Информационные процессы, Том 18, № 4, 2018, стр. 335–365

К задаче последовательной проверки гипотез

И.И. Цитович

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия,
Научно-исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 20.11.2018

Аннотация—В работе рассматривается оценка значения некоторого функционала от суммы условно нормально распределенных случайных величин, которая связана с задачей последовательной проверки статистических гипотез. Установлено, что оценка является ограниченной при росте параметра, отвечающего за среднюю продолжительность наблюдений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: последовательная проверка гипотез, кусочно-линейная функция, нормальное распределение, векторнозначная случайная величина.

1. ВВЕДЕНИЕ

В задачах последовательной проверки статистических гипотез используются статистики, основанные на отношении правдоподобия, при этом целесообразно использовать многоступенчатые решения. Исследованию этой задачи в различных постановках, близких к [1]– [3], посвящена обширная литература (см., например, [4], [5]). Основное внимание уделяется построению асимптотически оптимальных стратегий когда есть малый параметр, в роли которого обычно выступает ошибка принятия неправильного решения α. Если в первых работах основное внимание уделялось задаче, обеспечивающей достижение главного члена асимптотического разложения функции риска, то в последнее время главное внимание уделяется процедурам более высокого порядка эффективности ([6]–[18]). Это связано с тем обстоятельством, что имеется широкий класс процедур, которые обеспечивают достижение главного члена асимптотики, однако для практических задач они дают существенно разные значения для функции риска, поэтому представляется важным выяснить причины возникновения этих различий. В работах [19] и [6] были предприняты попытки получить уточнение функции риска. В [19] была получена нижняя граница для средней продолжительности наблюдений в терминах решения некоторой задачи линейного программирования. Анализ решения этой задачи показывает, что $R(\theta,\alpha)$ — среднее время наблюдений до принятия решения — имеет вид

$$R(\theta,\alpha) \geq I(\theta)^{-1}|\ln(\alpha)| + K|\ln(\alpha)|^{1/2} + o(|\ln(\alpha)|^{1/2}), \tag{1}$$

где $I(\theta)$ — информационное количество, характеризующее "расстояние" от параметра θ (характеризующего гипотезы) до конкурирующих гипотез при использовании асимптотически оптимального управления, причем $K \geq 0$. В [6] была построена процедура управления наблюдениями, для которой при выполнении некоторых достаточно общих условий выполнялось неравенство

$$R(\theta,\alpha) \leq I(\theta)^{-1}|\ln(\alpha)| + O(\ln|\ln(\alpha)|).$$

Этот факт говорит о том, что величина K может обратиться в 0. Для получения более точных результатов важно получить оценку остаточного члена вида $O(1)$

Мы рассматриваем стратегии, в которых на первом этапе, имеющем относительно небольшую длительность, используется управление, позволяющее получить состоятельную оценку неизвестного параметра, а на втором этапе использовать асимптотически оптимальное управление, полученное в предположении, что оценка совпадает со значением неизвестного параметра. Как правило, такие процедуры обеспечивают асимптотическую оптимальность процедуры в том смысле, что обеспечивается достижение главного члена асимптотического разложения (1). Это связано с тем обстоятельством, что можно определить значение параметра θ с экспоненциально убывающей вероятностью ошибки (например, используя оценку максимального правдоподобия).

Оказывается (см. [19]), что для построения стратегий, отличающихся от оптимальных на ограниченную величину, можно ограничиться лишь процедурами, правило остановки которых следующее: необходимо, чтобы отношение правдоподобия для истинного значения параметра θ превзошло заданный уровень при всех альтернативных значениях параметра. Этот принцип гораздо проще задачи поиска оптимального решающего правила δ, основанного на применении динамического программирования (см., например, [4]).

Итак, правило выбора асимптотически оптимального эксперимента должно обеспечить наиболее быстрое достижение вектором, составленным из логарифмов отношений правдоподобия, положительного октанта пространства R^m, размерность которого равна количеству альтернативных гипотез к параметру θ (у начальной точки соответствующего процесса все координаты отрицательные). Поскольку у приращений вниз логарифма отношения правдоподобия имеется экспоненциальный момент, то можно ограничиться лишь теми компонентами вектора, которые “движутся” с минимальной средней скоростью при использовании управления первого порядка эффективности (управления, обеспечивающего достижение главного члена функции риска). Это обстоятельство позволяет в задаче управления движением вектора логарифма отношения правдоподобия рассматривать пространство L меньшей размерности, чем m, (его размерность n равна количеству координат вектора логарифма отношения правдоподобия с минимальным средним приращением при использовании управления первого порядка эффективности) и в регулярном случае ($n = 1$) использовать процедуру из [20] на последнем этапе. Таким образом оказалось, что требуемые в [20] условия оказываются типичными для реальных задач, а не для узкого класса задач, как неправильно указано в [19].

Построенная в [8] процедура использует три этапа: на первом из них строится оценка неизвестного параметра и используется стратегия, обеспечивающая достижение главного члена функции риска (1), на втором — производится корректировка величины случайного отклонения отношения правдоподобия от прямой стабилизации, построенной на основании оценки неизвестного параметра, полученной на первом этапе, а на третьем этапе управление строится аналогично [20]. Первый этап имеет продолжительность $T_1 = O(|\ln(\alpha)|)$ наблюдений, второй и третий — $o(T_1)$.

Поскольку для обеспечения остаточного члена вида $O(1)$ все оценки для среднего времени наблюдений проводятся с точностью до константы, то при анализе поведения отношения правдоподобия приходится использовать достаточно тонкие оценки для кусочно-линейных функционалов от сумм, вообще говоря, зависимых случайных величин. Асимптотические свойства предельного поведения отношения правдоподобия и анализируются в настоящей работе.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть случайная векторнозначная (в пространстве R^n) величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $\mathbf{0}$ и $T_1\Sigma_1$, случайная величина η — условно нормальное распределение (при условии ξ) с параметрами $\mathbf{0}$ и $(T_2 - f(\xi))\Sigma_2$, а величина ζ — условно нормальное распределение (при условии ξ) с параметрами $\mathbf{0}$ и $f(\xi)\Sigma_3$, где $f(\xi)$ — кусочно-линейная однородная непрерывная функция, причем найдутся не зависящие от рассматриваемых случайных величин и параметров положительные числа c_+ и c_-, для которых выполняются почти наверное неравенства

$$c_-|\xi| \leq f(\xi) \leq c_+|\xi|, \tag{2}$$

матрицы Σ_1 и Σ_2 являются невырожденными, причем матрица Σ_2 не является случайной, а матрица Σ_3 является случайной, ее распределение зависит от ξ и она является строго равномерно по ξ невырожденной.

Прокомментируем эти предположения.

Случайная величина ξ отвечает за накопленное отношение правдоподобие на первом этапе, а число T_1 — количество наблюдений на первом этапе. Случайная величина η отвечает за накопленное отношение правдоподобие на втором этапе. Ее распределение зависит от результата первого этапа, поэтому нужно рассматривать условное распределение при условии ξ. Третий этап необходим для коррекции стратегии выбора управления на заключительной стадии в зависимости от накопленного отклонения от предполагаемого среднего значения траектории отношения правдоподобия. Его начало должно быть до достижения отношением правдоподобия порога принятия решения. В связи с этим появляются ограничения на продолжительность второго и третьего этапов: например $T_2 = T_1^{3/4}$.

Т.к. $T_1 \to \infty$, $T_2 \to \infty$, а так же $\mathbf{E}|\xi| \to \infty$ при $\alpha \to 0$, то асимптотически накопленное отношение правдоподобие на соответствующем этапе будет иметь условное нормальное распределение при условии значения накопленного отношения правдоподобия на предыдущем этапе, поскольку приращения отношения правдоподобия — условно независимые одинаково распределенные случайные величины при условии значения накопленного отношения правдоподобия на предыдущем этапе.

В приводимой теореме ξ_1, η_1 и ζ_1 — это первые координаты соответствующих векторов.

Теорема. *Пусть ξ, η и ζ — случайные векторнозначные величины, удовлетворяющие условиям, сформулированным выше, тогда найдется не зависящая от T_1 величина K, для которой выполняется неравенство*

$$\mathbf{E}[(\xi_1 + \eta_1)I(\xi + \eta \geq \mathbf{0}) - (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1)I(\xi + \eta + \zeta \geq \mathbf{0})] \leq K \tag{3}$$

(неравенство $\xi \geq \mathbf{0}$ означает, что все координаты вектора ξ являются неотрицательными), если $T_2 = T_1^{3/4}$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть

$$g(a) = \mathbf{E}(a + Y)^+, \tag{4}$$

где Y одномерная случайная величина со стандартным нормальным распределением, a^+ равно a при положительном значении a, и равно 0 в остальных случаях. Тогда

$$g(a) = a\Phi(a) + (2\pi)^{-1/2} exp(-a^2/2), \tag{5}$$

где $\Phi(a)$ — функция распределения стандартного нормального закона, $\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp(-\frac{a^2}{2})$, причем выполняется свойство

$$|g(a) - a^+| \leq 2(2\pi)^{-1/2} exp(-a^2/2) \leq k_1 \tag{6}$$

при всех a, причем $k_1 = 2(2\pi)^{-1/2}$. Далее величины, которые не зависят от $T_1, T_2, \xi, \eta, \zeta$, будут обозначаться через k_i с различными индексами без дополнительного напоминания об этом соглашении. Величины k_i с одним значением индекса обозначают одну и ту же величину во всех доказательствах.

