

## Квазинеккогерентный алгоритм фильтрации линейных рекуррентных последовательностей

М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, Д.Ю. Панкратов

*Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*

Поступила в редколлегию 19.09.2018

**Аннотация**—В статье рассматривается проблема синхронизации в системах передачи информации, в которых используются шумоподобные сигналы на основе линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП). В качестве модели последовательности символов используется подход, связанный с представлением ЛРП в виде цепи Маркова. В системах радиодоступа применяется синхронизация по пилотным последовательностям на основе ЛРП, для приема которых могут использоваться алгоритмы, описанные в данной работе. Статья посвящена синтезу квазинеккогерентных рекуррентных алгоритмов фильтрации ЛРП и приводятся результаты их статистического моделирования.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** системы передачи информации, алгоритмы фильтрации, цепи Маркова, линейные рекуррентные последовательности, квазинеккогерентные алгоритмы, квазикогерентные алгоритмы, когерентные алгоритмы.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Шумоподобные (псевдослучайные) сигналы на основе линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП) [1] – [4] находят широкое применение в различных информационных системах, например, в системах радиодоступа, радиосвязи, навигационных системах, и других системах передачи информации [5, 6]. Для извлечения информации из принимаемого сигнала может понадобиться несколько этапов синхронизации [7]. Синхронизация ЛРП в таких системах обычно осуществляется с помощью многоканальных корреляторов или схем циклического поиска на основе алгоритмов пошаговой синхронизации, осуществляющих сравнение принимаемой ЛРП с ее копией на приемной стороне [7] – [15]. Реализация этих подходов требуют значительных технических и временных ресурсов. Известные алгоритмы приема ЛРП, решающие задачу ускоренного вхождения в синхронизм, основаны на методе Уорда [12]. Этот метод последовательного оценивания символов (RASE, Rapid Acquisition by Sequential Estimation) позволяет сократить время поиска и синхронизации ЛРП. В методе Уорда генератор ЛРП запускается последовательностью ранее принятых символов. Однако этот метод обладает приемлемыми характеристиками только при достаточно высоком отношении сигнал/шум (ОСШ). Уменьшение ОСШ существенно ухудшает эффективность метода Уорда и приводит к низкой вероятности правильного приема. Чтобы повысить эффективность метода Уорда при уменьшении ОСШ были предложены его модификации [13] – [18], основанные на метках ненадежных символов, использовании дополнительных символов для обнаружения и исправления ошибок или внутрипериодном накоплении сигналов, а также методов нелинейной фильтрации ЛРП [13, 14, 17, 18], использующие цепь Маркова в качестве модели ЛРП. Существующие алгоритмы фильтрации линейных рекуррентных последовательностей, использующие марковские свойства этих ЛРП, позволяют улучшить характеристики синхронизации [13] – [18]. Однако эти методы относятся к когерентным методам приема и требуют точного знания фазы

принимаемого радиосигнала. Известно [19], что когерентные методы обеспечивают наиболее высокую помехоустойчивость приема ЛРП. Однако в реальности принимаемый сигнал всегда имеет неопределённую случайную начальную фазу. Поэтому для использования когерентных методов приема требуется оценка этой фазы и для её получения необходимо использование соответствующих алгоритмов и дополнительное время. Это в итоге увеличивает общее время вхождения в синхронизм. В данной работе решается задача синтеза алгоритма фильтрации ЛРП для ускоренного вхождения в синхронизм, не требующего знания фазы принимаемого радиосигнала. В предлагаемом алгоритме вся область неопределенности фазы разбивается на четыре квадранта и одновременно с оценением сегмента ЛРП происходит оценивание положения фазы в одном из этих четырех квадрантов. По оставшейся непрерывной компоненте фазы, равномерно распределённой на интервале, осуществляется усреднение. Данный алгоритм назван как “квазинеккогерентный”, поскольку усреднение осуществляется не по всей области неопределенности фазы, как в некогерентном алгоритме, а только по 1/4 части. Здесь сознательно не используется термин “квазикогерентный” прием, так как квазикогерентный прием предполагает оценивание начальной фазы и использование этой оценки в алгоритме, синтезированном для точно известной фазы, т.е. в когерентном алгоритме. Поскольку когерентный алгоритм ориентирован на точную фазу, то при наличии ошибок его характеристики сильно ухудшаются. Предлагаемый квазинеккогерентный алгоритм и его упрощённые модификации могут использоваться для ускоренного вхождения в синхронизм и, как показывают результаты моделирования, остается работоспособным даже при отрицательных отношениях сигнал/шум.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть ЛРП описывается следующим рекуррентным соотношением:

$$a_n = \sum_{i=1}^k \oplus \alpha_i a_{n-i}, \quad \alpha_i \in \{0; 1\}, \quad a_n \in \{0; 1\}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1)$$

где  $k$  – длина формирующего регистра ЛРП;  $n$  – дискретное время; знак  $\oplus$  означает суммирование по модулю 2. Известно, что операции сложения по модулю 2 в алфавите  $0; 1$  соответствует операция перемножения в алфавите  $\{1; -1\}$  [3, 20]. Исходя из этого, из (1) можно получить:

$$A_n = \prod_{i=1}^k ((1 - \alpha_i) + \alpha_i A_{n-i}), \quad (2)$$

где  $A_n = 1 - 2a_n, A_n \in \{1; -1\}$ .

В целях простоты последующего изложения предположим, что формирующий регистр ЛРП имеет только один отвод, т.е.:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases}, \quad i = 1, \dots, k, \quad 1 < l < k, \quad (3)$$

С учетом уравнений (1) и (3) можно записать следующую модель:

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} A_{n-k} \\ y_{nc} = A_n \cos \varphi + \eta_{nc}, \quad \eta_{nc} \sim N(0, \sigma_\eta^2) \\ y_{ns} = A_n \sin \varphi + \eta_{ns}, \quad \eta_{ns} \sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{cases}, \quad (4)$$

где фаза  $\varphi$  – случайная, но постоянная на интервале наблюдения величина, равномерно распределенная на отрезке  $[-\pi; \pi]$ ;  $\eta_{nc}, \eta_{ns}$  – некоррелированные последовательности гауссовских случайных величин с нулевыми средними и дисперсиями  $\sigma_\eta^2$ ;  $y_{nc}, y_{ns}$  – наблюдаемые величины. Уравнение состояния в модели (4) (верхнее уравнение) записано с учетом того, что ЛРП может рассматриваться как вырожденный случай цепи Маркова.

