

Проективно инвариантное представление композиции двух овалов¹

П.П. Николаев, А.В. Савчик, И.А. Коноваленко

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
email: nikol@iitp.ru, savsmail@gmail.com, alatkon@yandex.com

Поступила в редколлегию 13.11.2018

Аннотация—Для пяти топологически неэквивалентных вариантов взаимного расположения фиксированной пары овалов общего вида (строго выпуклых замкнутых гладких кривых) описаны и численно промоделированы процедуры быстрого формирования интегрального (привлекающего *все* точки дискретной аппроксимации контура овала) описания данной композиции — посредством требующего $O(n)$ или $O(n \log(n))$ действий вычисления *вурф-отображения*, являющегося гладкой кривой на декартовой плоскости вурфов (двойных отношений коллинеарной четверки стабильных точек) с его известным свойством инвариантности к проективным преобразованиям плоскости овалов, которые моделируют преобразование оптически регистрируемой сцены при перемещении камеры в $3D$ пространстве. Представленные схемы удовлетворяют критерию (ограничительной природы): — по ходу решения не привлекать *координат* точек касания, ограничиваясь исключительно оценкой *направления* таковых, что повышает точность (помехоустойчивость) производимых вычислений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: овал, проективные преобразования плоскости, вурф, касательная, проективно инвариантные дескрипторы, вурф-функция и вурф-отображение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В русле проблематики технического зрения и его актуальных задач по проективно инвариантному [1–3] распознаванию геометрических объектов — ныне востребована разработка методов численного анализа, на основе новых теоретических подходов (предложение и использование инструментов проективного описания гладких кривых) реализующих алгоритмические схемы быстрого и устойчивого их описания, стабильного в отношении смены ракурса оптической регистрации таковых. Естественной альтернативой к такому подходу являются, например, численные методы согласования облаков точек [4–6], которые применимы для общего (не обязательно проективного) случая, но несут неточность в самих себе (не точны даже на незашумленных входных данных) и имеют большую вычислительную сложность.

Особое место в семействе объектов для проективно инвариантного распознавания принадлежит овалам (гладким замкнутым строго выпуклым фигурам, не имеющим «традиционно привлекаемых» опорных точек — типа *излома, ветвления, перегиба* и прочая). Известные классические методы получения инвариантов гладкой кривой [7] в принципе неприменимы для систем технического зрения — по причинам требований к схемам дискретной оценки производных высокого порядка на кривой, что и стимулирует поиск алгоритмических подходов,

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №17-29-03514 и №16-07-00836.

математически корректных, но не выходящих за границы «технически осуществимого». Работа, предлагаемая вниманию читателей, продолжает цикл исследований авторского коллектива [8–11], где объектом избран *овал*, а преследуемая цель — вывести теоретические предпосылки, выявляемые для той или иной постановки задачи распознавания подобного объекта (и на их основе предлагаемых инвариантных инструментов проективного анализа кривой, «не имеющих особенностей» либо «обладающей скрытыми симметриями»), на уровень схем дискретной обработки, реализующих их применение в технических системах опознания формы.

В проведенных ранее исследованиях нами были обозначены два подхода к инвариантному описанию сцен с овалами:

1. Опираясь на полученные теоретические результаты (теоремы для композиций «овал + внутренняя фиксированная точка» [8], «овал + внешняя прямая» [9] и т.п.), удастся построить основанный на вурфах [12] «дескриптор» сцены, представляющий собой некий граф, вершины которого являются инвариантными оценками «стабильных вершин» овала, найденных в итоге анализа его геометрии (в рассмотренных задачах их набор не менее 8).
2. Альтернативой «компактному» описанию сцены в рамках данной работы предлагается вычисление некой кривой на плоскости вурфов [10, 11] (в дискретном виде — это ломаная с возможными самопересечениями и с числом узлов, равных количеству вершин аппроксимации описываемой кривой), и эту кривую, являющуюся декартовым вурф-отображением объекта использовать в качестве инвариантного дескриптора. Таким образом, вопрос об проективной эквивалентности двух овалов в исходном пространстве сводится к вопросу об схожести кривых, которые проективно инвариантным образом соответствуют этим овалам на плоскости вурфов. Критерии схожести кривых, в свою очередь, хорошо исследованы в литературе, например: расстояние Фреше [13], метрика Хаусдорфа [14], коэффициент Жаккара [15].

Второй подход можно назвать «созданием относительно *полного* описания сцены», тогда как первый метод «*выборочного* описания» гарантированно не сможет различить некоторые проективно неэквивалентные конфигурации (так как изменения формы дуг вне окрестностей найденных опорных точек не меняют вид дескриптора сцены). В конкретной технической задаче «полное описание» (с его весьма широкой вариативностью использования частных признаков вурф-отображения в качестве разной полноты «вторичных дескрипторов портрета кривой») может оказаться заведомо предпочтительнее «краткого представления монополярным первичным дескриптором». И, поскольку второй подход, как правило, вычислительно более громоздок, целесообразны усилия по оптимизации реализующей его процедуры, в каковой из-за погрешностей, накапливающихся в цепях последовательных операций обработки, главной особенностью алгоритма становится не столько поиск «наиболее быстрых путей вычисления продукта», сколько выбор операций с наибольшей точностью производимых оценок.

В рассматриваемой здесь задаче, где объектом инвариантного описания избрана композиция пары овальных кривых (в пяти топологически независимых модификациях), установочными тезисами объявим: 1) «конструктивный», предполагающий использование подхода с *полным* описанием композиции (в виде соответствующего вурф-отображения), реализуемого быстрым алгоритмом — с привлечением аппарата касательных к овалу и 2) ограничительный, при работе с касательными запрещающий опираться на *позиционные* оценки точек двойного касания — в дополнение к привлечению оценок *направления* оных двойных касательных. Это достаточно очевидное соображение, ранжирующее точность вычислений в пользу оценки *направления*, естественным образом распространяется и на приоритет направления касательной в сопоставлении с оценкой позиции *точки перегиба* кривой, что было нами показано в работе с численными моделями на гладком объекте типа «рогалик» (одна вогнутость с парой точек перегиба [16]). Заметим, что декларированное ограничение не распространяется на вычисление

касательной в заранее заданной точке кривой (например, полученной в результате пересечения кривой с некоторой вспомогательной прямой). Как показал наш многолетний опыт моделирования геометрических вычислений для овалов: направление касательной к кривой обеспечивается с удовлетворительной (в исследованных задачах) точностью его оценкой сплайном в виде дуги коники, построенной по пяти ближайшим вершинам аппроксимации кривой.

Все пять описываемых далее процедур обработки сцен заданного типа были протестированы в репрезентативных сериях компьютерных *модельных* экспериментов по 3-10 штук на сценарий (в соответствии с разработанными алгоритмами получения требуемых вурф-отображений), в которых объекты обработки (пара овальных контуров) задавались *аналитически* и проходили этап дискретизации с различными плотностями аппроксимации кривой. Таким образом, проведенное исследование имеет «рекогносцировочный» характер, где объекты представлены на дискретной сетке «с идеальной точностью», а погрешности накапливаются в результате ряда «идеализаций» (издержек самой дискретизации и ошибок, порождаемых «упрощенными операциями многократного использования» — рода вычисления направлений касательных согласно приближению кривой сплайнами в виде сегментов коник, построенных по пяти ближайшим точкам кривой).

Наконец, не будет излишним уточнить, что ключевое понятие «вурф» (а более употребляемая формулировка этого фундаментального проективного инварианта слишком многословна: «двойное отношение коллинеарного ряда четырех точек») в тексте имеет смысл универсальной численной оценки, получаемой для квартета фиксированных точек прямой A, B, C, D , и выражаемой в нотации вида $W(A, B, C, D) = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD}$.

2. ОЦЕНКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПОСТРОЕНИЙ

При программной реализации овалы задаются конечным числом точек на них. Для вычисления точек пересечения прямых с овалом и касательных к ним, локально овалы приближаются коническими сплайнами, проведенными по пяти ближайшим точкам на контуре. Будем считать, что количество точек на овалах одинаково и равно n .

Замечание. Построение дуг конических сечений по пяти точкам является проективно инвариантным. Тем не менее, если рассмотреть проективно эквивалентные контуры c и d и приблизить их таким способом до c' и d' , приближенные контуры уже не будут вообще говоря проективно эквивалентными даже в теории. Неэквивалентность возникает из вообще говоря несоответствующих независимо проведенных дискретизаций контуров до конечных наборов точек $C(i) \in c, D(i) \in d, i \in \{1, \dots, n\}$. По которым уже, в свою очередь, строятся сплайны.

Сложность операций оценивается следующим образом: *касательная* к любой из выбранных точек вычисляется за фиксированное $O(1)$ количество операций по соседним точкам. Пересечение с прямой требует уже большего количества действий на нахождение соответствующего сплайна (пересечение со сплайном делается за константное время).

Утверждение 1. *Пересечение прямой с овалом вычисляется за $O(\log n)$ действий с помощью бинарного поиска.*

Доказательство. Возьмём две произвольные точки A, B на овале. Они разделят его на две различные дуги AB, BA . Если точки A, B лежат по разные стороны от прямой, то на каждой из дуг AB, BA ровно по одной точке пересечения и эти точки можно найти методом половинного деления. В противном случае, касательные к овалу в точках A и B , образуют угол, разделенный отрезком AB на две части. Хотя бы одна из частей не пересекает прямую,

что позволяет убрать из рассмотрения одну из дуг AB, BA . Для решения задачи достаточно разделить оставшуюся дугу на две равные части и применить к ним алгоритм рекурсивно.