Положим

$$\Delta = \mathbf{E}\left((\xi_1+\eta_1)I(\xi+\eta \geq \mathbf{0}) - (\xi_1+\eta_1+\zeta_1)I(\xi+\eta+\zeta \geq \mathbf{0})\right).$$

Для величины Δ получаем следующие соотношения:

$$\Delta = \mathbf{E}\left(\prod_{i=2}^{n} I(\xi_i+\eta_i \geq 0)(\xi_1+\eta_1)^+ - \prod_{i=2}^{n} I(\xi_i+\eta_i+\zeta_i \geq 0)(\xi_1+\eta_1+\zeta_1)^+\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(\prod_{i=2}^{n} I(\xi_i+\eta_i \geq 0)(\xi_1+\eta_1)^+ - \prod_{i=2}^{n} I(\xi_i+\eta_i \geq 0)(\xi_1+\eta_1+\zeta_1)^+\right) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \mathbf{E}\left(\left(I(\xi_i+\eta_i \geq 0) - I(\xi_i+\eta_i+\zeta_i \geq 0)\right) \prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k+\eta_k+\zeta_k \geq 0) \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{k=i+1}^{n} I(\xi_k+\eta_k \geq 0)(\xi_1+\eta_1+\zeta_1)^+\right) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i, \qquad (7)$$

где

$$\Delta_1 = \mathbf{E}\left(\prod_{i=2}^{n} I(\xi_i+\eta_i \geq 0)(\xi_1+\eta_1)^+ - \prod_{i=2}^{n} I(\xi_i+\eta_i \geq 0)(\xi_1+\eta_1+\zeta_1)^+\right), \qquad (8)$$

$$\Delta_i = \mathbf{E}\left(\left(I(\xi_i+\eta_i \geq 0) - I(\xi_i+\eta_i+\zeta_i \geq 0)\right) \prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k+\eta_k+\zeta_k \geq 0) \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{k=i+1}^{n} I(\xi_k+\eta_k \geq 0)(\xi_1+\eta_1+\zeta_1)^+\right), i = 2, \ldots, n. \qquad (9)$$

Оценим величину (8). Из первого неравенства в (6) следует, что

$$|\Delta_1| \leq \mathbf{E}\left(2\sigma_1 \exp(-b^2/2)(2\pi)^{-1/2}\right), \qquad (10)$$

где $b = (\xi_1+\eta_1)/\sigma_1, \sigma_1^2$ — дисперсия величины ζ_1. По определению η_1 имеет условное нормальное распределение при условии ξ с параметрами 0 и $(T_2 - f(\xi))\sigma_2^2$, где σ_2 — ограниченная величина. Следовательно

$$|\Delta_1| \leq \mathbf{E}\left(2[\sigma_1^2(\sigma_1^2 + (T_2 - f(\xi))\sigma_2^2)^{-1/2}] \exp(-\xi_1^2/[2(\sigma_1^2 + (T_2 - f(\xi))\sigma_2^2)])(2\pi)^{-1/2}\right). \qquad (11)$$

Поскольку распределение ξ предполагается невырожденным, то ввиду (2) получаем оценки

$$c_-^s|\xi| \leq \sigma_1^2 \leq c_+^s|\xi|, \qquad (12)$$

где c_-^s и c_+^s — некоторые положительные числа, а (11) преобразуется в следующем виде:

$$|\Delta_1| \leq \mathbf{E}\left(2[c_+^s|\xi|(c_-^s|\xi| + (T_2 - c_+|\xi|)\sigma_2^2)^{-1/2}] \times\right.$$

$$\left.\times \exp(-\xi_1^2/[2(c_+^s|\xi| + (T_2 - c_-|\xi|)\sigma_2^2)])(2\pi)^{-1/2}\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\left(c[|\xi|((T_2 - c_+|\xi|)\sigma_2^2)^{-1/2}] \exp(-\xi_1^2/[2(c_+^s|\xi| + T_2\sigma_2^2)])\right), \qquad (13)$$

где c — некоторое число. Рассмотрим два случая: когда выполняется условие $|\xi| > T_2/k_2$ для некоторого фиксированного числа k_2 и когда оно нарушено. Тогда из (13) получаем неравенство

$$|\Delta_1| \leq \mathbf{E}\left(k_3[|\xi|T_2^{-1/2}]\exp(-\xi_1^2/[k_4T_2])I(|\xi| \leq T_2/k_2)\right) + \mathbf{E}\left(|\xi|^{1/2}I(|\xi| > T_2/k_2)\right), \qquad (14)$$

где k_3 и k_4 некоторые числа. Поскольку

$$\mathbf{E}\left(|\xi|^{1/2}I(|\xi| > T_2/k_2)\right) \leq (T_2/k_2)^{-3/2}\mathbf{E}\left(|\xi|^2I(|\xi| > T_2/k_2)\right) \leq (T_2/k_2)^{-3/2}\mathbf{E}(|\xi|^2) \leq k_5T_2^{-3/2}T_1,$$

то второе слагаемое в (14) ограничено ввиду условия Теоремы величину T_2. Для доказательства ограниченности первого слагаемого в (14) воспользуемся невырожденностью матрицы Σ_1, что позволяет рассматривать норму вектора $|a|^2 = (a, \Sigma_1^{-1}a)$, причем она эквивалентна евклидовой норме, которая использовалась до сих пор. Применение новой нормы позволяет представить величину ξ в виде суммы независимых нормально распределенных величин ξ_1 и $\xi^\perp$, причем $|\xi|^2 = |\xi_1|^2 + |\xi^\perp|^2$. Поэтому для первого слагаемого в (14) получаем оценки

$$k_3\left(|\xi|T_2^{-1/2}\right)\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{k_4T_2}\right)I(|\xi| \leq T_2/k_2) \leq$$
$$\leq k_6\frac{|\xi_1|}{\sqrt{T_2}}\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{k_4T_2}\right) + k_6\frac{|\xi^\perp|}{\sqrt{T_2}}\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{k_4T_2}\right) \leq k_7 + k_6\frac{|\xi^\perp|}{\sqrt{T_2}}\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{k_4T_2}\right),$$

поскольку функция $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ ограничена. Ввиду независимости величин ξ_1 и $\xi^\perp$ получаем неравенства

$$\mathbf{E}\left(k_3[|\xi|T_2^{-1/2}]\exp(-\xi_1^2/[k_4T_2])I(|\xi| \leq T_2/k_2)\right) \leq$$
$$\leq k_7 + \mathbf{E}\left(k_6[|\xi^\perp|T_2^{-1/2}]\exp(-\xi_1^2/[k_4T_2])\right) \leq k_7 + k_8T_1^{1/2}T_2^{-1/2}\left(\frac{T_2}{k_4T_2 + T_1}\right)^{1/2} \leq k_9.$$

Таким образом ограниченность слагаемого (8) доказана.

Теперь оценим (9). Пусть

$$\delta_i = \mathbf{E}\left(I(\xi_i + \eta_i \geq 0) - I(\xi_i + \eta_i + \zeta_i \geq 0)|\xi, \eta, \zeta_1, \zeta_{i-1}\right)$$

Поскольку распределение ζ_i при условии, что фиксированы предшествующие координаты вектора ζ, является нормальным с параметрами $\sum\limits_{k=1}^{i-1} c_k^{(i)}\zeta_k$ и σ_i^2, то для параметров условного распределения ζ_i выполняются свойства:величины $c_k^{(i)}$ равномерно ограничены почти наверное при всех значениях ξ, η и не зависят от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}$, а для σ_i выполняются аналогичные (12) неравенства для некоторых положительных чисел $c_+^{(i)}, c_-^{(i)}$, причем σ_i так же не зависит от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}$. Поэтому

$$\delta_i = \Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{(i)}\zeta_k)/\sigma_i\right), \qquad (15)$$

если $\xi_i + \eta_i \geq 0$, и

$$\delta_i = -\Phi\left((\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{(i)}\zeta_k)/\sigma_i\right), \qquad (16)$$

если $\xi_i + \eta_i < 0$. Подставляя (15) и (16) в (9), получаем равенство

$$\Delta_i = \mathbf{E}\left(\left(\Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)}\zeta_k^{+})/\sigma_i^{+}\right) \times \right.\right.$$
$$\times \prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k^{+} \geq 0)(\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1^{+})^{+} I(\xi_i + \eta_i \geq 0) -$$
$$-\Phi\left((\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{-(i)}\zeta_k^{-})/\sigma_i^{-}\right) \prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k^{-} \geq 0)(\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1^{-})^{+} \times$$
$$\left.\times\, I(\xi_i + \eta_i < 0)) \prod_{k=i+1}^{n} I(\xi_k + \eta_k \geq 0)\right), \tag{17}$$

где величины $c_k^{(i)}, \zeta_k, \sigma_i$ с дополнительными индексами $+$ и $-$ являются соответствующими величинами в (15) и (16), дополнительные индексы служат для того, чтобы подчеркнуть их зависимость от величины ξ. Разобъем Δ_i на два слагаемых. В первое включим ту часть, которая учитывает влияние индекса $+$ в множителях $\prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k^{+} \geq 0)$ и $(\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1^{+})^{+}$, а второе — индекса $-$;

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2}, \tag{18}$$

где

$$\Delta_{i1} = \mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)}\zeta_k^{+})/\sigma_i^{+}\right) \prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k^{+} \geq 0) \times \right.$$
$$\left.\times\, (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1^{+})^{+} I(\xi_i + \eta_i \geq 0) \prod_{k=i+1}^{n} I(\xi_k + \eta_k \geq 0)\right), \tag{19}$$

$$\Delta_{i2} = -\mathbf{E}\left(\Phi\left((\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{-(i)}\zeta_k^{-})/\sigma_i^{-}\right) \prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k^{-} \geq 0) \times \right.$$
$$\left.\times\, (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1^{-})^{+} I(\xi_i + \eta_i < 0) \prod_{k=i+1}^{n} I(\xi_k + \eta_k \geq 0)\right). \tag{20}$$