Модель (4) можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} B_n = B_{n-l}B_{n-k}\theta^{(1)}, \\ y_{nc} = B_n \cos\varphi + \eta_{nc}, \\ y_{ns} = B_n\theta^{(2)} \cos\varphi + \eta_{ns}, \end{cases} \quad (5)$$

где фаза  $\varphi$  – равномерно распределена на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ;  $\theta^{(1)} = \pm 1, \theta^{(2)} = \pm 1$  – дополнительные двоичные символы, учитывающие положение фазового вектора в одном из четырех квадрантов;  $B_n = A_n\theta^{(1)}$  – новая ЛРП, отличающаяся от исходной только возможностью инверсии. Поскольку фаза  $\varphi$  высокочастотного заполнения постоянна, то параметры  $\theta^{(1)}$  и  $\theta^{(2)}$  являются также постоянными и для них можно записать уравнения состояния:

$$\theta_n^{(1)} = \theta_{n-1}^{(1)}; \quad \theta_n^{(2)} = \theta_{n-1}^{(2)}. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) образуют вместе модель процесса и наблюдений.

Задача состоит в том, чтобы на основе уравнений (5) и (6) построить оценку текущего символа  $B_n$ , рекуррентно вычисляемую на основе оценок на предыдущих шагах с учетом вновь поступившей на  $n$ -м шаге информации.

### 3. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА

С помощью формулы Байеса [19] можно получить выражение для совместного апостериорного распределения вектора  $\mathbf{B}_n \triangleq [B_n, B_{n-1}, \dots, B_{n-k+1}]$  и параметров  $\theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}$  на  $n$ -м шаге фильтрации:

$$p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)} / y^{(n)}) = D(y_n) \cdot p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)} / y^{(n-1)}) \cdot p(y_n / \mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}), \quad (7)$$

где  $y_n = [y_{nc}, y_{ns}]$ ,  $y^{(n)} = (y_1, \dots, y_n)$ .

Выражение для функции правдоподобия может быть записано следующим образом:

$$p(y_n / \mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(y_n / \mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}, \varphi) \cdot p(\varphi / \mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}) d\varphi$$

Подставляя это выражение в (7) и учитывая, что фаза  $\varphi$  – равномерно распределенная на интервале  $[0; \frac{\pi}{2}]$  случайная величина, получим:

$$p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)} / y^{(n)}) = D(y_n) \cdot p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)} / y^{(n-1)}) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(y_n / \mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}, \varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Следует заметить, что частичная информация о полной фазе содержится в оцениваемых параметрах  $\theta_n^{(1)}$  и  $\theta_n^{(2)}$ . Поэтому синтезируемый алгоритм будем называть квазинекогерентным, в отличие от некогерентного, при работе которого информация о фазе сигнала полностью игнорируется. Выражение для функции правдоподобия можно легко получить из уравнения наблюдения (5):

$$p\left(y_n/\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}, \varphi\right) = \frac{1}{2\sigma_\eta^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi\sigma_\eta^2} \cdot \left[(y_{nc} - B_n \cos \varphi)^2 + (y_{ns} - B_n \theta_n^{(2)} \sin \varphi)^2\right]\right\}. \quad (9)$$

В предположении апостериорной независимости компонент вектора  $\mathbf{B}_{n-1}$ , а также величин  $\theta_{n-1}^{(1)}$  и  $\theta_{n-1}^{(2)}$ , на  $n - 1$ -м шаге фильтрации запишем:

$$p\left(\mathbf{B}_{n-1}, \theta_{n-1}^{(1)}, \theta_{n-1}^{(2)}/y^{(n-1)}\right) = \left[\prod_{j=1}^2 p\left(\theta_{n-1}^{(j)}/y^{(n-1)}\right)\right] \cdot \prod_{i=1}^k p\left(\mathbf{B}_{n-i}/y^{(n-1)}\right). \quad (10)$$

Поскольку  $B_{n-i} = \pm 1, i = 1, \dots, k$ ; и  $\theta_{n-1}^{(j)} = \pm 1, j = 1, 2$ , являются двоичными случайными величинами, то соответствующие апостериорные вероятности могут быть описаны следующими выражениями [20]:

$$\begin{aligned} p(\theta_{n-1}^{(j)}/y^{(n-1)}) &= \frac{1}{2}(1 + \hat{\theta}_{n-1}^{(j)} \theta_{n-1}^{(j)}), j = 1; 2, \\ p(B_{n-i}/y^{(n-1)}) &= \frac{1}{2}(1 + \hat{B}_{n-i}^{(n-1)} \cdot B_{n-i}), i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\hat{\theta}_{n-1}^{(j)} = E\{\theta_{n-1}^{(j)}/y^{(n-1)}\}; j = 1, 2; \hat{B}_{n-i}^{(n-1)} = E\{B_{n-i}/y^{(n-1)}\}$  - оценки символов  $\theta_{n-1}^{(1)}, \theta_{n-1}^{(2)}$  и  $B_{n-i}, i = 1, \dots, k$  на  $n$ -м шаге фильтрации, оптимальные по критерию минимума средне-квадратической ошибки [19].