Аналогично, методом половинного деления можно вычислить касательные из данной точки к овалу за $O(\log(n))$ действий.

Во многих сценариях, рассмотренных в работе, возникает задача нахождения последовательности пересечений прямых $l(i), i \in \{1, \dots, n\}$ с овалом. Использование бинарного поиска позволяет решить эту задачу за $O(n \log n)$ действий, но такое решение не всегда оптимально, например, когда точки пересечения с $l(i)$ располагаются монотонно вдоль овала.

Утверждение 2. Пусть даны лучи $l(i)$ и заранее известно, что точки $A(i) \in l(i)$ пересечения лучей с овалом существуют, единственны и расположены на овале монотонно вдоль заданного направления. Тогда для их нахождения достаточно $O(n)$ действий.

Доказательство. Найдем за $O(\log n)$ положение начальной точки $A(1)$ на овале. Будем рассматривать следующие точки пересечения, пока не найдём точку $A(2) \in l(i)$, затем точку $A(3)$ и так далее. За один оборот вокруг овала, требующий $O(n)$ действий, мы обойдем все точки овала и, в силу монотонности, найдем все точки $A(i)$.

Пересечение набора прямых с овалом находится аналогичным образом, если рассматривать по-отдельности первые и вторые точки пересечения, возможно двигающиеся в разных направлениях вдоль овала. В случае, когда не все прямые пересекаются с овалом (как в случае набора прямых, параллельных оси абсцисс), достаточно бинарным поиском найти хотя бы одну пересекающуюся прямую и двигать обе точки пересечения в обе стороны. Аналогичным образом, можно найти двойные касательные к двум овалам за $O(n)$ действий.

Утверждение 3. Пусть даны два непересекающихся овала: овал и ОВАЛ. Для построения двойных касательных к ним достаточно $O(n)$ действий.

Доказательство. Рассмотрим любую точку A ОВАЛА, лежащую вовне овала. Из неё можно построить две касательные $B(A)A = t(B(A))$ и $C(A)A = t(C(A))$ к овалу. Тогда, сдвигая точку B вдоль овала по часовой стрелке, получим монотонную последовательность точек $A(B) \in t(B)$ точек ОВАЛА, которая прервётся в момент получения двойной касательной. Аналогично получим вторую двойную касательную, сдвигая B в обратную сторону. Тем же способом получим третью и четвертую двойные касательные из точки C .

Более аккуратный разбор случаев позволил бы вычислить двойные касательные за время $O(\log(n))$ с помощью бинарного поиска четырех точек пересечения в двойственном пространстве касательных. Однако, для данной работы достаточно более медленного метода, так как алгоритмы построения дескрипторов, представленные далее, требуют не менее чем $O(n)$ действий.

3. РАЗБОР ВОЗМОЖНЫХ СЛУЧАЕВ

В работе приведены схемы проективного описания для пяти топологически различных сценариев положения двух овалов на плоскости.

Рассматриваются сценарии: 2 случая для непересекающихся овалов (вложенные овалы и овалы с непересекающимися внутренними областями), 2 случая для пересекающихся по одной точке овалов (касающиеся внешним и внутренним образом), случай пересекающихся по

2 точкам овалов. Формально говоря, сценарий касания является пограничным между случаями пересечения по двум близким точкам овала и случаем близко расположенных непесекающихся овалов. Тем не менее, желательнее рассматривать его отдельно, так как из-за пограничной природы сведение к близким случаям приводит к вычислительно неустойчивым построениям (например, прямая, соединяющая близкие точки пересечения, точки пересечения касательных в них, внутренние двойные касательные для двух отдельных овалов).

Данные случаи являются минимальными. Задачи описания, в которых по сценарию точек касания и пересечения больше, могут быть решены аналогичным образом, либо же сведены к указанным с помощью последовательного перебора точек (что пропорционально увеличивает время работы и размер дескриптора).

Проективное описание сцены состоит из нескольких частей.

- Построение не требующего перебора «неподвижного проективно инвариантного базиса», состоящего из инвариантно определенных элементов (точки пересечений, либо касаний овалов, двойные касательные) и основанных на них построений.
- Построение «подвижного базиса», в виде прямых и точек, зависящих от положения одной опорной точки I на овале.
- Построение проективно инвариантных вурф-функций (двойных отношений) $w_i(I)$.
- Построение зависимостей вурф-функций друг от друга $w_i(w_j)$, что исключает зависимость от положений точки I .

При программной реализации положение опорной точки задаётся номером точки в дискретном приближении овала $I = I(i), i \in \{1, \dots, n\}$.

Замечание. «Неподвижный базис» состоит из фиксированного числа прямых и точек, в отличие от «подвижного», для полного построения которого требуется $O(n)$ прямых и точек. Поэтому, при программной реализации для «неподвижного базиса» оправдано использовать более точные, но более вычислительно сложные численные методы.

4. СЦЕНАРИЙ 1: КОМПОЗИЦИЯ «INT-ОВАЛ + EXT-ОВАЛ»

В ряду остальных четырех вариантов организации описываемой сцены, когда в режиме предобработки необходимо сформировать некий *фиксированный* (неподвижный) проективно инвариантный её базис, обсуждаемая композиция «овал в ОВАЛЕ» (см. рис. 1) принадлежит единственному случаю отсутствия этапа вычисления «вспомогательной *постоянной* надстройки». Для данного комплекса несоприкасающихся кривых требуется *подвижный* базис, в ходе последовательных смен позиции задающей точки $I(i)$ внутреннего контура («int-овал») пробегающих вершины его дискретной аппроксимации, многократно перевычисляемый при каждом новом положении I . Рассмотрим цепь операций, дающих в итоге набор требуемых оценок (ими будут четыре массива вурф-функций $w_1(i), \dots, w_4(i)$, где $i \in \{1, \dots, n\}$ номер вершины контура «int-овал»). Для текущего положения $I(i)$ вычисляется касательная $t(I(i))$, пересечение которой с контуром «ext-ОВАЛ» задает позиции A и B . Точка T , локализуемая на пересечении касательных в A и B , дает возможность (на луче TI) оценить координаты L, R (ОВАЛ) и J (овал), в свою очередь позволяющую найти положения C, D, F, G на пересечениях различных пар прямых (LA и BR, RA и BL, AT и BR, BT и AR соответственно).

Пять полученных позиций на отрезке TL обеспечивают вычисление двух независимых вурфов $w_1(T, R, I, J)$ и $w_2(R, I, J, L)$, тогда как пересечение U касательных в I и J добавляет четвертую точку на исходной касательной AB , дающую возможность оценить вурф w_3 , расширяя список инвариантных вурф-функций заданием $w_3(U, A, I, B)$. В качестве методического

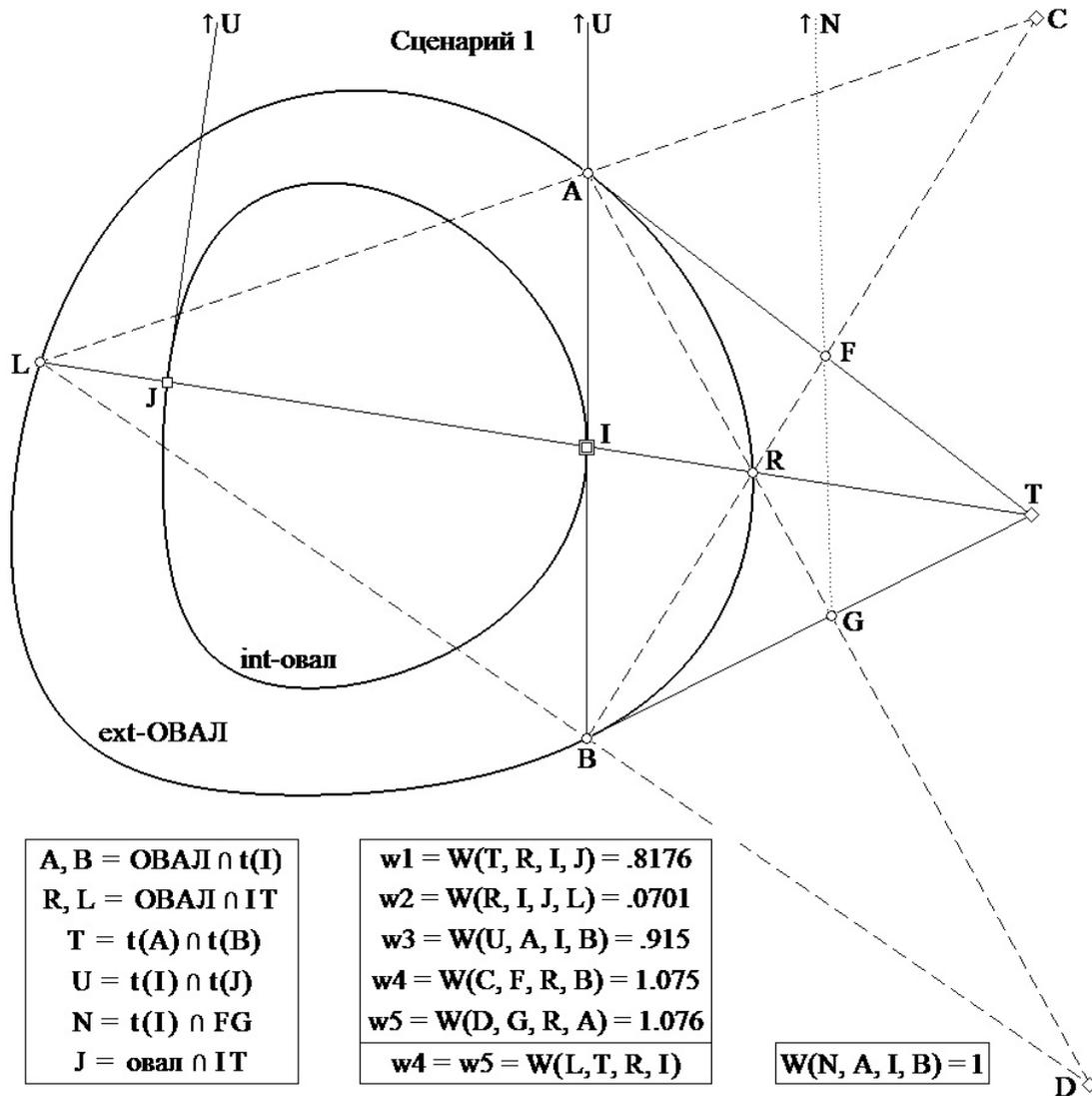


Рис. 1. Схема подвижного базиса в «Сцене 1» и правила его формирования.