Оценим величину (19). Будем упрощать выражение (19) таким образом, чтобы каждый шаг приводил к изменению его значения не более чем на ограниченную величину:

$$\Delta_{i1} = \mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)}\zeta_k^{+})/\sigma_i^{+}\right) \prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k^{+} \geq 0)(\xi_1 + \eta_1)^{+} \times \right.$$
$$\left.\times\, I(\xi_i + \eta_i \geq 0) \prod_{k=i+1}^{n} I(\xi_k + \eta_k \geq 0)\right) +$$
$$+\mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)}\zeta_i^{+})/\sigma_i^{+}\right) \prod_{k=2}^{i-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k^{+} \geq 0) \times \right.$$
$$\left.\times \left((\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1^{+})^{+} - (\xi_1 + \eta_1)^{+}\right) I(\xi_i + \eta_i \geq 0) \prod_{k=i+1}^{n} I(\xi_k + \eta_k \geq 0)\right).$$

Выражение в квадратных скобках во втором слагаемом на превосходит $|\zeta_1|$, поэтому для этого слагаемого получаем неравенство

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+)/\sigma_i^+\right)\prod_{k=2}^{i-1}I(\xi_k+\eta_k+\zeta_k^+\geq 0)\times\right.$$
$$\left.\times\left((\xi_1+\eta_1+\zeta_1^+)^+-(\xi_1+\eta_1)^+\right)I(\xi_i+\eta_i\geq 0)\prod_{k=i+1}^{n}I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right)\leq$$
$$\leq\mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+)/\sigma_i^+\right)I(\xi_i+\eta_i\geq 0)|\zeta_1|\right). \qquad (21)$$

Распределение ζ_1 при условии, что фиксированы значения $\zeta_2,\ldots,\zeta_{i-1}$, является нормальным с параметрами $\sum_{k=2}^{i-1}c_k^{(1)}\zeta_k$ и σ_1^2 (для параметров распределения выполнены те же свойства, что и для характеристик ζ_i), поэтому получаем представление для правой части в (21)

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\frac{\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+}{\sigma_i^+}\right)I(\xi_i+\eta_i\geq 0)|\zeta_1|\right)=$$
$$=\mathbf{E}\left(I(\xi_i+\eta_i\geq 0)\sigma_1^+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(-\frac{a+\zeta_\alpha^++c_1^{+(i)}\left(u\sigma_1^+-\sum_{k=2}^{i-1}c_k^{+(1)}\zeta_k\right)}{\sigma_i^+}\right)|u|\varphi(u)du\right),$$

где $a=|\xi_i+\eta_i|,\zeta_\alpha=\sum\limits_{k=2}^{i-1}c_k^{(i)}\zeta_k$. Поскольку для σ_1^+ справедливо неравенство $\sigma_1^+\leq k_{10}|\xi|$, то доказательство ограниченности правой части в (21) может быть завершено аналогично доказательству ограниченности величины в правой части (10). Следовательно

$$\Delta_{i1}=\mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+)/\sigma_i^+\right)\prod_{k=2}^{i-1}I(\xi_k+\eta_k+\zeta_k^+\geq 0)(\xi_1+\eta_1)^+\times\right.$$
$$\left.\times I(\xi_i+\eta_i\geq 0)\prod_{k=i+1}^{n}I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right)+k_{11},$$

где k_{11} — ограниченная величина. Покажем, что

$$\Delta_{i1}=\mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+)/\sigma_i^+\right)\times\right.$$
$$\left.\times(\xi_1+\eta_1)^+I(\xi_i+\eta_i\geq 0)\prod_{k=2}^{n}I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right)+k_{11}+k_{12}, \qquad (22)$$

где k_{12} — некоторая ограниченная величина. Это вытекает из следующего утверждения, доказательство которого приведем позднее.

Лемма 1. *Величина*

$$S=\mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+)/\sigma_i^+\right)(\xi_1+\eta_1)^+I(\xi_i+\eta_i\geq 0)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\prod_{k=2}^{i-1}I(\xi_k+\eta_k+\zeta_k^+\geq 0)-\prod_{k=2}^{i-1}I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right)\prod_{k=i+1}^{n}I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right). \qquad (23)$$

является ограниченной.

Из (22) и (18)–(20) получаем представление для Δ_i с точностью до ограниченной величины:

$$\Delta_i = \mathbf{E}\left(\Phi\left(-\frac{\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+}{\sigma_i^+}\right)(\xi_1+\eta_1)^+ I(\xi_i+\eta_i\geq 0)\prod_{k=2}^{n} I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right) -$$
$$-\mathbf{E}\left(\Phi\left(\frac{\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{-(i)}\zeta_k^-}{\sigma_i^-}\right)(\xi_1+\eta_1)^+ I(\xi_i+\eta_i< 0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right) + \mu_1, \quad (24)$$

где μ_1 — некоторая ограниченная величина (равномерно по рассматриваемым параметрам). Поскольку условное распределение величины $\sum\limits_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)}\zeta_k^+$ при условии ξ,η является нормальным с параметрами 0 и σ_i^{*2}, причем для σ_i^{*2} выполняются свойства (12) при соответствующем выборе величин c, то для (24) получаем выражение (25).

Действительно,

$$\varphi\left(-\frac{(a+x)^2}{2c^2}\right)\varphi\left(-\frac{(b+x)^2}{2d^2}\right) =$$
$$= (2\pi cd)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)+2x\left(\frac{a}{c^2}+\frac{b}{d^2}\right)+\frac{a^2d^2+b^2c^2}{c^2d^2}\right)\right) =$$
$$= (2\pi cd)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{c^2}\left(\frac{x^2(c^2+d^2)}{c^2d^2}+\frac{2x(ad^2+bc^2)}{c^2d^2}+\frac{a^2d^2+b^2c^2}{c^2d^2}\right)\right) =$$
$$= (2\pi cd)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{c^2}\left(x^2+2x\frac{ad^2+bc^2}{c^2+d^2}+\left(\frac{ad^2+bc^2}{c^2+d^2}\right)^2 -\right.\right.$$
$$\left.\left. -\left(\frac{ad^2+bc^2}{c^2+d^2}\right)^2+\frac{a^2d^2+b^2c^2}{c^2+d^2}\right)\frac{c^2+d^2}{cd}\right) =$$
$$= (2\pi cd)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{c^2}\left(x+\frac{ad^2+bc^2}{c^2+d^2}\right)^2\frac{c^2+d^2}{c^2d^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{c^2}\frac{-(ad^2+bc^2)+(a^2d^2+b^2c^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)c^2d^2}\right) =$$
$$= (2\pi cd)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{c^2}\left(x^2+\frac{ad^2+bc^2}{c^2+d^2}\right)^2\frac{c^2+d^2}{c^2d^2}\right)$$
$$\exp\left(-\frac{1}{c^2}\frac{-(a^2d^4+2abc^2d^2+b^2c^2)+(a^2d^4+b^2c^2d^2+a^2d^2c^2+b^2c^4)}{(c^2+d^2)c^2d^2}\right) =$$
$$= (2\pi cd)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{c^2}\left(x^2+\frac{ad^2+bc^2}{c^2+d^2}\right)^2\frac{c^2+d^2}{c^2d^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{c^2}\frac{(a-b)^2}{c^2+d^2}\right)$$

и поэтому

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\frac{\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+}{\sigma_i^+}\right)\Big|\xi,\eta\right) =$$
$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{(\xi_i+\eta_i+u)\sigma_i^+}\frac{\varphi(x)\varphi\left(\frac{u}{\sigma_i^*}\right)}{\sigma_i^*}dxdu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{-\frac{(\xi_i+\eta_i)}{\sigma_i^+}}\frac{\varphi(x)\varphi\left(\frac{(u-x)\sigma_i^+}{\sigma_i^*}\right)}{\sigma_i^*\sigma_i^+}dxdu =$$

$$= - \int\limits_{-\infty}^{-\frac{xi_i+\eta_i}{\sigma_i^+}} \exp\left(-\frac{1}{c^2}\left(x-\frac{u}{1+\left(\frac{\sigma_i^*}{\sigma_i^+}\right)^2}\right)^2 \frac{\sigma_i^{+2}+\sigma_i^{*2}}{\sigma_i^{*2}}\right) \frac{\exp\left(-\frac{1}{c^2}\frac{u^2}{1+\left(\frac{\sigma_i^*}{\sigma_i^+}\right)^2}\right)}{\frac{\sigma_i^+}{2\pi\sigma_i^*}} dxdu =$$

$$= - \int\limits_{0}^{-\frac{\xi_i+\eta_i}{\sigma_i^+}} - \exp\left(-\frac{1}{c^2}\frac{u\sigma_i^{+2}}{\sigma_i^2+\sigma_i^{*2}}\right) \frac{\sigma_i^+}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_i^{+2}+\sigma_i^2}} du = \Phi\left(-\frac{\xi_i+\eta_i}{\sqrt{\sigma_i^{+2}+\sigma_i^{*2}}}\right).$$

Значит

$$\Delta_i = \mathbf{E}\left(\Phi\left(-\frac{\xi_i+\eta_i}{\sigma(\xi)}\right)(\xi_1+\eta_1)^+ I(\xi_i+\eta_i\geq 0)\prod_{k=2}^{n} I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right) -$$

$$-\mathbf{E}\left(\Phi\left(\frac{\xi_i+\eta_i}{\sigma(\xi)}\right)(\xi_1+\eta_1)^+ I(\xi_i+\eta_i< 0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k+\eta_k\geq 0)\right) + \mu_1, \qquad (25)$$

где $\sigma(\xi) = \sqrt{\sigma_i^{+2}+\sigma_i^{*2}}$, причем для $\sigma(\xi)$ выполняются свойства (12).

В дальнейшем доказательстве будут использованы вводимые ниже величины $A_1, \ldots, A_{10}$, которые позволят упростить выражение для Δ_i. Эти величины являются ограниченными и этот факт устанавливается в лемме 2. Хотя эти величины зависят от i, однако в их обозначениях эту зависимость мы не указываем, поскольку все оценки для них являются равномерными по i.