С учетом (5), (10) и (11) можно записать:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}/y^{(n-1)}) &= \frac{1}{4}(1 + \hat{\theta}_{n-1}^{(1)} \cdot \theta_n^{(1)}) \cdot (1 + \hat{\theta}_{n-1}^{(2)} \cdot \theta_n^{(2)}) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2}(1 + \hat{B}_{n-k}^{(n-1)} \cdot B_n \cdot B_{n-l} \cdot \theta_n^{(1)}) \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (1 + \hat{B}_{n-i}^{(n-1)} \cdot B_{n-i}). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (9) и (12) в (8), нетрудно получить следующее выражение для апостериорного распределения  $p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}/y^{(n)})$ :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}/y^{(n)}) &= \frac{2}{\pi} D(y_n) \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\pi\sigma_\eta^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left[(y_{nc} - B_n \cos \varphi)^2 + (y_{ns} - B_n \theta_n^{(2)} \sin \varphi)^2\right]\right\} \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \hat{\theta}_{n-1}^{(1)} \theta_n^{(1)}\right) \cdot \left(1 + \hat{\theta}_{n-1}^{(2)} \theta_n^{(2)}\right) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2} \left(1 + \hat{B}_{n-k}^{(n-1)} \cdot B_n \cdot B_{n-l} \cdot \theta_n^{(1)}\right) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} \left(1 + \hat{B}_{n-i}^{(n-1)} B_{n-i}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Из условия нормировки

$$\sum_{B_n} \dots \sum_{B_{n-k+1}} \sum_{\theta_n^{(1)}} \sum_{\theta_n^{(2)}} p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}/y^{(n)}) = 1$$

можно получить выражение для нормировочного коэффициента  $D(y_n)$ :

$$\begin{aligned} D(y_n) &= \left[2\pi^2 \sigma_\eta^2 \exp\left\{\frac{y_{nc}^2 + y_{ns}^2 + 1}{2\sigma_\eta^2}\right\}\right] / \left\{2Q\left(\frac{y_{nc}}{\sigma_\eta^2}, \frac{y_{ns}}{\sigma_\eta^2}\right) \cdot \left[1 + \hat{\theta}_{n-1}^{(2)} \cdot \right. \right. \\ &\cdot \left. \left. T_{\alpha\beta}\left(\frac{y_{nc}}{\sigma_\eta^2}, \frac{y_{ns}}{\sigma_\eta^2}\right) + \hat{B}_{n-k}^{(n-1)} \cdot \hat{B}_{n-l}^{(n-1)} \cdot \hat{\theta}_{n-1}^{(1)} \cdot \left(T_\alpha\left(\frac{y_{nc}}{\sigma_\eta^2}, \frac{y_{ns}}{\sigma_\eta^2}\right) + \hat{\theta}_{n-1}^{(2)} \cdot T_\beta\left(\frac{y_{nc}}{\sigma_\eta^2}, \frac{y_{ns}}{\sigma_\eta^2}\right)\right)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 Q(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(x \cos \varphi) \operatorname{ch}(y \sin \varphi) d\varphi, \\
 T_\alpha(x, y) &= \frac{2}{\pi Q(x, y)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(x \cos \varphi) \operatorname{ch}(y \sin \varphi) d\varphi, \\
 T_\beta(x, y) &= \frac{2}{\pi Q(x, y)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(x \cos \varphi) \operatorname{sh}(y \sin \varphi) d\varphi, \\
 T_{\alpha\beta}(x, y) &= \frac{2}{\pi Q(x, y)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(x \cos \varphi) \operatorname{sh}(y \sin \varphi) d\varphi.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть  $\widehat{B}_{n-r}^{(n)} = E \{B_{n-r}/y^{(n)}\}$  - оценка  $B_{n-r}$  на  $n$ -м шаге фильтрации, где  $r = 0, 1, \dots, k-1$ . Тогда имеем:

$$\widehat{B}_{n-r}^{(n)} = \sum_{B_n} \dots \sum_{B_{n-k+1}} \sum_{\theta_n^{(1)}} \sum_{\theta_n^{(2)}} B_{n-r} p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}/y^{(n)}). \tag{16}$$

Аналогично, если  $\widehat{\theta}_n^{(j)} = E \{\theta_n^{(j)}/y^{(n)}\}$ ,  $j = 1; 2$ , - оценка символа  $\theta_n^{(1)}$  или  $\theta_n^{(2)}$  на  $n$ -м шаге, то:

$$\widehat{\theta}_n^{(j)} = \sum_{B_n} \dots \sum_{B_{n-k+1}} \sum_{\theta_n^{(1)}} \sum_{\theta_n^{(2)}} \widehat{\theta}_n^{(j)} p(\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}/y^{(n)}). \tag{17}$$

Из выражений (13)–(17) можно получить рекуррентный алгоритм оценивания величин  $\mathbf{B}_n, \theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}$ :

$$\widehat{B}_{n-r}^{(n)} = \begin{cases} \widehat{B}_{n-r}^{(n-1)}, r \neq l, r \neq 0 \\ \frac{\widehat{B}_{n-l}^{(n-1)}(1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_{\alpha\beta}) + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} (T_\alpha + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta)}{(1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_{\alpha\beta}) + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} (T_\alpha + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta)}, r = l \\ \frac{\widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} (1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_{\alpha\beta}) + (T_\alpha + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta)}{(1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_{\alpha\beta}) + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} (T_\alpha + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta)}, r = 0 \\ r = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{\theta}_n^{(1)} &= \frac{\widehat{\theta}_{n-1}^{(1)}(1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_{\alpha\beta}) + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} (T_\alpha + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta)}{(1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_{\alpha\beta}) + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} (T_\alpha + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta)}, \\
 \widehat{\theta}_n^{(2)} &= \frac{\widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} + T_{\alpha\beta} \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} (\widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\alpha + T_\beta)}{(1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_{\alpha\beta}) + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} (T_\alpha + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta)}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь опущены аргументы  $y_{nc}/\sigma_\eta^2, y_{ns}/\sigma_\eta^2$  у функций  $T_\alpha, T_\beta, T_{\alpha\beta}$ . Начальные условия для алгоритма (18) могут быть нулевыми:  $B_i^{(0)} = 0, i = 1, \dots, k, \widehat{\theta}_0^{(j)} = 0, j = 1; 2$ .