примера «отнодью не всякой коллинеарной четверки, пригодной для вычисления содержательных функций», на рис. 1 рассмотрен вурф $W(N, A, I, B)$, где N - пересечение прямой AB с FG . Нетрудно показать (проективным переводом точек L, A, T, B в вершины квадрата, что сводит конфигурацию к симметричной относительно LT), свойство вурфа $W(N, A, I, B)$ всегда быть гармоническим (равным 1). Аналогично, можно показать равенство вурфов $w_4(C, F, R, B)$ и $w_5(D, G, R, A)$.

Более неожиданным является возможность выразить их не используя точки A, B, C, D, F, G . Действительно, проекция относительно точки A переводит точки C, F, R, B в точки L, T, R, I , следовательно, в силу инвариантности вурфов относительно проективных преобразований, $w_5 = w_4 = W(C, F, R, B) = W(L, T, R, I)$. Из этого так же следует общая зависимость тройки вурфов $w_1, w_2, w_4 = w_5$ при попарной их независимости.

На рис. 2 показан вид всех вычислявшихся (для конкретной модельной композиции рис. 1) вурф-функций той же сцены, где справа на врезке обращает на себя внимание «не овальный облик» кривой $T(i)$, характерным образом задающий ход кривых $w_1(i)$ и $w_2(i)$.

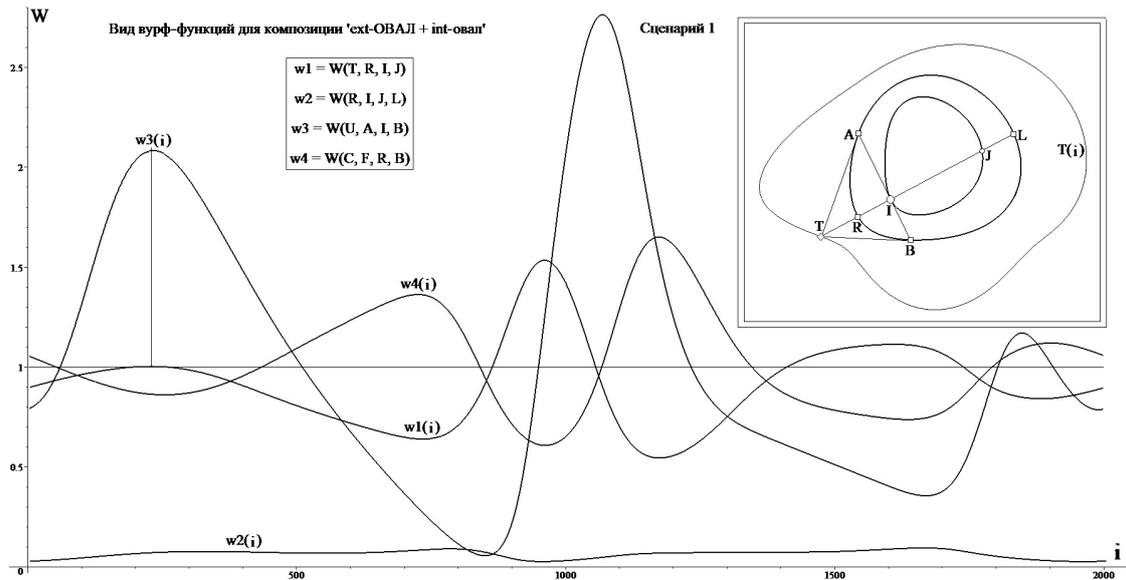


Рис. 2. Ход четырех вурф-функций для композиции объектов рис. 1 и вид кривой $T(n)$.

Поясним информативную и «образную» суть выходного продукта предлагаемых процедур обработки, названную *вурф-отображением* (рис. 3). В случае реальной *независимости* двух вурф-функций, вычисляемых на массиве идентичных вершин кривой, любую пару численных оценок (значения вурфов для вершины) можно интерпретировать как координаты точки на декартовой *плоскости вурфов* (в прямоугольных осях W_1, W_2). Цепь соседствующих точек=вершин и задает (через приближение ломаной) вид *кривой* отображения $w_2(w_1)$, форма которой (при достаточной плотности вершин аппроксимации) не будет меняться при смене ракурса оптической регистрации объекта, сопровождающейся сменой вершин оцифровки и изменяющей ее конкретное распределение для них, никак не связанное с таковым при регистрации в ином ракурсе. А поскольку полученный продукт задан в декартовой метрике, ничто не мешает сообразно стоящей технической задаче «извлекать из картины отображения $w_2(w_1)$ любые подходящие списки» ее частных признаков (от сета координат точек самопересечения на ней до центров масс и площадей фрагментов этой эталонной кривой). Статистика смены формы объектов и их взаимного расположения для «Сцены 1» показала преимущества и недостатки опробованных вариантов той или иной попарной комбинации формируемой четверки вурф-функций — при выборе кандидата на роль «стандартного отображения». К примеру, комбинация $w_3(w_1)$ (не проиллюстрирована) «экономит» на относительно сложном, требующем суммарно $O(n \log n)$ действий вычислении положений точки L (см. рис. 1), но, как и показанная на рис. 3 «квази-осесимметричная» пара отображений $w_2(w_1)$ и $w_2(w_4)$, не является оптимальной, хотя и по разным причинам: картине $w_3(w_1)$ можно присвоить второе место в предпочтительности по совокупности интегральных свойств, ее недостатком в сравнении с картой $w_4(w_1)$ (лидер рейтинга, рис. 3) является меньшая устойчивость рисунка петель (и топологические признаки мест самопересечений могут при уплощении петель смещаться и исчезать, превращаясь в «острия»); пару $w_2(w_1)$ и $w_2(w_4)$ делает малопривлекательной функцию $w_2(i)$ с ее малой амплитудой вурфа (см. рис. 2, в итоге чего — слишком узок диапазон ординат по W_2 , т.е. карта отображения сплющена, плюс малые значения w_2 близ 0 «сильно шумят», в борьбе с чем исключительно для $w_2(i)$ приходится прибегать к операциям сглаживания). Карта-победитель $w_4(w_3)$ и топологически выразительна, и занимает сопоставимые большие диапазоны по вурф-осям.