Поскольку распределение η зависит от ξ только через нормирующий множитель корреляционной матрицы $T_2 - f(\xi)$, то можно считать, что величина $\eta' = \eta/\sqrt{T_2'}$, где $T_2' = T_2 - f(\xi)$, не зависит от ξ . Поэтому из (25), (12) и введенных обозначений получаем следующее выражение

$$\Delta_i = \mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi\left(-\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+\eta_i'}{\sigma(\xi')}\right)(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i'\geq 0)\prod_{k=2}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)\right) -$$

$$-\mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi\left(\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+\eta_i'}{\sigma(\xi')}\right)(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i'< 0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)\right) + \mu_1, \qquad (26)$$

где $\xi' = \xi/\sqrt{T_2'}$.

Рассмотрим две ситуации: в первом случае предполагаем, что выполняется событие $B_1 = \{T_2' \leq T_2/2\}$, а во втором, что оно нарушено. Поскольку

$$\Delta_i = \mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi(-\sqrt[4]{T_2'}(\xi_i'+\eta_i')/\sigma(\xi'))(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i'\geq 0)\prod_{k=2}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))\right) -$$

$$-\mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi(\sqrt[4]{T_2'}(\xi_i'+\eta_i')/\sigma(\xi'))(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i'< 0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))\right) + A_1, \qquad (27)$$

где

$$A_1 = \mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi(-\sqrt[4]{T_2'}(\xi_i'+\eta_i')/\sigma(\xi'))(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i'\geq 0)\prod_{k=2}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)I(B_1)\right) -$$

$$-\mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi(\sqrt[4]{T_2'}(\xi_i'+\eta_i')/\sigma(\xi'))(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i'< 0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)I(B_1)\right) \qquad (28)$$

является ограниченной величиной. Поэтому можно ограничиться рассмотрением ситуации, когда выполняется неравенство

$$T_2' > T_2/2. \tag{29}$$

Далее снова рассмотрим две ситуации: в первом случае (будем говорить, что в этом случае наступает событие B_2) выполняется неравенство

$$\sigma(\xi')/\sqrt[4]{T_2} \geq \epsilon, \tag{30}$$

где ϵ некоторое положительное число, значение которого будет определено ниже, а во втором случае это неравенство нарушено. Снова, как и в (27), получаем представление

$$\begin{aligned}\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\sqrt{T_2'}\Phi\left(-\sqrt[4]{T_2'}(\xi_i' + \eta_i')/\sigma(\xi')\right)(\xi_1' + \eta_1')^+ I(\xi_i' + \eta_i' \geq 0) \times \\ \times \prod_{k=2}^{n} I(\xi_k' + \eta_k' \geq 0)(1 - I(B_1))(1 - I(B_2))\Bigg) - \\ -\mathbf{E}\Bigg(\sqrt{T_2'}\Phi\left(\sqrt[4]{T_2'}(\xi_i' + \eta_i')/\sigma(\xi')\right)(\xi_1' + \eta_1')^+ I(\xi_i' + \eta_i' < 0) \times \\ \times \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k' + \eta_k' \geq 0)(1 - I(B_1))(1 - I(B_2))\Bigg) + A_2,\end{aligned} \tag{31}$$

где, согласно лемме 2, величина

$$\begin{aligned}A_2 = \mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi\left(-\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+\eta_i'}{\sigma(\xi')}\right)(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i' \geq 0)\prod_{k=2}^{n} I(\xi_k'+\eta_k' \geq 0)(1-I(B_1))I(B_2)\right) - \\ -\mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi\left(\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+\eta_i'}{\sigma(\xi')}\right)(\xi_1' + \eta_1')^+ I(\xi_i' + \eta_i' < 0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k' + \eta_k' \geq 0)(1 - I(B_1))I(B_2)\right)\end{aligned} \tag{32}$$

является ограниченной.

Следовательно, из (26), (28) и (38) получаем

$$\begin{aligned}\Delta_i = \mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi\left(-\frac{\sqrt[4]{T_2'}(\xi_i'+\eta_i')}{\sigma(\xi')}\right)(\xi_1'+\eta'_1)^+ I(\xi_i'+\eta_i' \geq 0)\prod_{k=2}^{n} I(\xi_k'+\eta_k' \geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right) - \\ -\mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi\left(\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+\eta_i'}{\sigma(\xi')}\right)(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i' < 0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k' \geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right) + \mu_2,\end{aligned} \tag{33}$$

где μ_2 — некоторая ограниченная величина, причем следует рассматривать лишь случай, когда выполняются неравенства (29) и

$$\sigma(\xi')/\sqrt[4]{T_2'} < \epsilon. \tag{34}$$

Поскольку из условий леммы величина η' имеет нормальное распределение с матрицей ковариации Σ_2, то величина η_i' имеет при условии $\eta_k', k \neq i$, нормальное распределение со средним

α_i и дисперсией β_i^2, причем случайная величина α_i зависит лишь от η_k', $k \neq i$, и имеет нормальное распределение с ограниченными параметрами, а величина β_i^2 ограничена и положительна. Поэтому из преобразований

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+\eta_i'}{\sigma(\xi')}\right)I(\xi_i'+\eta_i'\geq 0)|\xi,\eta_k,k\neq i\right)=$$
$$=\int_{-\xi_i'}^{+\infty}\Phi\left(-\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+u)}{\sigma(\xi')}\right)\frac{\varphi\left(\frac{u-\alpha_i}{/\beta_i}\right)}{\beta_i}du=$$
$$=\int_0^{+\infty}\Phi(-v)\varphi\left(v\frac{\sigma(\xi')}{\sqrt[4]{T_2'}}-\xi_i'-\alpha_i\beta_i\right)\frac{\sigma(\xi')}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i}dv$$

и, аналогично,

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+\eta_i'}{/\sigma(\xi')}\right)I(\xi_i'+\eta_i'<0)\Big|\xi,\eta_k,k\neq i\right)=$$
$$=\int_{-\infty}^{-\xi_i'}\Phi\left(\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+u}{\sigma(\xi')}\right)\frac{\varphi\left(\frac{u-\alpha_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i}du=$$
$$=\int_0^{+\infty}\Phi(-v)\varphi\left(\frac{v\frac{\sigma(\xi')}{\sqrt[4]{T_2'}}+\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)\frac{\sigma(\xi')}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i}dv$$

получаем для (33) следующее выражение

$$\Delta_i=\mathbf{E}\Bigg(\left(\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}/\beta_i\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^{+\infty}\Phi(-v)\left(\varphi((v\sigma(\xi')/\sqrt[4]{T_2'}-\xi_i'-\alpha_i)/\beta_i)-\varphi((v\sigma(\xi')/\sqrt[4]{T_2'}+\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)\right)dv\times$$
$$\times(\xi_1'+\eta_1')^+\prod_{k=2,k\neq i}^{n}I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg)+\mu_1=$$
$$=\mathbf{E}\Bigg(\left(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)/\beta_i\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^{+\infty}\Phi(-v)\mathrm{sh}(v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2))\exp(-0.5(v\sigma(\xi')/\sqrt[4]{T_2'})^2)dv\times$$
$$\times(\xi_1'+\eta_1')^+I(\xi_i'+\eta_i'\geq 0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n}I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg)+\mu_1=$$
$$=\mathbf{E}\Bigg(\left(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)/\beta_i\right)\int_0^{+\infty}\Phi(-v)\mathrm{sh}(v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2))dv\times$$
$$\times(\xi_1'+\eta_1')^+\prod_{k=2,k\neq i}^{n}I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg)-A_3+\mu_1, \quad (35)$$

где

$$A_3 = \mathbf{E}\Bigg(\left(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)/\beta_i\right) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \Phi(-v)\mathrm{sh}(v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2)) \left(1-\exp(-0.5(v\sigma(\xi')/\sqrt[4]{T_2'})^2)\right) dv \times$$

$$\times(\xi_1'+\eta_1')^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) \qquad (36)$$

является ограниченной величиной согласно лемме 2.

Из (35) получаем равенство

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)\int_0^{+\infty} \Phi(-v)\mathrm{sh}(v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2))dv \times$$

$$\times(\xi_1'+\eta_1')^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) + \mu_3,$$

где μ_3 — ограниченная величина. Поскольку $\mathrm{sh}(a) = a + O(a^3)$ при малых a, то упростим выражение следующим образом:

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\left(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)/\beta_i\right)\int_0^{+\infty} \Phi(-v)\left(v\sigma(\xi')\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}\right) dv \times$$

$$\times(\xi_1'+\eta_1')^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) + A_4 + \mu_3, \qquad (37)$$

где

$$A_4 = \mathbf{E}\Bigg(\left(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)/\beta_i\right) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \Phi(-v)\left(\mathrm{sh}(v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2)) - v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2)\right) dv \times$$

$$\times(\xi_1'+\eta_1')^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) \qquad (38)$$

является ограниченной величиной согласно лемме 2.

Из (77), (79) и (80) следует ограниченность величины A, поэтому из (37) получаем свойство

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\left(\sigma(\xi)^2\left(\left((\xi_i+\alpha_i)/\beta_i\right)\varphi((\xi_i+\alpha_i)/\beta_i)\right)/(2\beta_i^2)\right) \times$$

$$\times(\xi_1+\eta_1)^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k+\eta_k\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) + \mu_3.$$

Поскольку

$$\int_0^{+\infty} v\Phi(-v)dv = \int_{-\infty}^{0} (w^2/2) - exp(-w^2/2)(2\pi)^{-1/2}dw = 1/4,$$

то

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\left(\sigma(\xi')^2 \left(\left((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i\right) \varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)\right)/(2\beta_i^2)\right)(\xi_1'+\eta_1')^+ \times \\ \times \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) + \mu_4, \qquad (39)$$

где μ_4 — ограниченная величина.