Если использовать приближенное равенство

$$T_\alpha(x, y) \cdot T_\beta(x, y) \approx T_{\alpha\beta}(x, y), \tag{19}$$

то алгоритм (18) путем несложных алгебраических преобразований можно представить в виде:

$$\widehat{B}_{n-r}^{(n)} = \begin{cases} \widehat{B}_{n-r}^{(n-1)}, r \neq l, r \neq 0 \\ \frac{\widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} + \widehat{Z}_{nA} \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)}}{1 + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} \widehat{Z}_{nA}}, r = l \\ \frac{\widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} + \widehat{Z}_{nA}}{1 + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} \widehat{Z}_{nA}}, r = 0 \\ r = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases} \tag{20}$$

$$\widehat{\theta}_n^{(1)} = \frac{\widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{Z}_{nA}}{1 + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} \widehat{Z}_{nA}}, \quad \widehat{\theta}_n^{(2)} = \frac{\widehat{Z}_{nB} + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} \widehat{Z}_{nC}}{1 + \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} \widehat{Z}_{nA}},$$

где использованы обозначения:

$$\widehat{Z}_{nA} = \frac{T_\alpha + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta}{1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\alpha T_\beta}; \quad \widehat{Z}_{nB} = \frac{\widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} + T_\alpha T_\beta}{1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\alpha T_\beta}; \quad \widehat{Z}_{nC} = \frac{\widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\alpha + T_\beta}{1 + \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\alpha T_\beta}.$$

Пользуясь известным соотношением для гиперболических функций, полученный алгоритм можно преобразовать к несколько более простому виду [13, 14]:

$$\widehat{B}_{n-r}^{(n)} = \begin{cases} \widehat{B}_{n-r}^{(n-1)}, r \neq l, r \neq 0 \\ \text{th} \left[ \text{arth} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} + \text{arth} \left( \widehat{Z}_{nA} \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} \right) \right], r = l \\ \text{th} \left[ \text{arth} \left( \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} \right) + \text{arth} \widehat{Z}_{nA} \right], r = 0 \\ r = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_n^{(1)} &= \text{th} \left[ \text{arth} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} + \text{arth} \left( \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{Z}_{nA} \right) \right], \\ \widehat{\theta}_n^{(2)} &= \text{th} \left[ \text{arth} \widehat{Z}_{nB} + \text{arth} \left( \widehat{B}_{n-k}^{(n-1)} \widehat{B}_{n-l}^{(n-1)} \widehat{\theta}_{n-1}^{(1)} \widehat{Z}_{nC} \right) \right], \\ \widehat{Z}_{nA} &= \text{th} \left[ \text{arth} T_\alpha + \text{arth} \left( \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\beta \right) \right], \\ \widehat{Z}_{nB} &= \text{th} \left[ \text{arth} \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} + \text{arth} (T_\alpha T_\beta) \right], \\ \widehat{Z}_{nC} &= \text{th} \left[ \text{arth} \left( \widehat{\theta}_{n-1}^{(2)} T_\alpha \right) + \text{arth} T_\beta \right] \end{aligned}$$

При выводе выражения для  $\widehat{\theta}_n^{(2)}$  в (21) использовалось приближенное равенство  $\widehat{Z}_{nA} \approx \widehat{Z}_{nB} \widehat{Z}_{nC}$ . Начальные условия в (20) и (21) нулевые.

С учетом известного асимптотического (при  $|Z| \rightarrow \infty$ ) равенства [14]  $\text{arth}(\text{th}x \cdot \text{th}y) \approx \text{sign}x \cdot \text{sign}y \cdot \min\{|x|, |y|\}$  алгоритм (21) можно существенно упростить. В результате имеем:

$$\widehat{\beta}_{n-r}^{(n)} = \begin{cases} \widehat{\beta}_{n-r}^{(n-1)}, r \neq l, r \neq 0 \\ \widehat{\beta}_{n-l}^{(n-1)} + F \left( \widehat{\beta}_{n-k}^{(n-1)}, \widehat{\vartheta}_{n-1}^{(1)}, \widehat{q}_{nA} \right), r = l \\ \widehat{q}_{nA} + F \left( \widehat{\beta}_{n-k}^{(n-1)}, \widehat{\vartheta}_{n-1}^{(1)}, \widehat{\beta}_{n-l}^{(n-1)} \right), r = 0 \\ r = 0, 1, \dots, k-1 \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta}_n^{(1)} &= \hat{\vartheta}_{n-1}^{(1)} + F\left(\hat{\beta}_{n-k}^{(n-1)}, \hat{\beta}_{n-l}^{(n-1)}, \hat{q}_{nA}\right) \\ \hat{\vartheta}_n^{(2)} &= \hat{q}_{nB} + F\left(\hat{\beta}_{n-k}^{(n-1)}, \hat{\beta}_{n-l}^{(n-1)}, \hat{\vartheta}_{n-1}^{(1)}, \hat{q}_{nC}\right) \\ \hat{q}_{nA} &= S_{\alpha,n} + F\left(\hat{\vartheta}_{n-1}^{(2)}, S_{\beta,n}\right) \\ \hat{q}_{nB} &= \hat{\vartheta}_{n-1}^{(2)} + F\left(S_{\alpha}, S_{\beta,n}\right) \\ \hat{q}_{nC} &= S_{\beta,n} + F\left(\hat{\vartheta}_{n-1}^{(2)}, S_{\alpha,n}\right) \\ \hat{\vartheta}_0^{(1)} &= \hat{\vartheta}_0^{(2)} = 0, \quad \hat{\beta}_{-i}^{(0)} = 0, \quad i = 1, \dots, k,\end{aligned}$$