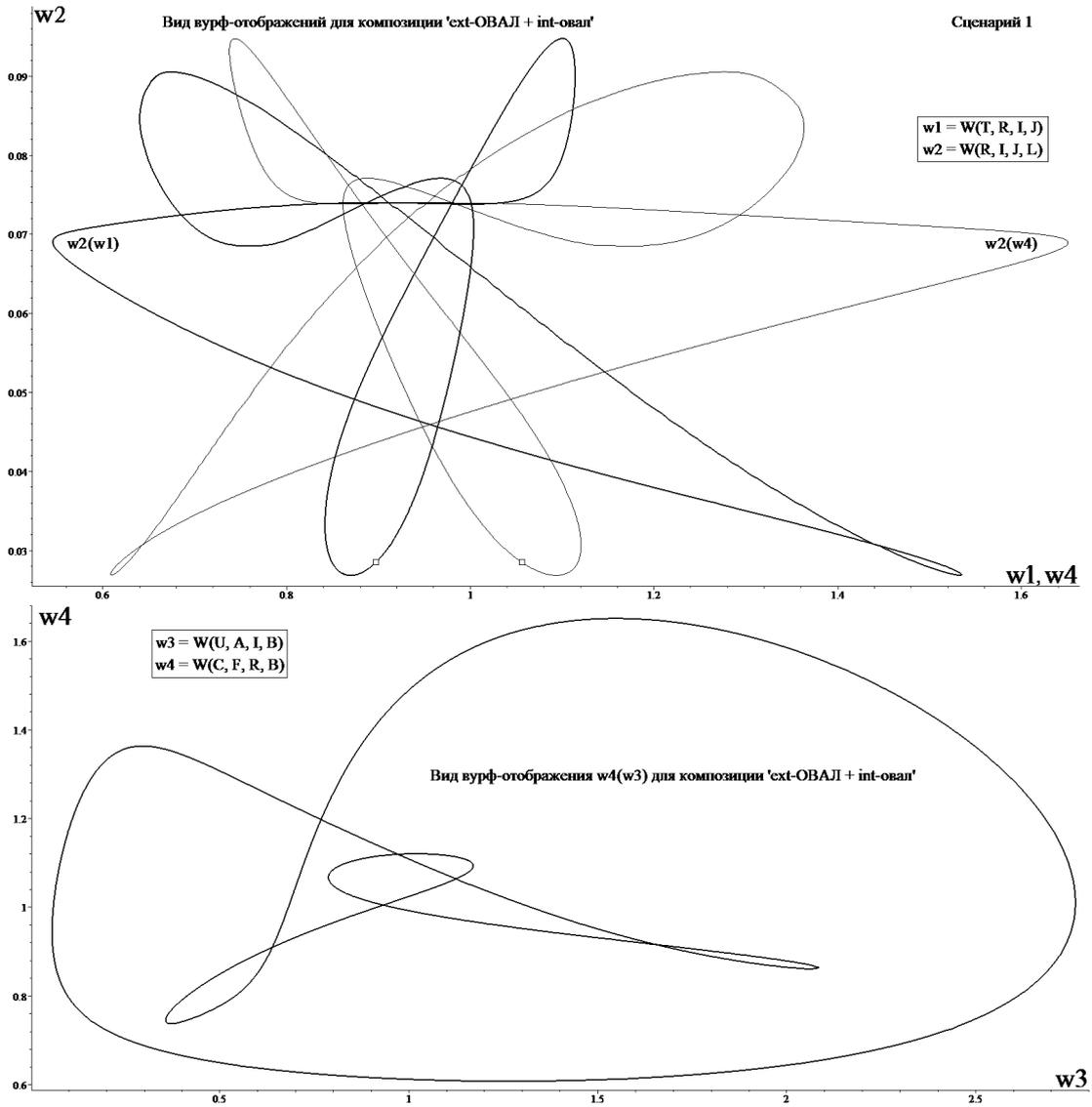


Рис. 3. Вид итоговых отображений $w_2(w_4)$ и $w_2(w_1)$, на иллюстрации различаются толщиной кривых (сверху). Форма отображения $w_4(w_3)$ для Сцены 1 рис. 1 — оптимальный ее «портрет» (снизу).

Вычисление всех описанных в разделе функций может быть произведено за $O(n \log n)$ действий, так как все указанные построения выполняются за $O(\log n)$ операций.

Хотя точки A, B смещаются монотонно вдоль ОВАЛА, что позволяет найти их положения $A(i)$ и $B(i)$ за время $O(n)$, точки L, J и даже R (в отдельных случаях, когда пересечение касательных в точках A и B находится с другой стороны от овала, чем на рис. 1) могут смещаться немонотонно. Вследствие чего приходится использовать более слабую оценку в $O(n \log n)$ действий суммарно на всё построение.

5. СЦЕНАРИЙ 2: КОМПОЗИЦИЯ «ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ОВАЛЫ»

Рассмотрим композицию с пересекающимися овальными кривыми, для которой имеется реальный шанс строить *фиксированный* базис с использованием пары двойных касательных, однако, окрестности точек K и Z их пересечения (рис. 4) в достаточной мере информативны, беря на себя монополярную роль в задаче организации базиса. Проследим цепочку операций,

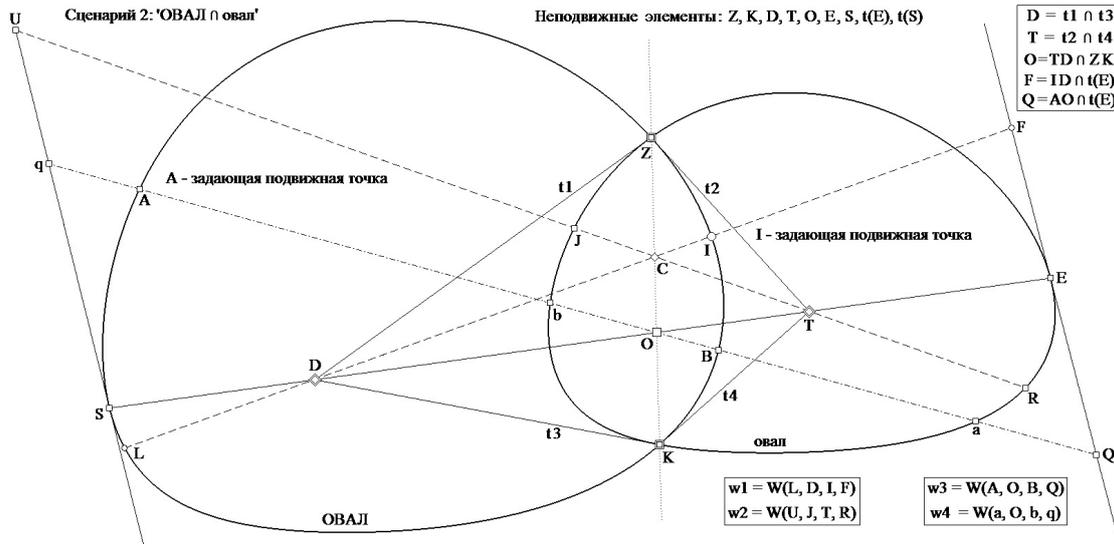


Рис. 4. Вид и правила построения фиксированного базиса для Сцены 2.

необходимых для его построения. Две касательные в K , пересекаясь с парой касательных в Z , задают постоянные позиции полюсов D и T , что позволяет найти на луче DT координаты пересечений E (с овалом) и S (с ОВАЛОМ). Формирование базиса завершают оценка направлений касательных в E и S и вычисление координат O на пересечении прямых KZ и DT . В итоге для выбора полюсов сканирования (в качестве центров вращений хорд — с целью получения вурф-функций) появилась альтернатива. Полюс O принадлежит внутренним полям обоих овалов. Например, на отрезке Qq (рис. 4) можно вычислить положения пересечений a, b (с овалом) и A, B (с ОВАЛОМ), что создает возможность формировать коллинеарные кватерты A, O, B, Q (для ОВАЛА) и a, O, b, q (для овала) в качестве данных для оценки вурфов $w_3 = W(A, O, B, Q)$ и $w_4 = W(a, O, b, q)$. Таким образом, объявив $A(n)$ задающей точкой ОВАЛА, при вращении хорды вокруг O между касательными $t(E)$ и $t(S)$ фиксированного базиса — при обходе всех вершин ОВАЛА — можно произвести заполнение массивов функций $w_3(i)$ и $w_4(i)$.

Для формирования пары вурф-функций $w_1(i)$ и $w_2(i)$ с их *раздельными* полюсами сканирования D и T процедура чуть сложнее — по причине необходимости пошагового согласования вершин обоих овалов при обходе назначенного *задающим* (что безразлично при циклически согласованном вычислении массивов $w_1(i)$ и $w_2(i)$). Для определенности (и в соответствии с показанным на рис. 4) объявим ведущей $I(i)$. Тогда хорде IL (при любом ее положении дискретного вращения вокруг D) должна соответствовать (имея тот же индекс $i \in \{1, \dots, n\}$) хорда $RJ \ni T$, согласованное положение которой задает «скользящая» C на пересечении подвижной IL и фиксированной KZ . Таким образом, вращением хорды (в этом случае) RJ вокруг T «управляет» IL , что позволяет определить положения $L(i), J(i), R(i)$ пересечений прямых с *овалами* и $C(i), U(i), F(i)$ в числе взаимных пересечений *прямых*. В итоге выполнения всей цепи оценок для любого индекса n будут сформированы вурфы $w_1(L, D, I, F)$ и $w_2(U, J, T, R)$. Перейдем к итоговому этапу обработки — вычислению вурф-отображений.

Рассмотрим вид полученных вурф-функций, задающих отображения (рис. 5). Данные, накопленные в ходе моделирования Сцены 2, демонстрируют существенное изменение формы вурф-функции при смене «формулы овалов», по сравнению с первым сценарием. Но еще большие трансформации распределений (при неизменной форме фигур) вызывают вариации их относительного сближения. Поэтому не следует ожидать, что на рис. 5 продемонстрирована

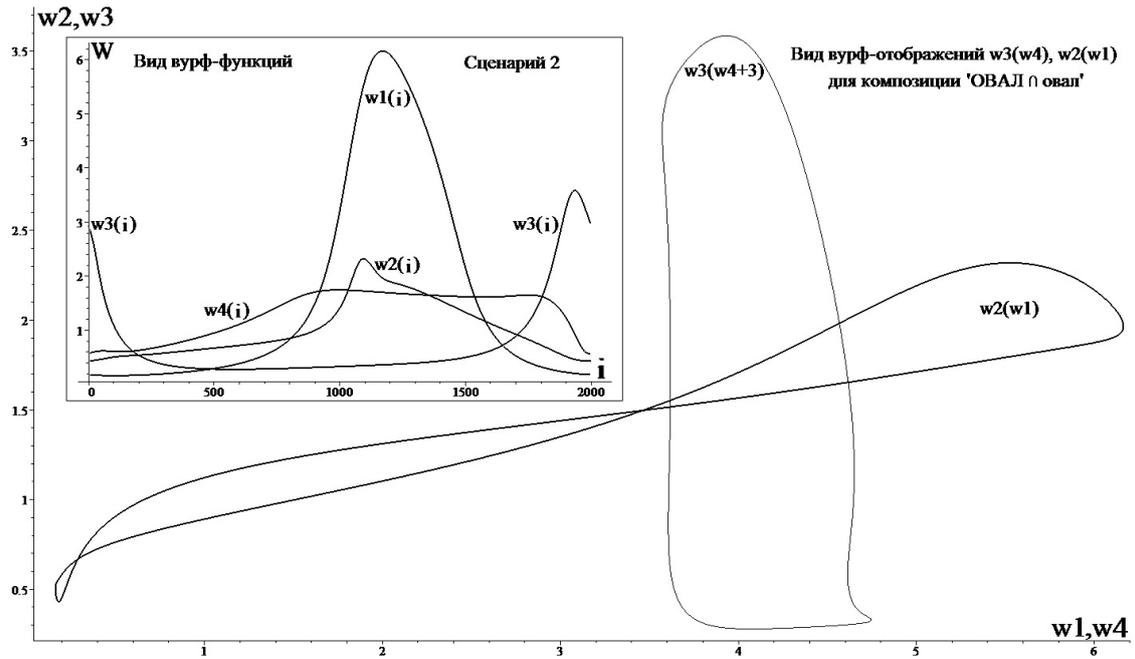


Рис. 5. Триада вурф-функций композиции 2 и вид отображений $w_2(w_1)$ и $w_3(w_1)$ для нее.