Проведем дальнейшие упрощения выражения для Δ_i. Пусть $\xi^0{=}(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},0,\xi_{i+1},\ldots,\xi_n)$, тогда (39) можно представить в виде двух величин:

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\left((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i\right) \varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)\right)/(2\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2)\right) \times \\ \times(\xi_1'+\eta_1')^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B2))\Bigg) + A_5 + \mu_3, \qquad (40)$$

где

$$A_5 = \mathbf{E}\Bigg(\left((\sigma(\xi)^2-\sigma(\xi^0)^2) \left(\left((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i\right) \varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)\right)/(2\sqrt{T_2'}\beta_i^2)\right) \times \\ \times(\xi_1'+\eta_1')^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) \qquad (41)$$

так же ограниченная величина (см. лемму 2). Поэтому из (40) получаем равенство

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\left((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i\right) \varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)\right)/(2T_2'\beta_i^2)\right) \times \\ \times(\xi_1'+\eta_1'\sqrt{T_2'})^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) + \mu_5, \qquad (42)$$

где μ_5 — некоторая ограниченная величина.

Покажем, что величину $\xi_i' = \xi/\sqrt{T_2'}$ можно заменить на $\tilde{\xi}_i = \xi T_2^{-1/2}$ и при этом значение Δ_i изменится на ограниченную величину, т.е.

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\left((\tilde{\xi}_i+\alpha_i)/\beta_i\right) \varphi((\tilde{\xi}_i+\alpha_i)/\beta_i)\right)/(2T_2'\beta_i^2)\right)(\xi_1+\eta_1'\sqrt{T_2'})^+ \times \\ \times \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) + A_6 + \mu_6, \qquad (43)$$

где величина

$$A_6 = \mathbf{E}\left(\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right) - \frac{\tilde{\xi}_i+\alpha_i}{\beta_i}\varphi\left(\frac{\tilde{\xi}_i+\alpha_i}{\beta_i}\right)\right)/(2T_2'\beta_i^2)\right) \times \right. \\ \left. \times\left(\xi_1+\eta_1'\sqrt{T_2'}\right)^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right) \qquad (44)$$

ограничена согласно лемме 2, а μ_6 — ограниченная величина ввиду неравенства

$$T_2'^{-1/2} - T_2^{-1/2} \le k_{13}|\xi| T_2^{-2}.$$

Следовательно, из (44) и (43) получаем, что

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\left((\tilde{\xi}_i + \alpha_i)/\beta_i \right) \varphi((\tilde{\xi}_i + \alpha_i)/\beta_i) \right) / (2T_2'\beta_i^2) \right) (\xi_1 + \eta_1' \sqrt{T_2'})^+ \times \\ \times \prod_{k=2, k\ne i}^{n} I(\xi_k' + \eta_k' \ge 0)(1 - I(B_1))(1 - I(B_2)) \Bigg) + \mu_7, \tag{45}$$

где μ_7 — некоторая ограниченная величина. Дальнейшее упрощение основано на замене T_2' в множителе $1/(2T_2'\beta_i^2)$ на T_2:

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\left((\tilde{\xi}_i + \alpha_i)/\beta_i \right) \varphi((\tilde{\xi}_i + \alpha_i)/\beta_i) \right) / (2T_2\beta_i^2) \right) (\xi_1 + \eta_1' \sqrt{T_2'})^+ \times \\ \times \prod_{k=2, k\ne i}^{n} I(\xi_k' + \eta_k' \ge 0)(1 - I(B_1))(1 - I(B_2)) \Bigg) + \mu_8, \tag{46}$$

где μ_8 — некоторая ограниченная величина, а величина

$$A_7 = \Bigg| \mathbf{E}\left(\left(\sigma(\xi^0)^2 \frac{\tilde{\xi}_i + \alpha_i}{\beta_i} \varphi\left(\frac{\tilde{\xi}_i + \alpha_i}{\beta_i}\right) / (2\beta_i^2) \right) \left(\frac{1}{T_2'} - \frac{1}{T_2} \right) \times \\ \times (\xi_1 + \eta_1' \sqrt{T_2'})^+ \prod_{k=2, k\ne i}^{n} I(\xi_k' + \eta_k' \ge 0)(1 - I(B_1))(1 - I(B_2)) \right) \Bigg| \tag{47}$$

является ограниченной.

Рассмотрим выражения

$$A_8 = \mathbf{E}\left(\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\frac{\tilde{\xi}_i + \alpha_i}{\beta_i} \varphi\left(\frac{\tilde{\xi}_i + \alpha_i}{\beta_i}\right) \right) / (2T_2\beta_i^2) \right) \times \\ \times \left((\xi_1 + \eta_1' \sqrt{T_2'})^+ - (\xi_1 + \eta_1' T_2^{1/2})^+ \right) \prod_{k=2, k\ne i}^{n} I(\xi_k' + \eta_k' \ge 0)(1 - I(B_1))(1 - I(B_2)) \right), \tag{48}$$

$$A_9 = \mathbf{E}\left(\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\frac{\tilde{\xi}_i + \alpha_i}{\beta_i} \varphi\left(\frac{\tilde{\xi}_i + \alpha_i}{\beta_i}\right) \right) / (2T_2\beta_i^2) \right) (\xi_1 + \eta_1' T_2^{1/2})^+ \times \\ \times \left(\prod_{k=2, k\ne i}^{n} I(\xi_k + \eta_k' \sqrt{T_2'} \ge 0) - \prod_{k=2, k\ne i}^{n} I(\xi_k + \eta_k' T_2^{1/2} \ge 0) \right) (1 - I(B_1))(1 - I(B_2)) \right), \tag{49}$$

$$A_{10} = \mathbf{E}\left(\sigma(\xi^0)^2 \left(\left(\frac{\tilde{\xi}_i + \alpha_i}{\beta_i} \right) \varphi\left(\frac{\tilde{\xi}_i + \alpha_i}{\beta_i}\right) \right) / (2T_2\beta_i^2)(\xi_1 + \eta_1' T_2^{1/2})^+ \times \\ \times \prod_{k=2, k\ne i}^{n} I(\xi_k + \eta_k' T_2^{1/2} \ge 0) \left((1 - I(B_1))(1 - I(B_2)) - 1 \right) \right), \tag{50}$$

ограниченность которых устанавливается в лемме 2

Из (48)–(50) и (46) получаем следующее выражение для Δ_i:

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg(\Big(\sigma(\xi^0)^2 \Big(\Big((\tilde{\xi}_i+\alpha_i)/\beta_i\Big)\,\varphi((\tilde{\xi}_i+\alpha_i)/\beta_i)\Big)/(2T_2\beta_i^2)\Big)\,(\xi_1+\eta_1' T_2^{1/2})^+ \times$$

$$\times \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k+\eta_k' T_2^{1/2} \geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg) + \mu_9, \qquad (51)$$

где μ_9 — ограниченная величина.

Поскольку условное распределение $\tilde{\xi}_i$ при условии η' и $\xi_k, k\neq i$, является нормальным с параметрами a_i и $\frac{T_1 b_i^2}{T_2}$, причем b_i — некоторое положительное число, а случайная величина a_i является скалярным произведением вектора ξ без i-ой координаты на некоторый неслучайный вектор с ограниченными координатами (не зависящими от T_i), то (51) принимает следующий вид

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg((2T_2\beta_i^2)^{-1}\sigma(\xi^0)^2(\xi_1+\eta_1' T_2^{1/2})^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k+\eta_k' T_2^{1/2} \geq 0) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi\beta_i b_i)^{-1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}\left(\frac{x+\alpha_i}{\beta_i}\right)\exp\left(-\frac{(x+\alpha_i)^2}{2\beta_i^2}\right)\exp\left(-\frac{(x-\alpha_i)^2 T_2}{2b_i^2 T_1}\right)dx\Bigg) + \mu_9.$$

После преобразований, аналогичных (25), получаем

$$\Delta_i = \mathbf{E}\Bigg((2T_2\beta_i^2)^{-1}\sigma(\xi^0)^2(\xi_1+\eta_1' T_2^{1/2})^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k+\eta_k' T_2^{1/2} \geq 0) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(\alpha_i+a_i)^2 T_2}{2b_i^2 T_1}\right)\frac{(\alpha_i+a_i)T_2^{1/2}}{T_1^{1/2} b_i}\frac{\beta_i T_2}{b_i^2 T_1}\left(1+\frac{\beta_i^2 T_2}{b_i^2 T_1}\right)^{-3/2}(2\pi_i)^{-1/2}\Bigg) +$$

$$+\mathbf{E}\Bigg((2T_2\beta_i^2)^{-1}\sigma(\xi^0)^2(\xi_1+\eta_1' T_2^{1/2})^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k+\eta_k' T_2^{1/2} \geq 0) \times$$

$$\times \int_{0}^{+\infty} (\pi b_i)^{-1}(T_2/T_1)^{1/2} u \exp(-u^2(1+\beta_i^2 T_2/(b_i^2 T_1))/2)\exp\left(-(\alpha_i+a_i)^2 T_2/(2b_i^2 T_1)\right) \times$$

$$\times \left(\mathrm{sh}\left(u(\alpha_i+a_i)\beta_i T_2/(b_i^2 T_1)\right) - \left(u(\alpha_i+a_i)\beta_i T_2/(b_i^2 T_1)\right)\right)du\Bigg) + \mu_9. \quad (52)$$