где  $F(a, b, \dots, c)$  - функция следующего вида:

$$F(a, b, \dots, c) = \text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b) \cdot \dots \cdot \text{sign}(c) \cdot \min(|a|, |b|, \dots, |c|).$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{n-r}^{(n)} &\triangleq \text{arth}\left(\hat{B}_{n-r}^{(n)}\right), \quad \hat{\beta}_{n-r}^{(n-1)} \triangleq \text{arth}\left(\hat{B}_{n-r}^{(n-1)}\right), \quad r = 1, \dots, k \\ \hat{\vartheta}_n^{(j)} &\triangleq \text{arth}\left(\hat{\theta}_n^{(j)}\right), \quad j = 1, 2 \\ S_{\alpha,n} &\triangleq \text{arth}\left(T_{\alpha}\left(\left(\frac{y_{nc}}{\sigma_{\eta}^{(2)}}\right), \left(\frac{y_{ns}}{\sigma_{\eta}^{(2)}}\right)\right)\right), \quad S_{\beta,n} \triangleq \text{arth}\left(T_{\beta}\left(\left(\frac{y_{nc}}{\sigma_{\eta}^{(2)}}\right), \left(\frac{y_{ns}}{\sigma_{\eta}^{(2)}}\right)\right)\right), \\ \hat{q}_{nA} &\triangleq \text{arth}\left(\hat{Z}_{nA}\right), \quad \hat{q}_{nB} \triangleq \text{arth}\left(\hat{Z}_{nB}\right), \quad \hat{q}_{nC} \triangleq \text{arth}\left(\hat{Z}_{nC}\right)\end{aligned}$$

Полученный алгоритм не содержит операций умножения и деления (он требует лишь умножения на  $\pm 1$ ) и значительно меньшее количество, чем алгоритм (21) блоков функциональных преобразований вида  $\text{th}(\cdot)$  и  $\text{arth}(\cdot)$ . Поэтому он заметно более прост в реализации, чем (21).

Если формирующий регистр ПСП имеет несколько отводов ( $p \neq 1$ ), то полученные в данной главе алгоритмы могут быть обобщены и на этот случай. Соответствующие выражения здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Если фаза высокочастотного заполнения известна (т.е. имеет место когерентный прием), то алгоритм фильтрации ЛРП можно записать в следующем виде [13, 14]:

$$\hat{A}_{n-r}^{(n)} = \begin{cases} \hat{A}_{n-r}^{(n-1)}, & r \neq l, r \neq 0 \\ \frac{\hat{A}_{n-k}^{(n-1)} \text{th}\left(y_n/\sigma_{\eta}^2\right) + \hat{A}_{n-l}^{(n-1)}}{1 + \hat{A}_{n-k}^{(n-1)} \hat{A}_{n-l}^{(n-1)} \text{th}\left(y_n/\sigma_{\eta}^2\right)}, & r = l \\ \frac{\hat{A}_{n-k}^{(n-1)} \text{th}\left(y_n/\sigma_{\eta}^2\right) + \hat{A}_{n-l}^{(n-1)}}{1 + \hat{A}_{n-k}^{(n-1)} \hat{A}_{n-l}^{(n-1)} \text{th}\left(y_n/\sigma_{\eta}^2\right)}, & r = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Из соотношения (23) можно получить соответствующий упрощенный вариант алгоритма [14]:

$$\hat{\alpha}_{n-r}^{(n)} = \begin{cases} \hat{\alpha}_{n-r}^{(n-1)}, & r \neq l, r \neq 0 \\ \hat{\alpha}_{n-l}^{(n-1)} + F\left(\hat{\alpha}_{n-k}^{(n-1)}, \left(y_n/\sigma_{\eta}^2\right)\right), & r = l \\ \left(y_n/\sigma_{\eta}^2\right) + F\left(\hat{\alpha}_{n-k}^{(n-1)}, \hat{\alpha}_{n-l}^{(n-1)}\right), & r = 0 \\ r = 0, \dots, k-1 \\ \hat{\alpha}_{-i}^{(0)} = 0, & i = 1, \dots, k \end{cases} \quad (24)$$

Следует отметить особенности функции  $F(a, b, \dots, c) = \text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b) \dots \text{sign}(c) \cdot \min(|a|, |b|, \dots, |c|)$ . Для неё справедливо следующее свойство  $F(\delta a, \delta b, \dots, \delta c) = \delta F(a, b, \dots, c)$ , где  $\delta > 0$ . Это делает алгоритм нечувствительным к каким-либо операциям масштабирования, в частности, позволяет исключить деление наблюдения на дисперсию  $\sigma_\eta^2$ .

С учетом этого свойства и свойств функций  $\text{arth}(T_\alpha(x, y))$ ,  $\text{arth}(T_\beta(x, y))$  можно сделать следующую замену:  $S_{\alpha, n} \rightarrow y_{nc}$ ,  $S_{\beta, n} \rightarrow y_{ns}$ . В результате получим следующий алгоритм:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{n-r}^{(n)} &= \begin{cases} \hat{\beta}_{n-r}^{(n-1)}, & r \neq l, r \neq 0 \\ \hat{\beta}_{n-l}^{(n-1)} + F\left(\hat{\beta}_{n-k}^{(n-1)}, \hat{\vartheta}_{n-1}^{(1)}, \hat{q}_{nA}\right), & r = l \\ \hat{q}_{nA} + F\left(\hat{\beta}_{n-k}^{(n-1)}, \hat{\vartheta}_{n-1}^{(1)}, \hat{\beta}_{n-l}^{(n-1)}\right), & r = 0 \end{cases} \\ \hat{\vartheta}_n^{(1)} &= \hat{\vartheta}_{n-1}^{(1)} + F\left(\hat{\beta}_{n-k}^{(n-1)}, \hat{\beta}_{n-l}^{(n-1)}, \hat{q}_{nA}\right) \\ \hat{\vartheta}_n^{(2)} &= \hat{q}_{nB} + F\left(\hat{\beta}_{n-k}^{(n-1)}, \hat{\beta}_{n-l}^{(n-1)}, \hat{\vartheta}_{n-1}^{(1)}, \hat{q}_{nC}\right) \\ \hat{q}_{nA} &= y_{cn} + F\left(\hat{\vartheta}_{n-1}^{(2)}, y_{sn}\right) \\ \hat{q}_{nB} &= \hat{\vartheta}_{n-1}^{(2)} + F\left(y_{cn}, y_{sn}\right) \\ \hat{q}_{nC} &= y_{sn} + F\left(\hat{\vartheta}_{n-1}^{(2)}, y_{cn}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

при следующих начальных условиях:  $\hat{\vartheta}_0^{(1)} = \hat{\vartheta}_0^{(2)} = 0$ ,  $\hat{\beta}_{-i}^{(0)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Алгоритм (25) не требует использования нелинейных функций вида  $\text{th}(\cdot)$  и  $\text{arth}(\cdot)$  и, кроме того, не требует знания дисперсии  $\sigma_\eta^2$  шума наблюдения.