«типичная картина функций и отображений». Остается пояснить, что для удобства размещения данных на рис. 5 отображение $w_3(w_4)$ смещено на три единицы вдоль оси абсцисс W_4 .

Вычисления всех указанных функций может быть произведено за $O(n)$ действий. Действительно, по каждой точке $I(i)$ положение соответствующей точки $C(i)$ вычисляется за константное время. При этом положение точки C на прямой ZK либо монотонно меняется от $-\inf$ до $+\inf$ (если точка D расположена внутри ОВАЛА), либо распадается на 2 монотонных участка (если D расположена вне овала), что позволяет вычислить положение всех точек $J(i), R(i), i \in \{1, \dots, n\}$ за суммарное время $O(n)$. Аналогично, положение всех точек $L(i)$ вычисляется за $O(n)$ действий. По той же причине, положение всех точек $B(i), a(i), b(i)$ вычисляется за $O(n)$ действий.

6. СЦЕНАРИЙ 3: КОМПОЗИЦИЯ «РАЗНЕСЕННЫЕ ОВАЛЫ»

Перейдем к рассмотрению композиции с разнесенными и не соприкасающимися овалами (Сцена 3), для проективно инвариантного описания которой требуется (на этапе построения фиксированного базиса) привлечь оценку *направлений* двойных касательных (при этом, согласно заявленному *ограничительному* тезису, в разработанной процедуре обработки не используя оценок *координат* для точек двойного касания). Сходство неподвижных точек для новой композиции (рис. 6) с ситуацией пересекающихся овалов (Сцена 2, рис. 4) обманчиво: общим моментом является лишь наличие ограничивающих касательных $t(Q)$ и $t(S)$ (в Сцене 2 на рис. 4 они были обозначены как $t(S)$ и $t(E)$), а «похожая по положению» точка O в конфигурации «3» уже не может соответствовать роли аналогичного центра сканирования, находясь вне внутренних полей овалов. Опишем детальнее цепочку операций по созданию базиса в Сцене 3, начинающуюся с построения двойных касательных tt_1, \dots, tt_4 .

Не попавшая в поле рис. 6 точка N соответствует пересечению «внешних» двойных касательных tt_1 и tt_2 , тогда как «внутренние» касательные tt_3 и tt_4 в пересечении задают позицию O . Прямая NO детерминирует Q (на «ОВАЛЕ») и S (на «овале»), на основе чего производится оценка направлений касательных $t(Q)$ и $t(S)$. Необходима также оценка M (за пределом

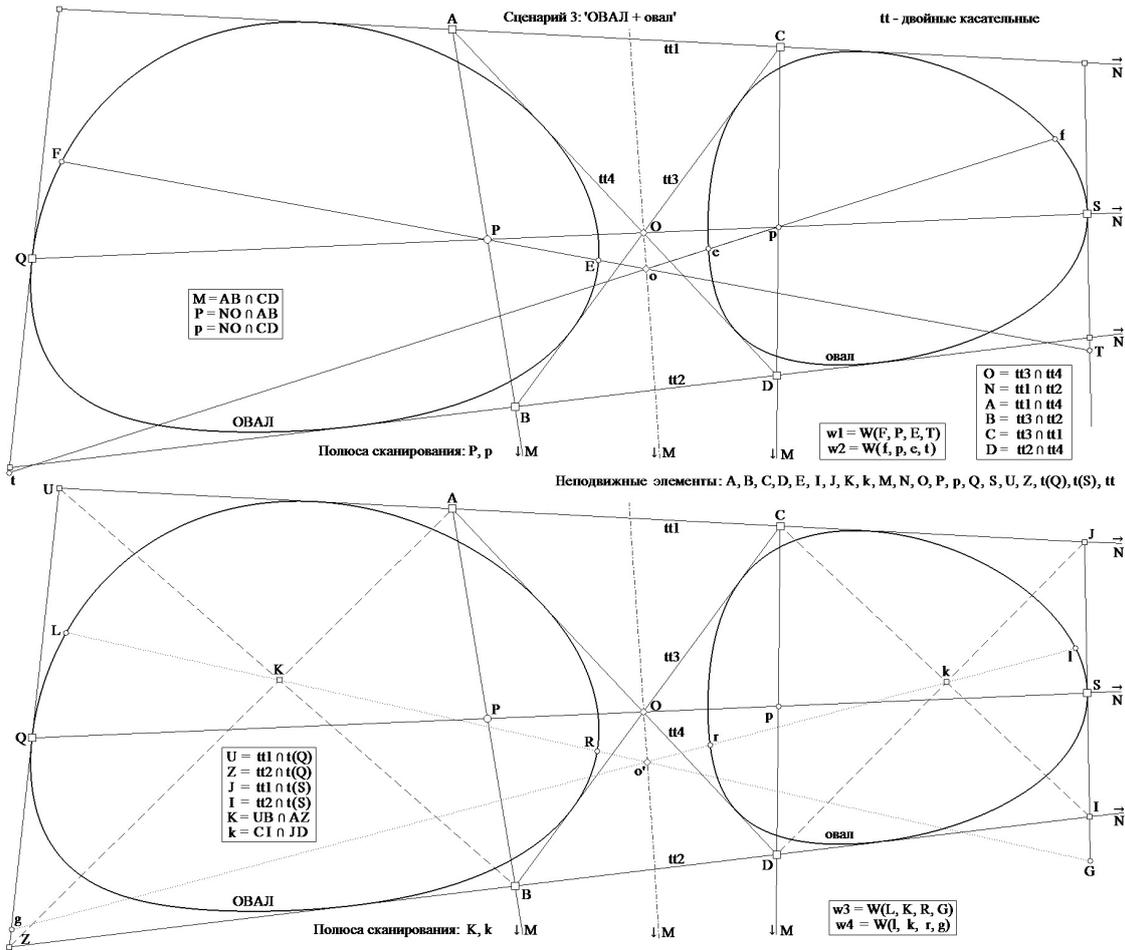


Рис. 6. Схема построения вурфов в Сцене 3 и правила задания вурф-функций для нее. Вурфы строятся по хордам овала, дополненным до квартетов точек «контур-полюс-контур-касательная», где касательная соответствует другому контуру. На иллюстрации представлены схемы построения, основанные на полюсах P, p (вверху) и полюсах K, k (внизу).

поля рис. 6), локализуемая в пересечении прямых AB и CD , для получения позиций каковых необходимо предварительно произвести оценку попарных пересечений двойных касательных (а именно: $A = tt_1 \cap tt_4$; $B = tt_2 \cap tt_4$; $C = tt_1 \cap tt_4$; $D = tt_2 \cap tt_4$). В итоге этих шагов к неподвижным элементам добавляются полюса сканирования P, p ($P = AB \cap ON$; $p = CD \cap ON$) и прямая OM (на рис. 6 размечена штрих-пунктиром), выполняющую роль «согласующей индексы i сканирования» (в Сцене 2 эта роль доверена ZK).

Для построения первого вурфа w_1 рассмотрим подвижный набор точек, задаваемый положением точки $E(i)$ на ОВАЛЕ. Точка $E(i)$ с помощью полюса P задает хорду $EF \ni P$ ОВАЛА. На продолжении хорды выберем 4-ую точку $T = EP \cap t(S)$ на пересечении с фиксированной касательной к овалу для построения вурфа $w_1 = W(F, P, E, T)$.

Аналогичным образом по точке e овала построим вурф $w_2 = W(f, p, e, t)$, $t = ep \cap Q$. Для «согласования индексов сканирования» используем прямую OM . Для этого по выбранной точке $E(i)$ построим зависимую точку $e = e(E(i))$ так, чтобы прямые ep и EP пересекались в точке o на прямой $OM \ni o = ep \cap EP$.

Нетрудно понять, что при сближении овалов полюса P и p сближаются с границами контуров, что может приводить к большим (и неустойчивым) амплитудам вурфов. В силу этих

опасений (и для создания «уже привычной» альтернативы в задании полюсов) базис был дополнен парой K, k , задаваемых диагонально (на нижнем поле рис. 6 они показаны штриховыми прямыми) через пересечения двойных и «простых» ($t(Q)$ и $t(S)$) касательных (не помечены литерами). В результате этой предварительной деятельности создана «жесткая» конструкция базиса, «рамки» $t(Q)$ и $t(S)$ которого позволят при сканировании относительно полюсов K и k к триаде точек «контур-полюс-контур» аналогичным P, p образом добавлять четвертую, что и требуется для оценки вурфов (на четырех «вращаемых» хордах, при том, что точка o , скользящая по OM , будет задавать для хорды $lr \ni k$ ее положение относительно «ведущей» $LR \ni K$). Для добавленных полюсов K и k теперь можно дать формальную запись третьей и четвертой вурф-функций: $w_3 = W(L, K, R, G)$, $w_4 = W(l, k, r, g)$.