Для первого слагаемого в (52) получаем оценки

$$\Bigg|\mathbf{E}\Bigg((2T_2\beta_i^2)^{-1}\sigma(\xi^0)^2(\xi_1+\eta_1' T_2^{1/2})^+ \prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k+\eta_k' T_2^{1/2} \geq 0)\ \exp\left(-(\alpha_i+a_i)^2 T_2/(2b_i^2 T_1)\right) \times$$

$$\times \left((\alpha_i+a_i)T_2^{1/2}/(T_1^{1/2} b_i)\right)\ \left(\beta_i T_2/(b_i^2 T_1)\right)\left(1+\frac{\beta_i^2 T_2}{b_i^2 T_1}\right)^{-3/2}(2\pi_i)^{-1/2}\Bigg)\Bigg| \leq$$

$$\leq k_{14}\mathbf{E}\left(|\xi|(\xi_1+\eta_1' T_2^{1/2})^+ T_1^{-1}\left|\exp\left(-\frac{(\alpha_i+a_i)^2 T_2}{2b_i^2 T_1}\right)\left((\alpha_i+a_i)T_2^{1/2}/(T_1^{1/2} b_i)\right)\right|\right) \leq k_{15}. \quad (53)$$

Второе слагаемое в (52) можно оценивать тем же способом, что и второе слагаемое в (37); следует рассмотреть два случая: когда выполняется условие

$$|u(\alpha_i+a_i)\beta_i T_2/(b_i^2 T_1)| \leq 1$$

(в этом случае наступает событие B_4) и когда оно нарушено. В первом случае проводим оценки как в (80):

$$\left|\mathbf{E}\left((2T_2\beta_i^2)^{-1}\sigma(\xi^0)^2(\xi_1+\eta_1'T_2^{1/2})^+\prod_{k=2,k\neq i}^{n}I(\xi_k+\eta_k'T_2^{1/2}\geq 0)\times\right.\right.$$
$$\times\int_0^{+\infty}(\pi b_i)^{-1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}u\exp\left(-\frac{u^2\left(1+\frac{\beta_i^2T_2}{b_i^2T_1}\right)}{2}\right)\exp\left(-(\alpha_i+a_i)^2T_2/(2b_i^2T_1)\right)\times$$
$$\left.\left.\times\left(\operatorname{sh}\left(\frac{u(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2}{b_i^2T_1}\right)-\frac{u(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2}{b_i^2T_1}\right)I(B_4)du\right)\right|\leq$$
$$\leq k_{16}\mathbf{E}\left(T_2^{-1}|\xi|(\xi_1+\eta_1'T_2^{1/2})^+\exp\left(-\frac{(\alpha_i+a_i)^2T_2}{2b_i^2T_1}\right)(T_2/T_1)^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times|(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2/(b_i^2T_1)|^3\int_0^{+\infty}u^4\exp(-u^2/2)du\right)\leq$$
$$\leq k_{17}\mathbf{E}\left(T_2^{-1}|\xi|(\xi_1+\eta_1'T_2^{1/2})^+\exp\left(-\frac{(\alpha_i+a_i)^2T_2}{2b_i^2T_1}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\left|\frac{(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2^{1/2}}{b_iT_1^{1/2}}\right|^3\right)\leq$$
$$\leq k_{18}\mathbf{E}\left(|\xi|(|\xi|+|\eta_1'|T_2^{1/2})T_2/T_1^2\right)\leq k_{19}T_2/T_1\leq k_{20}. \qquad (54)$$

Во втором случае получаем следующие неравенства:

$$\left|\mathbf{E}\left((2T_2\beta_i^2)^{-1}\sigma(\xi^0)^2(\xi_1+\eta_1'T_2^{1/2})^+\prod_{k=2,k\neq i}^{n}I(\xi_k+\eta_k'T_2^{1/2}\geq 0)\times\right.\right.$$
$$\times\int_0^{+\infty}(\pi b_i)^{-1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}u\exp\left(-\left(1+\frac{\beta_i^2T_2}{b_i^2T_1}\right)u^2/2\right)\exp\left(-\frac{(\alpha_i+a_i)^2T_2}{2b_i^2T_1}\right)\times$$
$$\left.\left.\times\left(\operatorname{sh}\left(\frac{u(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2}{b_i^2T_1}\right)-\frac{u(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2}{b_i^2T_1}\right)(1-I(B_4))du\right)\right|\leq$$
$$\leq k_{21}\left|\mathbf{E}\left(T_2^{-1}|\xi|\left(|\xi|+|\eta_1'|T_2^{1/2}\right)\exp\left(-\frac{(\alpha_i+a_i)^2T_2}{2b_i^2T_1}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\int_{\frac{b_i^2T_1}{\beta_iT_2|\alpha_i+a_i|}}^{+\infty}u\exp\left(-\frac{u^2\left(1+\frac{\beta_i^2T_2}{b_i^2T_1}\right)}{2}\right)\exp\left(\frac{u(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2}{b_i^2T_1}\right)du\right)\right|\leq$$
$$\leq k_{21}\mathbf{E}\left(T_2^{-1}|\xi|(|\xi|+|\eta_1'|T_2^{1/2})\exp\left(-\frac{(\alpha_i+a_i)^2T_2}{2b_i^2T_1}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{\frac{b_i^2T_1}{\beta_iT_2|\alpha_i+a_i|}}^{+\infty}u\exp\left(-\frac{u^2}{2}+\frac{u(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2}{b_i^2T_1}\right)du\right)=$$
$$=k_{21}\mathbf{E}\left(T_2^{-1}|\xi|(|\xi|+|\eta_1'|T_2^{1/2})\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{(\alpha_i+a_i)^2T_2}{2b_i^2T_1}\right)\exp\left(\frac{(\alpha_i+a_i)^2\beta_i^2T_2^2}{2b_i^4T_1^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\int_{\frac{b_i^2T_1}{\beta_iT_2|\alpha_i+a_i|}}^{+\infty}u\exp\left(-\frac{u^2}{2}+\frac{u(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2}{b_i^2T_1}-\frac{\left(\frac{(\alpha_i+a_i)\beta_iT_2}{b_i^2T_1}\right)^2}{2}\right)du\right)=$$

$$= k_{21}\mathbf{E}\Bigg(T_2^{-1}|\xi|(|\xi| + |\eta_1'|T_2^{1/2})\ (T_2/T_1)^{1/2}\exp\left(-\left(1 - \frac{\beta_i^2T_2}{b_i^2T_1}\right)\frac{(\alpha_i + a_i)^2T_2}{2b_i^2T_1}\right) \times$$

$$\times \int_{\frac{b_i^2T_1}{\beta_iT_2|\alpha_i+a_i|}}^{+\infty} u\exp\left(-\frac{\left(u - (\alpha_i + a_i)\beta_iT_2b_i^2T_1\right)^2}{2}\right)du\Bigg) \le$$

$$\le k_{22}\mathbf{E}\Bigg(|\xi|(|\xi| + |\eta_1'|T_2^{1/2})(T_2T_1)^{-1/2}\exp\left(-(\alpha_i + a_i)^2T_2/(4b_i^2T_1)\right) \times$$

$$\times \int_{(b_i^2T_1)/(\beta_iT_2|\alpha_i+a_i|)}^{+\infty} u\exp\left(-(u - (\alpha_i + a_i)\beta_iT_2/(b_i^2T_1))^2/2\right)du\Bigg). \tag{55}$$

Введем обозначение $\gamma = (\alpha_i + a_i)\beta_iT_2/(b_i^2T_1)$, тогда

$$\exp\left(-\frac{(\alpha_i + a_i)^2T_2}{4b_i^2T_1}\right)\int_{\frac{b_i^2T_1}{\beta_iT_2|\alpha_i+a_i|}}^{+\infty} u\exp\left(-(u - (\alpha_i + a_i)\beta_iT_2/(b_i^2T_1))^2/2\right)du =$$

$$= \exp\left(-\frac{\gamma^2b_i^2T_1}{4T_2\beta_i^2}\right)\int_{1/|\gamma|}^{+\infty} u\exp\left(-(u-\gamma)^2/2\right)du =$$

$$= \exp\left(-\frac{\gamma^2b_i^2T_1}{4T_2\beta_i^2}\right)\int_{1/|\gamma|}^{+\infty} u\exp\left(-(u-\gamma)^2/2\right)duI(|\gamma| \ge 1) +$$

$$+ \exp\left(-\frac{\gamma^2b_i^2T_1}{4T_2\beta_i^2}\right)\int_{1/|\gamma|}^{+\infty} u\exp\left(-(u-\gamma)^2/2\right)duI(|\gamma| < 1) \le$$

$$\le \exp\left(-\frac{\gamma^2b_i^2T_1}{4T_2\beta_i^2}\right)\int_{0}^{+\infty} u\exp\left(-(u-\gamma)^2/2\right)duI(|\gamma| \ge 1) +$$

$$+ \exp\left(-\frac{\gamma^2b_i^2T_1}{4T_2\beta_i^2}\right)\int_{1/|\gamma|-\gamma}^{+\infty} (u+\gamma)\exp\left(-u^2/2\right)duI(|\gamma| < 1) \le$$

$$\le k_{23}\exp\left(-\frac{\gamma^2b_i^2T_1}{4T_2\beta_i^2}\right)|\gamma| + \exp\left(-\frac{\gamma^2b^2T_1}{4T_2\beta_i^2}\right)\exp\left(-\frac{(\frac{1}{|\gamma|} - \gamma)^2}{2}\right)I(|\gamma| < 1) \le$$

$$\le k_{24}\exp\left(-\gamma^2b_i^2T_1/(4T_2\beta_i^2)\right)|\gamma| \le k_{25}(T_2/T_1)^{1/2}, \tag{56}$$