Окончательным результатом работы алгоритмов является оценка текущего сегмента исходной последовательности  $\hat{\mathbf{A}}_n^{(n)} = [\hat{A}_n^{(n)} \hat{A}_{n-1}^{(n)} \dots \hat{A}_{n-k+1}^{(n)}]$ , где  $\hat{A}_{n-i}^{(n)} = \text{sign}(\hat{\beta}_{n-i}^{(n)}) \text{sign}(\hat{\theta}_n^{(1)})$ ,  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ .

#### 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Характеристики разработанных алгоритмов были исследованы путем статистического моделирования. При этом использовалась ЛРП с периодом  $M = 2^{11} - 1$  (характеристический полином (100000000101)).

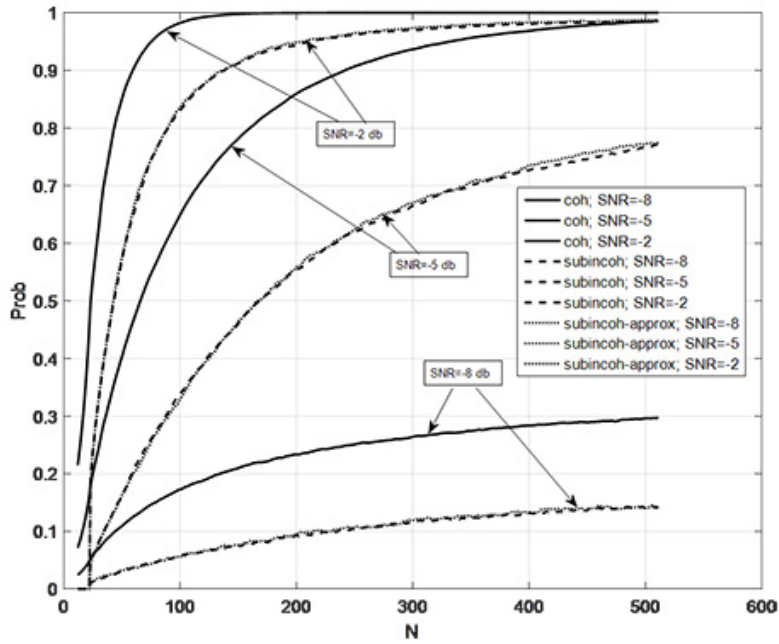
На Рис. 1 приведены зависимости вероятности правильного оценивания текущего состояния формирующего регистра сдвига от времени накопления для разных отношений сигнал/шум (-8 дБ, -5 дБ, -3 дБ) для трёх алгоритмов:

- когерентного упрощённого (24) – ‘coh’,
- квазинекгерентного упрощённого (21) – ‘subincoh’,
- квазинекгерентного с аппроксимацией (22) – ‘subincoh-approx’.

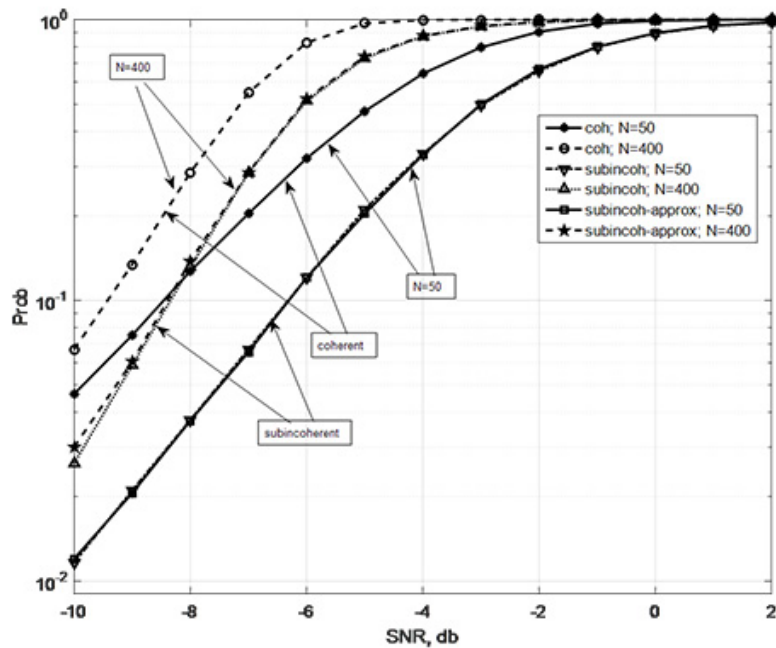
На Рис. 2 приведены зависимости вероятности правильного оценивания текущего состояния формирующего регистра сдвига от отношения сигнал/шум для разных времён накопления (50 и 400 отсчётов) для тех же трёх алгоритмов.

Из приведённых графиков видно, что характеристики квазинекгерентного упрощённого алгоритма (21) и квазинекгерентного алгоритма с аппроксимацией (22) практически совпадают. При длине выборки  $N = 400$  отсчётов квазинекгерентный алгоритм проигрывает когерентному около 1 дБ, при более коротких выборках величина проигрыша возрастает.