Перейдем к завершающей фазе обсуждения особенностей обработки Сцен «типа 3», предъявив карты вурф-функций промоделированной композиции (приведенной на рис. 6) совместно с показом вурф-отображений для нее (рис. 7). Заметим, что не слишком лаконичное описание операций по формированию базиса (точнее, — его «подавляющая многозвенность») может создать впечатление вероятной ненадежности «воздвигаемой опоры». Однако, практически не потеряв точности на самом затратном (в вычислительном отношении) этапе — оценке позиций двойных касательных, из «общетеоретических» соображений все последующие операции создания базиса «без тени сомнения» можно охарактеризовать «незатратными и нешумящими», поскольку, в основном, это оценки пересечения разнообразных прямых. В модельных сериях по этому разряду сцен ни разу не приходилось прибегать к сглаживанию вычисляемых вурф-функций (напомним, что подобная необходимость возникала в процедуре для Сцены 1).

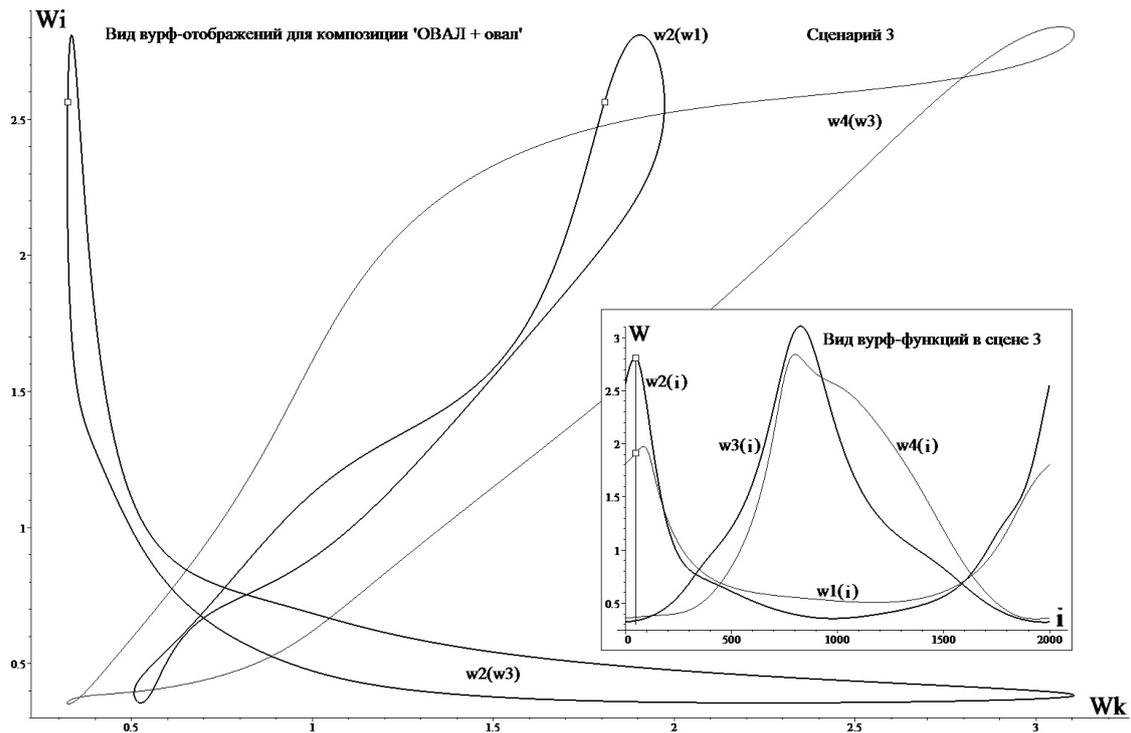


Рис. 7. Вид вурф-отображений и вурф-функций для Сцены 3.

На врезке рис. 7 показан вид четырех вурф-функций, где пары $w_1(i), w_2(i)$ и $w_3(i), w_4(i)$ (каждая со своим типом полюсов) ведут себя «дружно квази-синфазно», что роднит (топологически) их формы на отображениях в разных комбинациях их объединения.

Завершим на этом сообщение об итогах моделирования по сценарию «3», сделав финальный вывод: накопленная для обсуждаемой композиции статистика моделирования дает основания для предпочтения отображениям в совпадающем типе полюса ($w2(w1), w4(w3)$) в сравнении со «смешанными» комбинациями типа $w2(w3)$ по причинам некой «стандартности» последних (узкие угловые карты с квазидиагональной симметрией).

Все используемые при этом построения могут быть выполнены, как и в предыдущем сценарии, за $O(n)$ действий.

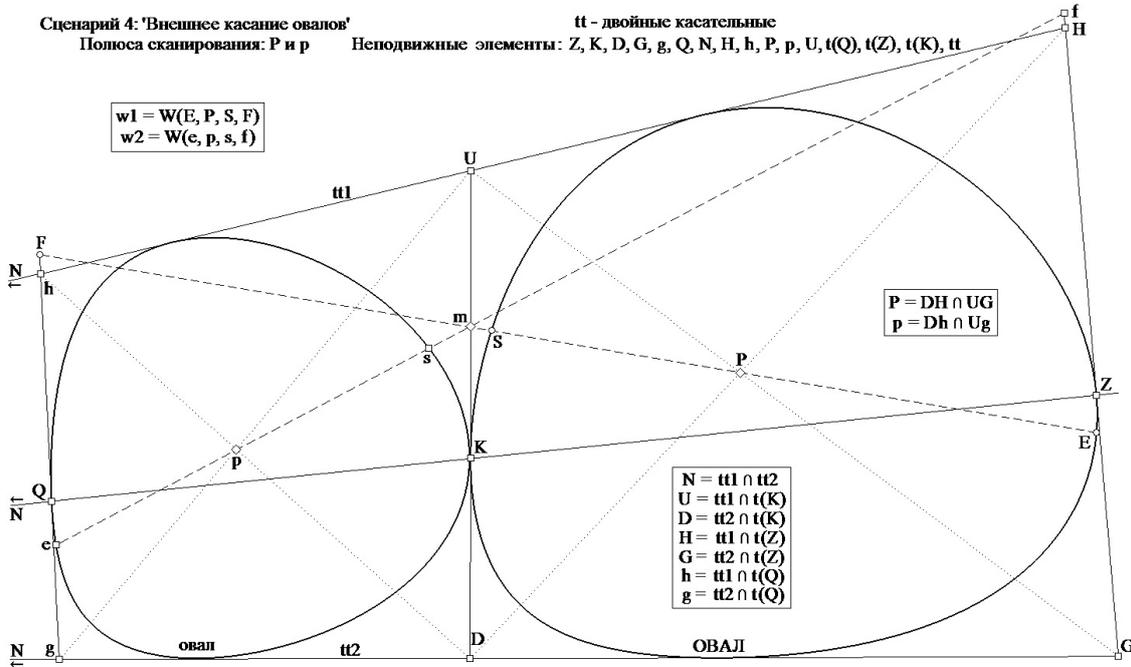


Рис. 8. Схема построения базиса в Сцене 4 и правила задания вурф-функций для нее.

7. СЦЕНАРИЙ 4: КОМПОЗИЦИЯ «ОВАЛЫ ВНЕШНЕГО КАСАНИЯ»

Переход к сценарию с внешним касанием фигур ограничивает поле возможностей в вариациях схемы фиксированного базиса, не позволяя обойтись без привлечения двойных касательных «tt» (используются исключительно свойства *направления* для них). Арсенал инструментов этого рода сузился: от набора в четыре «элемента tt» остались только *внешние* tt1 и tt2. Система полюсов сканирования (P и p) предлагается без *дублирующей* (ее организация возможна, однако по причинам существенно меньшей устойчивости в итоге длинной цепи последовательных операций построения она априорно неконкурентна избранной). Роль «простых» касательных («t») остается прежней, но к паре внешних ($t(Q)$ и $t(Z)$), см. рис. 8) добавляется внутренняя $t(K)$, вычисляемая в точке K соприкосновения овалов. Возможно допущение о включении операции по оценке ее координат в процедуру обработки, что требует комментария о соответствии этого шага заявленному исходно ограничительному тезису. Точность координатной оценки точки касания естественно ранжировать (по мере ее убывания) следующей триадой случаев: а) касаются дуги разного знака кривизны; б) касаются прямая и дуга; в) знаки кривизны касающихся дуг совпадают. Наш пример типа «а», а тезис запрета соотнесем с типом «б». Согласно такой «уточняющей аргументации» допустимо включить поиск позиции K в процедуру построения базиса.

Обратясь к рис. 8, опишем этот этап детальнее. Задать прямую QZ , необходимую для организации «рамки» $t(Q)$ и $t(Z)$ (в сохранившейся роли «детерминаторов» четвертой точки для хорд сканирования из P и p), окажется возможным после локализации прямой QZ , инцидентной K и пересечению $N = tt_1 \cap tt_2$ двойных касательных (N вне поля рис. 8).