поскольку функция $\exp\left(-(1/|t| - t)^2/2\right)/t, t \in R$, является ограниченной. Подставляя оценку (56) в (55), получаем

$$\Bigg|\mathbf{E}\Big((2T_2\beta_i^2)^{-1}\sigma(\xi^0)^2(\xi_1 + \eta_1'T_2^{1/2})^+\prod_{k=2,k\ne i}^{n} I(\xi_k + \eta_k'T_2^{1/2} \ge 0) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty}(\pi b_i)^{-1}(T_2/T_1)^{1/2}u\exp(-u^2(1 + \beta_i^2T_2/(b_i^2T_1))/2)\exp\left(-(\alpha_i + a_i)^2T_2/(2b_i^2T_1)\right) \times$$

$$\times \left(\mathrm{sh}\left(u(\alpha_i + a_i)\beta_iT_2/(b_i^2T_1)\right) - \left(u(\alpha_i + a_i)\beta_iT_2/(b_i^2T_1)\right)\right)(1 - I(B_4))du\Big)\Bigg| \le$$

$$\le k_{22}\mathbf{E}\left(|\xi|(|\xi| + |\eta_1'|T_2^{1/2})(T_2T_1)^{-1/2}k_{25}(T_2/T_1)^{1/2}\right) \le k_{26}\mathbf{E}\left(|\xi|(|\xi| + |\eta_1'|T_2^{1/2})T_1^{-1}\right) \le k_{27}. \tag{57}$$

Поэтому из (52)–(57) следует ограниченность величины Δ_i.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Доказательство леммы 1. Представим величину в квадратных скобках в (23) в виде суммы соответствующих слагаемых как и в разложении (7):

$$S = \sum_{j=2}^{i-1} \delta_{ij},$$

где

$$\delta_{ij} = \mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)} \zeta_k^+)/\sigma_i^+\right)\left[I(\xi_j + \eta_j + \zeta_j^+ \geq 0) - I(\xi_j + \eta_j \geq 0)\right] \times \right.$$
$$\left. \times\, (\xi_1 + \eta_1)^+ \prod_{k=2}^{j-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k^+ \geq 0) \prod_{k=j+1}^{n} I(\xi_k + \eta_k \geq 0)\right).$$

Если величины δ_{ij} ограничены, то ограничена и величина S. Для величин

$$\mathbf{E}\left(I(\xi_j + \eta_j \geq 0) - I(\xi_j + \eta_j + \zeta_j \geq 0) | \xi, \eta, \zeta_1, \zeta_{j-1}\right)$$

имеем представления (15) и (16), поэтому

$$\delta_{ij} = \mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)} \zeta_k^+)/\sigma_i^+\right) \times \right.$$
$$\times \left[\Phi\left(-\frac{\xi_j + \eta_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_k^{+(j)} \zeta_k^+}{\sigma_j^+}\right) I(\xi_j + \eta_j \geq 0) - \Phi\left(\frac{\xi_j + \eta_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_k^{-(j)} \zeta_k^-}{\sigma_j^-}\right) I(\xi_j + \eta_j < 0)\right] \times$$
$$\left. \times (\xi_1 + \eta_1)^+ \prod_{k=2}^{j-1} I(\xi_k + \eta_k + \zeta_k \geq 0) \prod_{k=j+1}^{n} I(\xi_k + \eta_k \geq 0)\right),$$

поэтому δ_{ij} не превосходит сумму величин δ_{ij}^+ и δ_{ij}^-, где

$$\delta_{ij}^+ = \mathbf{E}\Big(\Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)} \zeta_k^+)/\sigma_i^+\right) \Phi\left(-(\xi_j + \eta_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_k^{+(j)} \zeta_k^+)/\sigma_j^+\right) \times$$
$$\times I(\xi_i + \eta_i \geq 0) I(\xi_j + \eta_j \geq 0)(\xi_1 + \eta_1)^+\Big), \tag{58}$$

$$\delta_{ij}^- = \mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i + \eta_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)} \zeta_k^+)/\sigma_i^+\right) \Phi\left((\xi_j + \eta_j + \sum_{k=1}^{j-1} c_k^{-(j)} \zeta_k^-)/\sigma_j^-\right) \times \right.$$
$$\left. \times I(\xi_i + \eta_i \geq 0) I(\xi_j + \eta_j < 0)(\xi_1 + \eta_1)^+\right). \tag{59}$$

Поскольку условное (при условии ξ, η) совместное распределение случайных величин

$$\sum_{k=1}^{i-1} c_k^{+(i)} \zeta_k^+ / \sigma_i^+, \qquad \sum_{k=1}^{j-1} c_k^{+(j)} \zeta_k^+) / \sigma_j^+$$

является нормальным с ограниченными почти наверное коэффициентами, то

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+)/\sigma_i^+\right)\Phi\left(-(\xi_j+\eta_j+\sum_{k=1}^{j-1}c_k^{+(j)}\zeta_k^+)/\sigma_j^+\right)\middle|\,\xi,\eta\right)=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-a}\int_{-\infty}^{-b}(2\pi)^{-2}\exp(-\frac{(x+y)^2}{2})\exp(-\frac{(z+u)^2}{2})\times$$
$$\times\det{}^{-1/2}\exp(-\frac{x_1^2p+u_2^2p+2cyu}{2})dxdzdydu, \qquad (60)$$

где $a=(\xi_i+\eta_i)/\sigma_i^+, b=(\xi_j+\eta_j)/\sigma_j^+, p_1,p_2,c$ — параметры условного нормального распределения, $\det=p_1p_2-c^2$. После преобразований получаем выражение

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-a}\int_{-\infty}^{-b}(2\pi)^{-2}\exp(-\frac{(x+y)^2}{2})\exp(-\frac{(z+u)^2}{2})\frac{1}{\sqrt{\det}}\exp(-\frac{y^2p_1+u^2p_2+2cyu}{2})dxdzdydu=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-a-y}\int_{-\infty}^{-b-u}(2\pi)^{-2}\det^{-1/2}\exp(-\frac{x^2+2xy+y^2+z^2+2zu+u^2+y^2p_1+u^2p_2+2cyu}{2})dxdzdydu=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\det[(1+p_2)(1+p_1)-c^2]}}\int_{-\infty}^{-a}\int_{-\infty}^{-b}\exp\left(-\frac{x^2[p_1(1+p_2)-c^2]+2xzc+z^2[p_2(1+p_1)-c^2]}{2[(1+p_2)(1+p_1)-c^2]}\right)dxdz.$$

Поскольку a и b неотрицательны, то при $c\geq 0$ получаем неравенство

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+)/\sigma_i^+\right)\Phi\left(-(\xi_j+\eta_j+\sum_{k=1}^{j-1}c_k^{+(j)}\zeta_k^+)/\sigma_j^+\right)\middle|\,\xi,\eta\right)\leq$$
$$\leq k_{28}\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i)/\sigma_i\right)\Phi\left(-(\xi_j+\eta_j)/\sigma_j\right), \qquad (61)$$

где k_{28} — ограничена равномерно по ξ,η, а σ_i,σ_j — некоторые положительные числа, которые не зависят от ξ и η. При $c<0$ можно использовать одно из неравенств

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\frac{\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+}{\sigma_i^+}\right)\Phi\left(-\frac{\xi_j+\eta_j+\sum_{k=1}^{j-1}c_k^{+(j)}\zeta_k^+}{\sigma_j^+}\right)\middle|\,\xi,\eta\right)\leq\Phi\left(-b\sqrt{\frac{\det}{p_1}+\det}\right) \qquad (62)$$

или

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\frac{\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+}{\sigma_i^+}\right)\Phi\left(-\frac{\xi_j+\eta_j+\sum_{k=1}^{j-1}c_k^{+(j)}\zeta_k^+}{\sigma_j^+}\right)\middle|\,\xi,\eta\right)\leq\Phi(-a[\det/p_2+\det]^{1/2}). \qquad (63)$$

Поскольку величина $\det>k_{29}$, где k_{29} — положительное число, не зависящее от ξ и η, а величины p_1 и p_2 равномерно ограничены, то для некоторого положительного числа k_{30} выполняются неравенства

$$[\det/p_2+\det]^{1/2}\geq k_{30}, [\det/p_1+\det]^{1/2}\geq k_{30}$$

и из (62) и (63) получаем неравенство

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\frac{\xi_i+\eta_i+\sum_{k=1}^{i-1}c_k^{+(i)}\zeta_k^+}{\sigma_i^+}\right)\Phi\left(-\frac{\xi_j+\eta_j+\sum_{k=1}^{j-1}c_k^{+(j)}\zeta_k^+}{\sigma_j^+}\right)\middle|\,\xi,\eta\right)\leq\Phi(-\max(a,b)k_{31}). \qquad (64)$$

Для доказательства ограниченности величины δ_{ij}^+ из (58), (61), (64) и того факта, что величина c, которая использовалась в предыдущих рассуждениях, измерима относительно ξ, получаем неравенство

$$\delta_{ij}^+\leq\mathbf{E}\left(k_{28}\Phi\left(-(\xi_i+\eta_i)/\sigma_i\right)\Phi\left(-(\xi_j+\eta_j)/\sigma_j\right)I(\xi_i+\eta_i\geq 0)I(\xi_j+\eta_j\geq 0)(\xi_1+\eta_1)^+\right)+$$
$$+\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\max((\xi_i+\eta_i)/\sigma_i^+,(\xi_j+\eta_j)/\sigma_j^+)k_{30}\right)I(\xi_i+\eta_i\geq 0)I(\xi_j+\eta_j\geq 0)(\xi_1+\eta_1)^+\right).$$

Поскольку матрица ковариации случайной величины η зависит от ξ только через нормирующий множитель $T_2' = T_2 - f(\xi)$, то произведя нормировку величин с этим множителем получаем следующее неравенство

$$\delta_{ij}^+ \le \mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}k_{28}\Phi\left(-\frac{(\xi_i'+\eta_i')\sqrt{T_2'}}{\sigma_i}\right)\Phi\left(-\frac{(\xi_j'+\eta_j')\sqrt{T_2'}}{\sigma_j}\right)I(\xi_i'+\eta_i'\ge 0)I(\xi_j'+\eta_j'\ge 0)(\xi_1'+\eta_1')^+\right)+$$

$$+\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\max\left(\frac{(\xi_i'+\eta_i')\sqrt{T_2'}}{\sigma_i^+},\frac{(\xi_j'+\eta_j')\sqrt{T_2'}}{\sigma_j}\right)k_{30}\right)I(\xi_i'+\eta_i'\ge 0)I(\xi_j'+\eta_j'\ge 0)(\xi_1'+\eta_1')^+\right), \quad (65)$$

в котором величины ξ и η со штрихами обозначают соответствующие величины после их деления на $\sqrt{T_2'}$. Отметим, что η' имеет нормальное распределение с матрицей Σ_2 и не зависит от ξ. Поскольку максимум из двух чисел не превосходит сумму их модулей, то достаточно показать ограниченность второго слагаемого в (65), так как это обеспечит ограниченность и первого слагаемого. Проводя преобразования, аналогичные преобразованиям величины (60), получаем выражение, аналогичное (61) или (64).