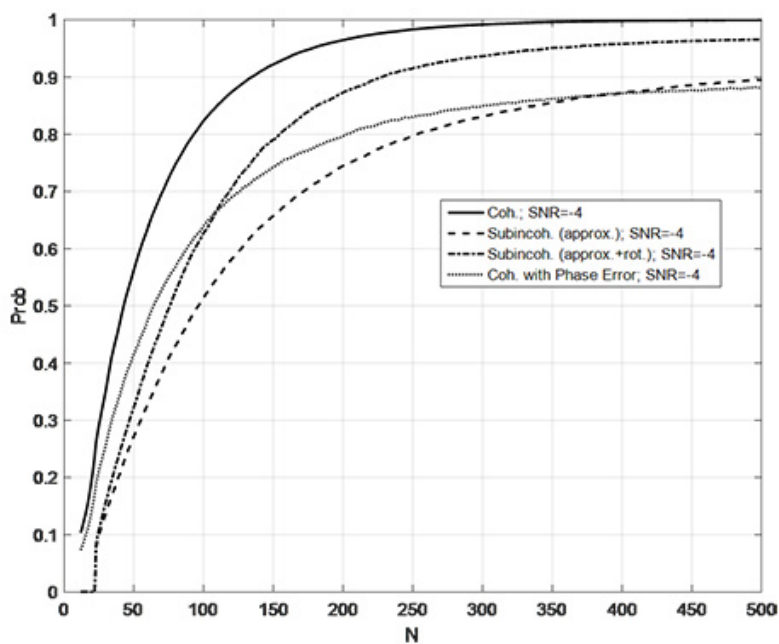




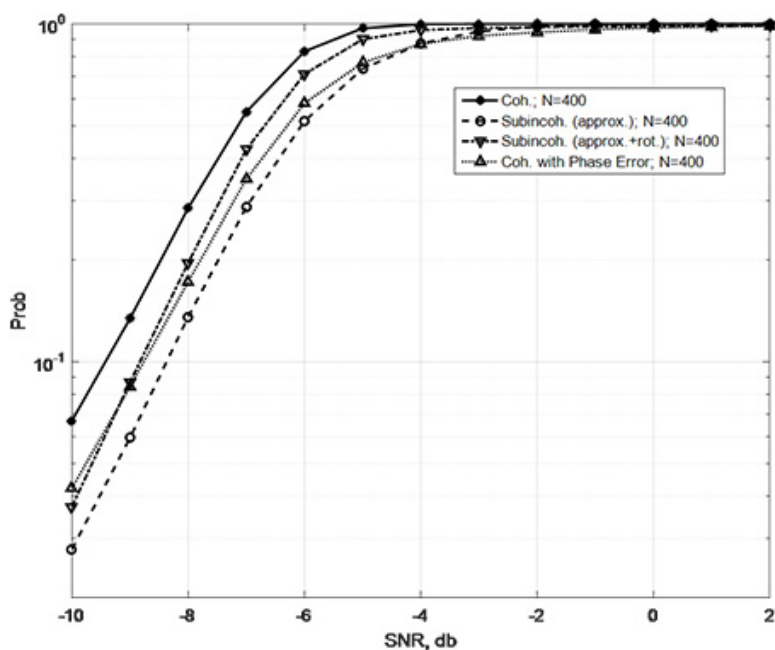
**Рис. 1.** Зависимости вероятности правильного оценивания текущего состояния формирующего регистра сдвига от времени накопления для разных отношений сигнал/ шум (-8 дБ, -5 дБ, -3 дБ) для трёх алгоритмов: когерентного упрощённого (24) – ‘coh’, квазинекогерентного упрощённого (21) – ‘subincoh’, квазинекогерентного с аппроксимацией (22) – ‘subincoh – approx’.



**Рис. 2.** Зависимости вероятности правильного оценивания текущего состояния формирующего регистра сдвига от отношения сигнал шум для разных времён накопления (50 и 400 отсчётов) для трёх алгоритмов: когерентного упрощённого (24) – ‘coh’, квазинекогерентного упрощённого (21) – ‘subincoh’, квазинекогерентного с аппроксимацией (22) – ‘subincoh – approx’.



**Рис. 3.** Зависимости вероятности правильного оценивания текущего состояния формирующего регистра сдвига от времени накопления при отношении сигнал/шум -4 дБ для алгоритмов: (24) – ‘Coh.’; (22) – ‘Subincoh.’; (22), (26) – ‘Subincoh.-approx.’; (24) – ‘Coh. with Phase Error’.



**Рис. 4.** Зависимости вероятности правильного оценивания текущего состояния формирующего регистра сдвига от отношения сигнал шум при длине выборки наблюдения 400 отсчётов для алгоритмов: (24) – ‘Coh.’; (22) – ‘Subincoh.’; (22), (26) – ‘Subincoh.-approx.’; (24) – ‘Coh. with Phase Error’.

В результате анализа предложенных квазинекогерентных алгоритмов было отмечено, что качество алгоритма зависит от значения фазы, приведённой к интервалу  $[0; \pi/2]$ . Наилучшие результаты наблюдались, когда значения фазы лежали в центре этого интервала. Поэтому было предложено делать грубую оценку фазы и поворачивать наблюдение таким образом, чтобы значение фазы попадало в центр этого интервала, т.е. лежало в окрестности  $\pi/4$ . Для этого можно использовать следующий алгоритм:

$$\hat{\varphi}_n = \frac{1}{2} \text{sign}(Y_{sn}) \arccos \left( \frac{Y_{cn}}{\sqrt{(Y_{cn})^2 + (Y_{sn})^2}} \right), \quad (26)$$

$$\tilde{y}_n = y_n e^{-j\hat{\varphi}_n + j\frac{\pi}{4}}$$

где

$$Y_{cn} = \sum_{i=1}^n (y_{ci}^2 - y_{si}^2),$$

$$Y_{sn} = 2 \sum_{i=1}^n y_{si} y_{ci}$$

На Рис. 3 приведены зависимости вероятности правильного оценивания текущего состояния формирующего регистра сдвига от времени накопления при отношении сигнал/шум -4 дБ для следующих алгоритмов:

- когерентного упрощённого алгоритма (24) – ‘Coh.’,
- квазинекогерентного упрощённого алгоритма с аппроксимацией (22) – ‘Subincoh.’,
- квазинекогерентного упрощённого алгоритма с аппроксимацией и поворотом фазы (22), (26) – ‘Subincoh.-approx.’;
- когерентного упрощённого алгоритма (24) при наличии фазовых ошибок с дисперсией  $0,25 \text{ рад}^2$  (квазикогерентного) – ‘Coh. with Phase Error’.