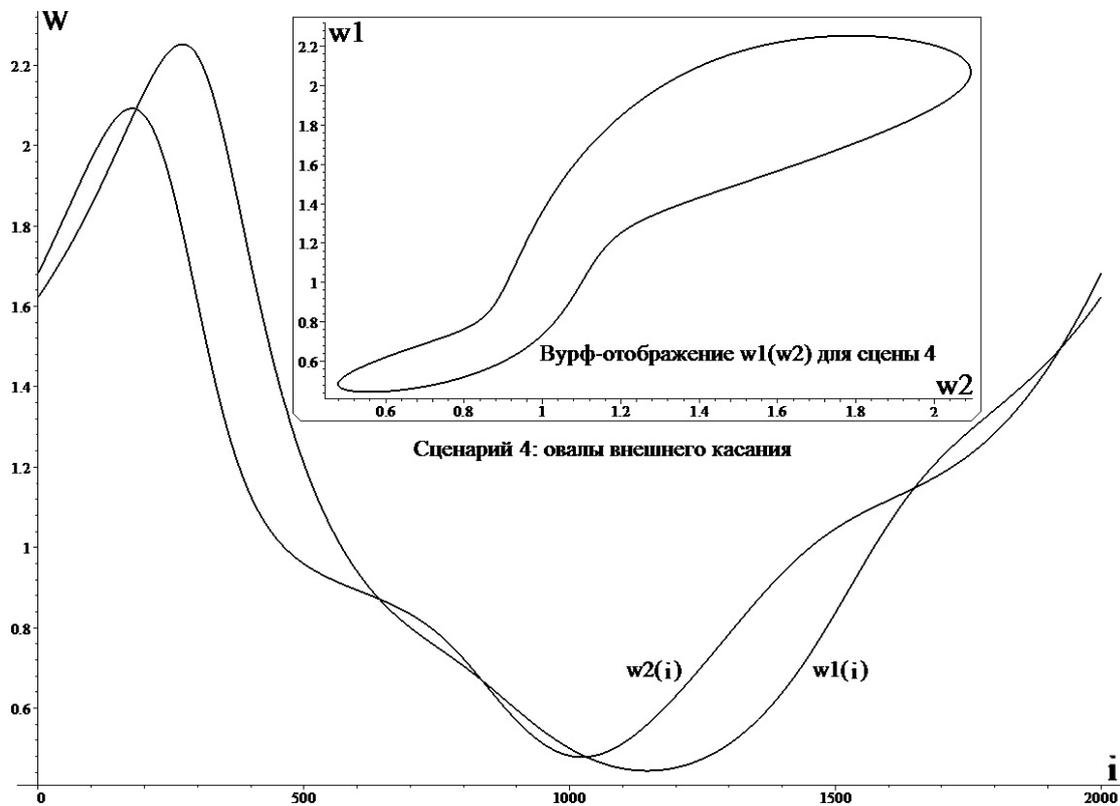


Рис. 9. Вид вурф-отображения и двух вурф-функций для Сцены 4.

Оценка пересечений двойных и ординарных касательных (tt и t) локализует 4-вершинник $HGgh$, что и обеспечивает формирование пары смежных 4-вершинников $HGDU$ и $hgDU$, точка пересечения диагоналей для которых (показаны пунктирными прямыми) и задаст полюса (P и p). Хорды сканирования $EF \ni P$ и $ef \ni p$ (задаваемые положением точки $E(i)$ и согласуемые посредством m , скользящей вдоль $t(K)$), являются носителями $w_1(E, P, S, F)$ и $w_2(e, p, s, f)$. Рассмотрим карты проведенного моделирования.

На врезке рис. 9 изображен вид вурф-отображения $w_1(w_2)$, а ход вурф-функций в большем разрешении показан в поле рисунка. Функции $w_1(i)$ и $w_2(i)$, «как правило» (по итогу модельной серии), «квазисинфазны и переплетены», что обеспечивает приемлемую дислокацию и форму отображения (отсутствие узких петель и диагональной симметрии, а также большой и сопоставимый диапазон размеров по осям W_1, W_2). Необходимости в операциях сглаживания не возникало, программа работала стабильно. Оценка сложности алгоритма $O(n)$. Переедем к описанию последнего типа Сцен.

8. СЦЕНАРИЙ 5: КОМПОЗИЦИЯ «ОВАЛЫ ВНУТРЕННЕГО КАСАНИЯ»

Эта сцена — со своими специфическими особенностями — стоит особняком в ряду прочих. Главнейшее ее отличие в том, что для нее «даже теоретически» нельзя построить аналогичную процедуру обработки, обладающую изотропией по точности оценок относительно индекса n

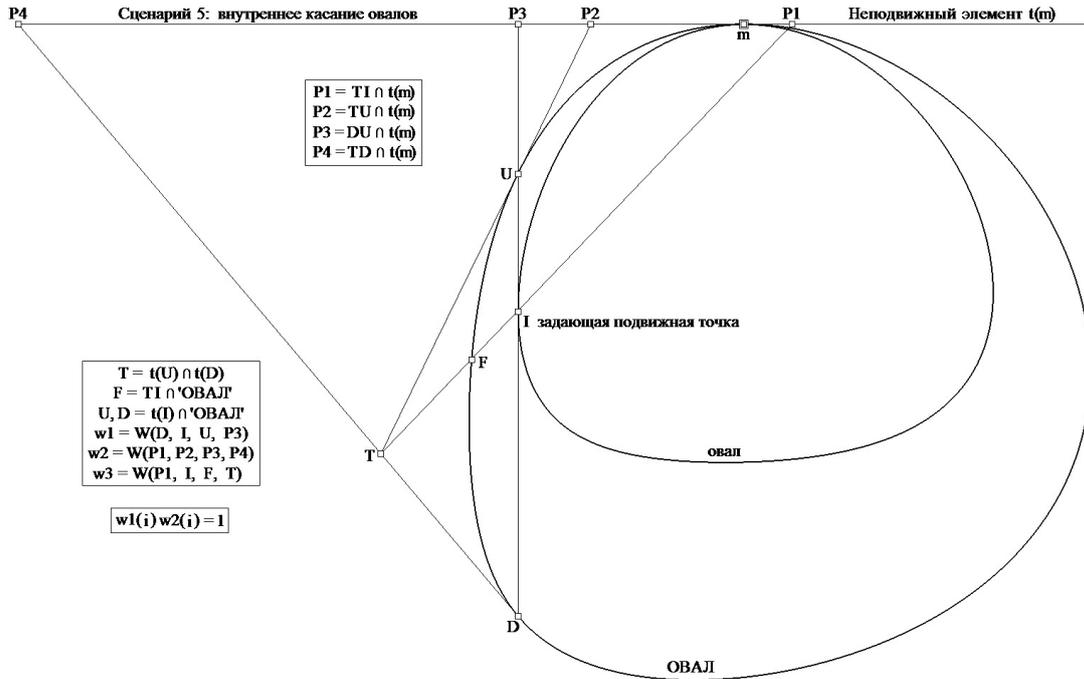


Рис. 10. Вид Сцены 5 и правила задания вурф-функций для нее.

обхода любого из ее контуров (при сканировании «подвижным базисом», как это было в Сцене 1), так как в окрестности точки касания m (где согласно уточненному выше «тезису запрета» координаты m для оценок недоступны, — ведь кривизны дуг в области касания одного знака; однако, и при легализации этой оценки остается в силе бесперспективность работы с касательными в окрестности m) точность оценок падает по мере сближения с точкой m , а вурфы на подступах к m либо обнуляются, либо «уходят на бесконечность». Сцена 5 обладает еще одной особенностью: допустимое для формирования двух вурф-функций вовлечение пересечений U и D с контуром «ОВАЛА» текущей касательной $t(I(i))$ вложенного «овала» (см. рис. 10) делает эту пару зависимой (с чем мы уже сталкивались и описали в работе [11]), и только добавление в процедуру еще одного пересечения (F на рис. 10) с «ОВАЛОМ» создает возможность сформировать третью вурф-функцию, универсально независимую от любой из первой пары.

Обратившись к схеме рис. 10, опишем алгоритм обработки детальнее. Из элементов фиксированного базиса имеется лишь вычисленное положение касательной $t(m)$. Все иные конструкции — подвижные (обусловленные обходом по контуру «овала» касательной $t(I(i))$ совместно с $I(i)$). По аналогии с процедурой для Сцены 1 вычисляются пересечения $t(I)$ с контуром «ОВАЛА» в U, D (и с прямой $t(m)$ в P_3); а также локализуется $T = t(U) \cap t(D)$.

Прямые, соединяющие T с точками I, U, D , обеспечивают оценку на $t(m)$ позиций P_1, P_2 и P_4 , в результате чего появляются два коллинеарных квартета D, I, U, P_3 и P_1, P_2, P_3, P_4 , структурно задающих вурфы w_1 и w_2 , в обходе контура «овала» (минуя зону вырождения окрестности m), вычисляющие вурф-функции $w_1(D, I, U, P_3)$ и $w_2(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Однако, как указано выше, эти функции зависимы, проекция прямой $t(m)$ на прямую $t(I)$ относительно точки T переводит четверку P_1, P_2, P_3, P_4 в четвёрку I, U, P_3, D . Таким образом, отображение $w_2(w_1)$ представляет собой фиксированную гиперболу и не может быть использовано в качестве дескриптора. Для решения задачи привлечем третью функцию $w_3(P_1, I, F, T)$, где F — точка пересечения ОВАЛА и луча TI . В отличие от w_2 , вурф w_3 является незави-

