрезок $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Множество $B$ из пространства $L_p(t_1, t_2; \mathcal{E})$ слабо компактно если, и только если $B$ ограничено в $L_p(t_1, t_2; \mathcal{E})$ :

$$\|f\|^p_{L_p} ds = \int_{t_1}^{t_2} \|f(s)\|^p_{\mathcal{E}} ds \leq C \ \text{ для } f \in B.$$

Напомним, что пространство $L_p(t_1, t_2; \mathcal{E})$ также рефлексивно и сепарабельно.

Пусть функция $\sigma(s)$ трансляционно компактна в пространстве $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, тогда множество $\{\sigma(s+h)\mid h\in\mathbb{R}\}$ слабо компактно $L_p(0,1;\mathcal{E})$, и, следовательно, оно ограничено:

$$\int_h^{h+1}\|\sigma(s)\|^p_{\mathcal{E}}ds=\int_0^1\|\sigma(s+h)\|^p_{\mathcal{E}}ds\le C\ \text{ для } h\in\mathbb{R}.$$

Значит, функция $\sigma$ трансляционно ограничена.

Докажем в обратную сторону. Пусть функция $\sigma$ трансляционно ограничена. Ясно, что при любом $T>0$

$$\int_h^{h+T}\|\sigma(s)\|^p_{\mathcal{E}}ds\le C(T+1)\ \forall h\in\mathbb{R}.$$

Зафиксируем любую последовательность $\{T_n\}\subset\mathbb{R}_+,\ T_n\to\infty\ (n\to\infty)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{\sigma(s+h_n)\}$. Она ограничена в $L_p(-T_1,T_1;\mathcal{E})$. Следовательно, $\sigma(s+h_{n,1})\rightharpoonup\sigma_1(s)\ (n\to\infty)$ слабо в $L_p(-T_1,T_1;\mathcal{E})$ для некоторой подпоследовательности $\{h_{n,1}\}\subset\{h_n\}$. Рассмотрим теперь последовательность $\{\sigma(s+h_{n,1})\}$ в $L_p(-T_2,T_2;\mathcal{E})$. Она также содержит слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\sigma(s+h_{n,2})\}:\ \sigma(s+h_{n,2})\rightharpoonup\sigma_2(s)\ (n\to\infty)$ слабо в $L_p(-T_2,T_2;\mathcal{E})$, $\{h_{n,2}\}\subset\{h_{n,1}\}$. Заметим, что $\sigma_2(s)=\sigma_1(s)$ почти всюду на $[-T_1,T_1]$, поскольку слабый предел единственен. Продолжая этот процесс, получаем на $k$-ом шаге подпоследовательность $\{h_{n,k}\}\subset\{h_{n,k-1}\}$, такую, что $\sigma(s+h_{n,k})\rightharpoonup\sigma_k(s)\ (n\to\infty)$ слабо в $L_p(-T_k,T_k;\mathcal{E})$ и $\sigma_k(s)=\sigma_{k-1}(s)$ почти всюду в $[-T_{k-1},T_{k-1}]$. В заключение получаем, что $\sigma(s+h_{n,n})$ сходится к $\sigma_\infty(s)=\lim_{k\to\infty}\sigma_k(s)$ в $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, и, следовательно, функция $\sigma(s)$ является трансляционно компактной в $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Теорема 4 доказана.

Пусть функция $\sigma(s)$ тр.к. в $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Обозначим через $\mathcal{H}(\sigma)$ оболочку $\sigma(s)$ в $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$.

*Замечание 1.* В отличие от пространств $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ и $L^{loc}_p(\mathbb{R};\mathcal{E})$ топологическое пространство $\Xi=L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ не является метризуемым, поскольку, например, любая окрестность нуля в $\Xi$ содержит целое подпространство. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** *Пространство $\mathcal{H}(\sigma)$, снабженное топологией $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$ является метризуемым топологическим пространством, и соответствующее метрическое пространство полно.*

Лемма 3 вытекает из того факта, что шар в сепарабельном банаховом пространстве, снабженный слабой топологией является метризуемым пространством (см., например, [11]).