На Рис. 4 приведены зависимости вероятности правильного оценивания текущего состояния формирующего регистра сдвига от отношения сигнал/шум при длине выборки наблюдения 400 отсчётов для тех же алгоритмов.

Из последнего графика видно, что характеристики квазинекогерентного алгоритма с поворотом фазы отличаются от потенциальной границы (при точно известной фазе) всего на 0.5-0.7 дБ в диапазоне вероятностей правильной синхронизации 0.1-0.9. При этом он обладает достаточно простой реализацией. Из Рис. 3 видно, что при больших значениях выборки квазинекогерентный алгоритм становится лучше квазикогерентного с ошибками оценивания фазы.

Таким образом, синтезированные в данной статье алгоритмы (21), (22), (26) осуществляют синхронизацию по любому отрезку ЛРП при случайной фазе сигнала, поэтому их можно применять, в частности, в системах связи, использующих ансамбль сигналов на основе сегментов ЛРП [2] – [8], что позволит осуществить синхронизацию по любому сегменту ЛРП.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория и применение псевдослучайных сигналов / А.И. Алексеев и др. - М.: Наука, 1969, 448 с.
2. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами, М.: Радио и связь, 1985, 384 с.
3. Диксон Р.К. Широкополосные системы // пер. с англ. под редакцией В.И. Журавлева, М.: Связь, 1979, 302 с.

4. Ипатов В. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. - М.: Техносфера, 2007, 486 с.
5. Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев А.Е., Шестопалов В.И. Помехозащищённость систем радиосвязи с расширением спектра прямой модуляцией псевдослучайной последовательностью. Под ред. В.И. Борисова. Изд. 2-е перераб. и доп. - М.: РадиоСофт, 2011, 550 с.
6. Тепляков И.М., Рощин Б.В., Фомин А.И., Вейцель В.А. Радиосистемы передачи информации. - М.: Радио и связь, 1982. - 264 с.
7. Журавлев В.И. Поиск и синхронизация в широкополосных системах: М. Радио и связь, 1986, 240 с.
8. Петров Е.П., Алешкин Е.А. Метод подавления подобных помех с неизвестной амплитудой и задержкой сигнала в системах связи с шумоподобными сигналами. // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. Том 10. №11. с. 34-39.
9. Борисов В.И., Шестопалов В.И., Лимарев А.Е., Капаева Т.Ф. Оценка эффективности синхронизации по задержке в широкополосных системах связи с множественным доступом. //Радиотехника. 2012. № 8. с. 4-17.
10. Шахтарин Б.И., Сизых В.В., Сидоркина Ю.А, Андрианов И.М., Калашников К.С. Синхронизация в радиосвязи и радионавигации. Учебное пособие для вузов. Горячая линия - Телеком, 2011, 256 с.
11. Салтыков А.Р. Синхронизация стохастических сложных сигналов, обеспечивающих повышение безопасности связи и помехозащищённости систем связи с подвижными объектами // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2011, №6, с. 52-56.
12. R. Ward. Acquisition of Pseudonoise Signals by Sequential Estimation // IEEE Transactions on Communications, vol. 13, № 4, pp. 475-483, Dec. 1965.
13. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б. Метод приема псевдослучайных сигналов с неизвестной задержкой. //Известия высших учебных заведений. Радиотехника № 4, 1991, т.34, с. 47 - 51.
14. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Терехов А.Л., Алгоритм фильтрации линейных рекуррентных последовательностей из смеси с шумом. // Радиотехника, №6, 1994, с. 66 - 74.
15. Петров Е.П., Частиков А.В., Харина Н.Л., Петров И.Е. Алгоритм и структура устройства быстрого поиска шумоподобных сигналов // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2013, №4, с. 38-41.
16. Прозоров, Д. Е. Метод последовательной оценки псевдослучайных сигналов на основе модели многосвязной цепи Маркова [Электронный ресурс] / Д.Е. Прозоров // Журнал радиотехники: электронный журнал. - 2013. - №10. - Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct13/8/text.pdf>, свободный. - Загл. с экрана.
17. Prozorov D., Chistyakov A. Nonlinear Filtering of Pseudonoise Signals Using HighOrder Markov Chain Model // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2013), Rostov-on-Don, Russia, September 27 - 30, 2013, pp. 328-332.
18. Balanov M., Prozorov D. Extended Recursive Soft Sequential Estimation of m-sequences. 2015 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies AICT 2015, Rostov-on-Don, Russia 14 - 16 October 2015, pp. 373 - 376.
19. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов, М.: Радио и связь 1983, 320с.
20. Бакулин М.Г. Фильтрация цифровых последовательностей с использованием моментного описания распределения вероятностей. // Электросвязь, №1, 2000, с. 24 - 27.

## Quasi-incoherent filtering algorithm for linear recurrent sequences

M.G.Bakulin, V.B.Kreyndelin, D.Yu.Pankratov

The article considers the problem of synchronization in information transmission systems that use noise-like signals based on linear recurrent sequences (LRS). For the model of symbols sequence an approach is used associated with the representation of LRS in the form of Markov chain. For the reception of LRS based pilot sequences used for in radio access systems the algorithms described in this paper can be used. The article is devoted to the synthesis of quasi-noncoherent (subincoherent) recurrent filtration algorithms of LRS and the results of their computer simulation are given. The synthesized algorithms can be classified as quasi-noncoherent algorithms, as opposed to noncoherent algorithms that use averaging over the entire region of phase uncertainty, or from coherent, which use the exact phase of the received signal.

**KEYWORDS:** information transmission systems, filtration algorithms, Markov chains, linear recurrent sequences, quasi-noncoherent algorithms, quasi-coherent algorithms, coherent algorithms