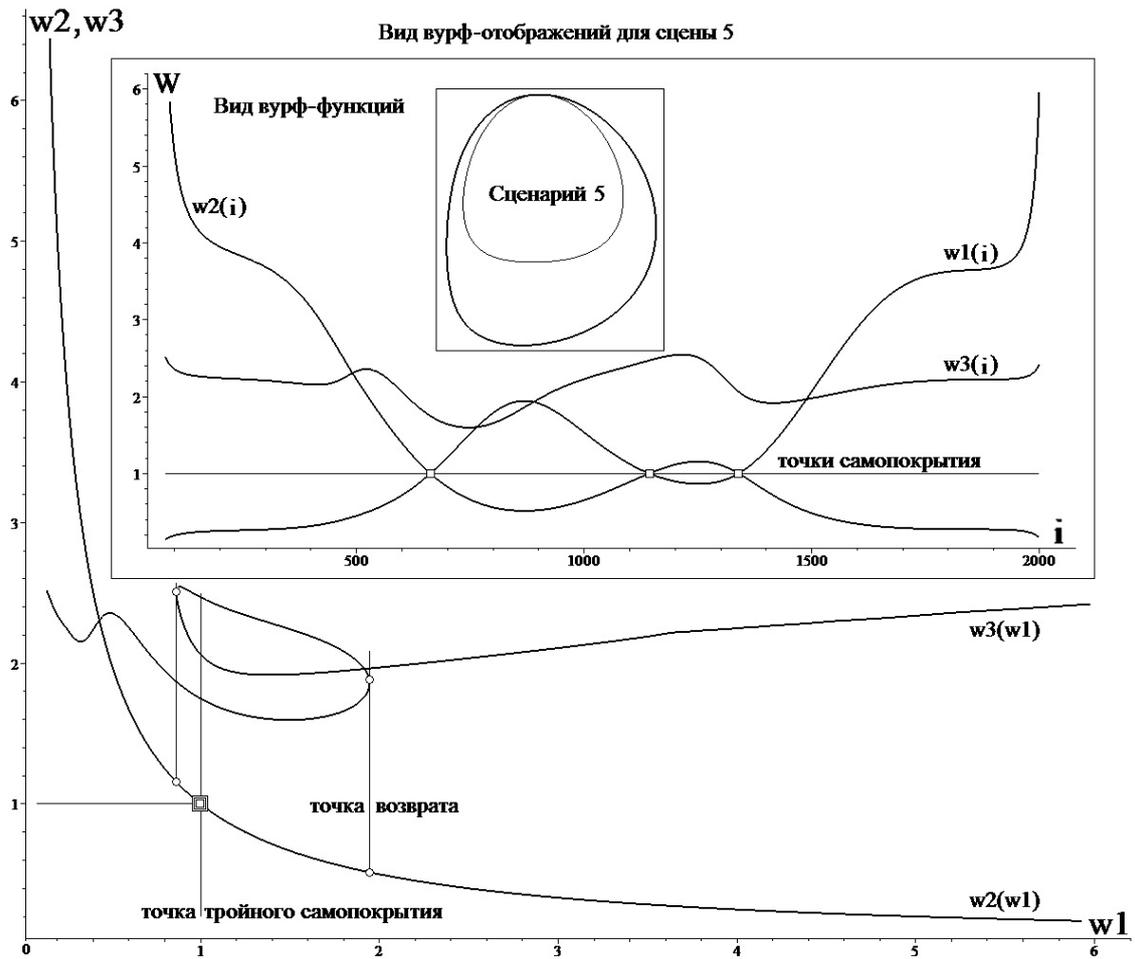


Рис. 11. Вид вурф-отображений и трех вурф-функций для Сцены 5.

симым от вурфа w_1 . Что позволяет использовать в качестве дескриптора сцены отображение $w_3(w_1)$.

Любопытным свойством, хорошо раскрывающимся на представленных изображениях, является немонотонность функции $w_1(i)$ (в чем можно убедиться проследивая графически динамику скольжения точки $w_1(i)$ при последовательной смене номеров i вершин обхода контура). Подобное свойство может быть дополнительно использовано при построении дескриптора в итоге формирования даже одного единственного вурфа.

На рис. 11 немонотонность $w_1(i)$ проиллюстрирована для удобства на гиперболе $\frac{1}{w_1} = w_2(w_1)$. Малыми кружками на рисунке обозначены позиции «точек возврата», а точка с вурф-координатами (1, 1) (отмеченная «двойным квадратом») при полном обходе рабочей зоны контура имеет *тройное* покрытие. Все эти тонкости поведения зависимых функций было бы весьма непросто выразить графически и словесно, если бы не оказалась «под рукой» картина поведения отображения с привлечением третьей функции $w_3(P_1, I, F, T)$, получить которую можно, вычислив пересечения $F(i)$ с контуром ОВАЛА луча TI . На врезке рис. 11 запечатлен ход $w_1(i)$ и $w_2(i)$, на краях рабочей зоны по i действительно устремляющихся к «запредельным» значениям вурфов (кривые обрезаны на уровне 6) и трижды переплетающихся у единичного (гармонического) значения, при том что функция $w_3(i)$ ведет себя не экстремально. Ее «методическая ценность» раскрывается на уровне отображения $w_3(w_1)$, разворачивая в виде петли путь с возвратом, совершаемый w_1 в самоскольжении. Построение всех указанных

функций требует лишь $O(n)$ действий в силу монотонной зависимости положений используемых точек $U(I), D(I), F(I)$ на овалах от точки I .

9. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

В работе рассмотрены пять топологически различных базовых случаев взаимного расположения двух овалов на плоскости. Для каждого из них предложен метод построения проективно инвариантных дескрипторов, вида кривой на плоскости вурфов (двойных отношений), зависящей от положений всех точек овалов.

При дискретном приближении овалов по n точкам, предложенные методы требуют не более $O(n \log(n))$ действий в случае вложенных овалов и не более $O(n)$ в остальных.

Предложенные методы были проверены в модельных экспериментах с малым числом примеров (от 3 до 10 на каждый сценарий, в тексте не представлены), позволивших сделать предварительные положительные оценки относительной невырожденности и устойчивости указанных построений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов, Н. В. *Высшая геометрия*. М.: Физматлит, 2004.
2. Kim, K., Jung, Y., Bang, H. Projective invariant based crater matching for visual navigation in planetary landing. In: *AIAA SPACE*, 2016, p. 5531.
3. Sablina V. A., Efimov A. I., Novikov A. I. Combined approach to object contour superimposition in heterogeneous images. *2017 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO)* New York: IEEE, 2017. pp. 120–123.
4. Gold S. et al. New algorithms for 2D and 3D point matching: Pose estimation and correspondence. *Pattern recognition*, 1998, vol. 31, no. 8, pp. 1019–1031.
5. Myronenko A., Song X. Point set registration: Coherent point drift. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 2010, vol. 32, no. 12, pp. 2262–2275.
6. Ma J et al. Non-Rigid Point Set Registration with Robust Transformation Estimation under Manifold Regularization. *AAAI*, 2017. pp. 4218–4224.
7. Cartan E. *La Methode du Repere Mobile, la Theorie des Groupes Continus, et les Espaces Generalises. Exposes de Geometrie*, IV, 1935.
8. Савчик А.В., Николаев П.П. Теорема о пересечении Т- и Н-поляр. *Информационные процессы*, 2016, т. 16, №4, стр. 430–443.
9. Балицкий А.М., Савчик А.В., Гафаров Р.Ф., Коноваленко И.А. О проективно инвариантных точках овала с выделенной внешней прямой. *Проблемы передачи информации*, 2017, т. 53, стр. 84–89.
10. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. II. Овал в композиции с дуальным элементом плоскости. *Сенсорные системы*, 2011. т. 25. № 3. стр. 245–266.
11. Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. IX. Методы описания овалов с фиксированной точкой на контуре. *Сенсорные системы*, 2015. т. 29. № 3. стр. 213–244.
12. Депутатов В. Н. К вопросу о природе плоскостных вурфов. *Математический сборник*, 1926. т. 33. № 1. стр. 109–118.
13. Anil Maheshwari, Jorg-Rudiger Sack, Kaveh Shahbaz, Hamid Zarrabi-Zadeh. Improved Algorithms for Partial Curve Matching. *Proc: Algorithms-ESA 2011: 19th Annual European Symposium*. Berlin: Springer, 2011, 518–529.
14. Huttenlocher D. P., Klanderman G. A., Rucklidge W. J. Comparing images using the Hausdorff distance. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1993, vol. 15, no 9, pp. 850-863.

15. Jaccard P. Etude comparative de la distribution florale dans une portion des Alpes et des Jura. *Bull Soc Vaudoise Sci Nat*, 1901. vol, 37, pp. 547–579.
16. Pritula N., Nikolaev D., Sheshkus A., Pritula M., Nikolaev P. Comparison of Two Algorithms Modifications of Projective-Invariant Recognition of the Plane Boundaries with the One Concavity. *Proc. of the 7th International Conference on Machine Vision ICMV*, 2015, vol. 9445, 944508. pp. 1-5.

A Projectively Invariant Representation of a Composition of Two Ovals

Nikolayev P.P., Savchik A.V., Konovalenko I.A.

For five topologically nonequivalent variants of the mutual arrangement of a fixed pair of general ovals (strictly convex closed smooth curves), we describe and numerically model the procedures for fast formation of an integral (i.e. involving *all* the points of a discrete approximation of the oval contour) description of such a composition. This requires calculating a *wurf map*, which is a smooth curve on the Cartesian plane of wurfs (i.e. cross-ratios of four collinear stable points). The wurf mapping is known to be invariant with respect to projective transformations of the oval plane, which simulate the transformation of an optically detected scene as a result of moving the camera in the 3D space. The presented schemes have $O(n)$ or $O(\log(n))$ computational complexity and satisfy the restrictive criterion not to involve the *coordinates* of the points of contact of tangent lines, limiting itself solely to estimation of their *direction*, which increases the accuracy and the robustness of the calculations.

KEYWORDS: oval, real projective plane, wurf (cross-ratio), tangent line, projectively invariant descriptions, wurf function, wurf map.