Наконец, сформулируем ряд свойств трансляционной группы $\{T(t)\}$ на $\mathcal{H}(\sigma)$.

**Предложение 8.** *Пусть функция $\sigma(s)$ тр.к. в $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Тогда*

**(i)** *любая функция $\sigma_1\in\mathcal{H}(\sigma)$ также тр.к. в $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, более того, $\mathcal{H}(\sigma_1)\subseteq\mathcal{H}(\sigma)$;*

**(ii)** *множество $\mathcal{H}(\sigma)$ ограничено в $L^b_p(\mathbb{R};\mathcal{E})$, и $\eta_{\sigma_1}(h)\le\eta_\sigma(h)$ для любого $\sigma_1\in\mathcal{H}(\sigma)$;*

**(iii)** *трансляционная группа $\{T(t)\}$ непрерывна на $\mathcal{H}(\sigma)$ в топологии $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$;*

**(iv)** *$T(t)\mathcal{H}(\sigma)=\mathcal{H}(\sigma)$ для любого $t\in\mathbb{R}$.*

Доказывается непосредственно.

### *4.1. Другие трансляционно компактные функции*

Можно строить трансляционно компактных функции и в других пространствах, которые отличаются от пространств $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$ и $L^{loc}_p(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Например, можно рассматривать функции вида $f(s)=(f^{(1)}(s),f^{(2)}(s))$ (или с большим числом компонентов), где $f^{(i)}(s)$ – тр.к. функции в разных пространствах. Например, $f^{(1)}(s)$ – тр.к. в $C(\mathbb{R};\mathcal{M})$, а $f^{(2)}(s)$ тр.к. в $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Тогда, очевидно, что $f(s)$ – тр.к. в $\Xi = C(\mathbb{R};\mathcal{M}) \times L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, и оболочка $\mathcal{H}(\sigma)$ функции $\sigma$ в $\Xi$ удовлетворяет всем свойствам, перечисленным в предложениях 3 и 6. Такие способы задания тр.к. функций встречаются в приложениях к неавтономным диссипативным уравнениям с частными производными (см. [7]).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор Г. Почти-периодические функции. М: ОГИЗ, 1934.
2. Amerio L., Prouse G. *Abstract almost periodic functions and functional equations.* New-York: Van Nostrand, 1971.
3. Левитан Б., Жиков В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.* М.: Издательство МГУ, 1978.
4. Haraux A. *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications.* Paris: Masson, 1991.
5. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension. *J. Math. Pures Appl.* Vol. 73. 1994, pp. 913–964.
6. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractors, *J. Math. Pures Appl.* Vol. 76. 1997, pp. 279–333.
7. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Attractors for Equations of Mathematical Physics.* AMS Colloquium Publications. vol. 49, Providence: AMS, 2002.
8. Чепыжов В.В. О равномерных аттракторах динамических процессов и неавтономных уравнений математической физики. *Успехи математических наук.* Т.68. 2013. №2. С. 159–196.
9. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988.
10. Hörmander L. *Linear partial differential operators.* Berlin: Springer-Verlag, 1963.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функциональный анализ.* М.: Наука, 1981.

# On translation compact functions

**Chepyzhov V.V.**

We consider translation compact functions that are generalization of almost periodic functions in the sense of Bohr or Stepanov. We prove the translation compactness criterions in the spaces $C^{loc}(\mathbb{R};\mathcal{M})$, $L^{loc}_{p}(\mathbb{R};\mathcal{E})$, and $L^{loc}_{p,w}(\mathbb{R};\mathcal{E})$. Some examples of translation compact functions that are not almost periodic are presented and the main properties of translation compact functions are established.

**KEYWORDS:** Almost periodic functions, translation compact functions.