Рассмотрим выражение

$$\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\max\left(\frac{(\xi_i'+\eta_i')\sqrt{T_2'}}{\sigma_i^+},\frac{(\xi_j'+\eta_j')\sqrt{T_2'}}{\sigma_j}\right)k_{30}\right)I(\xi_i'+\eta_i'\ge 0)I(\xi_j'+\eta_j'\ge 0)(\xi_1'+\eta_1')^+\right).$$

Поскольку

$$(\xi_1'+\eta_1')^+ \le |\xi_1'| + |\eta_1'|,$$

то достаточно оценить величины

$$A_{11} = \sqrt{T_2}\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\max\left(\frac{(\xi_i'+\eta_i')\sqrt{T_2'}}{\sigma_i^+},\frac{(\xi_j'+\eta_j')\sqrt{T_2'}}{\sigma_j}\right)k_{30}\right)I(\xi_i'+\eta_i'\ge 0)I(\xi_j'+\eta_j'\ge 0)(\xi_1')^+\right),$$

$$A_{12} = \sqrt{T_2}\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\max\left(\frac{(\xi_i'+\eta_i')\sqrt{T_2'}}{\sigma_i^+},\frac{(\xi_j'+\eta_j')\sqrt{T_2'}}{\sigma_j}\right)k_{30}\right)I(\xi_i'+\eta_i'\ge 0)I(\xi_j'+\eta_j'\ge 0)|\eta_1'|\right).$$

Наибольшей из рассматриваемых величин является величина A_{11}, поскольку в конечном счете ее оценивание сведется к оцениванию величины

$$A = \sqrt{T_1}\mathbf{E}\left(\Phi\left(-\max((\xi_i'+\eta_i')\sqrt{T_2'}/\sigma_i^+,(\xi_j'+\eta_j')\sqrt{T_2'}/\sigma_j)k_{30}\right)I(\xi_i'+\eta_i'\ge 0)I(\xi_j'+\eta_j'\ge 0)\right),$$

а величина A_{12}, используя грубые оценки, оценивается величиной порядка A. Здесь можно использовать те же неравенства, что и при оценке величин A_1 или A_2 в лемме 2, если рассмотреть случай, когда наступает событие $|\eta| \ge \sqrt{T_1}$, вероятность которого экспоненциально мала.

Следовательно, достаточно доказать ограниченность величины A_{11}. Поскольку величины η_i' и η_j' не зависят от ξ и имеют нормальное распределение, то

$$A_{11} = \sqrt{T_2}(2\pi)^{-1}\det{}^{-1/2}\left(\mathbf{E}\int_{-\xi_j}^{+\infty}\int_{-\xi_i'}^{+\infty}\Phi(-(\xi_i'+x)k_{30}\sqrt{T_2'}/\sigma_i)\times\right.$$

$$\times\exp(-(x^2p_1+y^2p_2+2cxy)/2)I((\xi_i'+x)\sigma_j > (\xi_j'+y)\sigma_i)dydx(\xi_1')^+ +$$

$$+\mathbf{E}\int_{-\xi_j'}^{+\infty}\int_{-\xi_i}^{+\infty}\Phi(-(\xi_j'+y)k_{30}\sqrt{T_2'}/\sigma_j)\exp(-(x^2p_1+y^2p_2+2cxy)/2)\times$$

$$\left.\times I((\xi_i'+x)\sigma_j\le(\xi_j'+y)\sigma_i)dydx(\xi_1')^+\right).$$

Достаточно оценить первое слагаемое, поскольку второе оценивается аналогично. Пусть $\alpha = = \frac{\xi_j'\sigma_i-\xi_i'\sigma_j}{\sigma_j}+\frac{y\sigma_i}{\sigma_j}$, $\beta=\frac{\xi_i'\sigma_j-\xi_j'\sigma_i}{\sigma_i}+x\frac{\sigma_j}{\sigma_i}$, тогда

$$\int_{-\xi_j}^{+\infty}\int_{-\xi_i'}^{+\infty}\Phi\left(-\frac{(\xi_i'+x)k_{30}\sqrt{T_2'}}{\sigma_i}\right)\exp\left(-\frac{x^2p_1+y^2p_2+2cxy}{2}\right)I((\xi_i'+x)\sigma_j>(\xi_j'+y)\sigma_i)dydx=$$

$$=\int_{-\xi_j}^{+\infty}\int_{\alpha}^{+\infty}\Phi\left(-\frac{(\xi_i'+x)k_{30}\sqrt{T_2'}}{\sigma_i}\right)\exp\left(-\frac{x^2p_1+y^2p_2+2cxy}{2}\right)dydx\le$$

$$\le\int_{-\xi_j}^{+\infty}\int_{\alpha}^{+\infty}\exp(-(\xi_i'+x)^2k_{32}T_2'/(2\sigma_i^2))\exp(-(x^2p_1+y^2p_2+2cxy)/2)dydx=$$

$$=\int_{-\xi_j}^{+\infty}\int_{\alpha}^{+\infty}\exp(-\left[(\xi_i'+x)^2k_{32}T_2'/\sigma_i^2+x^2p_1+y^2p_2+2cxy\right]/2)dydx=$$

$$=\int_{-\xi_i}^{+\infty}\int_{-\xi_j'}^{\beta}\exp(-\left[y^2p_2+2cxy\right]/2)dy\exp(-\left[(\xi_i'+x)^2k_{32}T_2'/\sigma_i^2+x^2p_1\right]/2)dx. \quad (66)$$

Далее нам придется анализировать различные ситуации при оценивании величины (66).

Пусть выполняются условия

$$\xi_i'\ge0,\xi_j'\ge0,\xi_i'\sigma_j-\xi_j'\sigma_i\le0, \quad (67)$$

тогда в зависимости от значения c приходится по разному оценивать внутренний интеграл в (66).

Сначала рассмотрим случай, когда

$$c<0,\xi_i'c+\xi_j'p_2<0, \quad (68)$$

тогда для внутреннего интеграла и (66) получаем оценки

$$\int_{-\xi_j'}^{\beta}\exp(-[y^2p_2+2cxy]/2)dy\le k_{33}[(\xi_i'\sigma_j-\xi_j'\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i+\xi_j']\times$$

$$\times\exp(-[(\xi_i'\sigma_j-\xi_j'\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i+\xi_j']^2/2)\exp(-[{\xi_j'}^2p_2-2cx\xi_j']/2)=$$

$$=k_{33}[(\xi_i'+x)\sigma_j/\sigma_i]\exp(-[(\xi_i'+x)\sigma_j/\sigma_i]^2/2)\exp(-[{\xi_j'}^2p_2-2cx\xi_j']/2)$$

при $-\xi_i'\le x\le\xi_j'p_2/c$ и

$$\int_{-\xi_j'}^{\beta}\exp[-(y^2p_2+2cxy)/2]dy\le k_{33}[(\xi_i'+x)\sigma_j/\sigma_i]\exp(-[(\xi_i'+x)\sigma_j/\sigma_i]^2/2)$$

при $\xi_j'p_2/c\le x$, где k_{33} — некоторое положительное число. Поэтому

$$\int_{-\xi_i}^{+\infty}\int_{-\xi_j'}^{\beta}\exp(-[y^2p_2+2cxy]/2)dy\exp(-\left[(\xi_i'+x)^2k_{32}T_2'/\sigma_i^2+x^2p_1\right]/2)dx\le$$

$$\le \int_{-\xi_i}^{\xi'_j p_2/c} k_{33}[(\xi'_i+x)\sigma_j/\sigma_i]\exp(-[(\xi'_i+x)\sigma_j/\sigma_i]^2/2)\times$$

$$\times\exp(-[{\xi'_j}^2 p_2 - 2cx\xi'_j]/2)\exp(-\left[(\xi'_i+x)^2 k_{32}T'_2/\sigma_i^2 + x^2 p_1\right]/2)dx+$$

$$+\int_{\xi'_j p_2/c}^{+\infty} k_{33}\frac{(\xi'_i+x)\sigma_j}{\sigma_i}\exp\left(-\left(\frac{(\xi'_i+x)\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2/2\right)\exp\left(-\left[(\xi'_i+x)^2k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+x^2p_1\right]/2\right)dx=$$

$$=\int_0^{\xi'_i+\xi'_jp_2/c} k_{33}\frac{u\sigma_j}{\sigma_i}\exp\left[-\left(\left(\frac{u\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2+{\xi'_j}^2p_2-2c(u-\xi'_i)\xi'_j+u^2k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+(u-\xi'_i)^2p_1\right)/2\right]du+$$
$$+\int_{\xi'_i+\xi'_jp_2/c}^{+\infty} k_{33}[u\sigma_j/\sigma_i]\exp\left[-\left([u\sigma_j/\sigma_i]^2+uk_{32}T'_2/\sigma_i^2(u-\xi'_i)^2p_1\right)/2\right]du\le$$

$$\le k_{34}\Biggl(\int_0^{\xi'_i+\xi'_jp_2/c} u\exp\left[-\left(u^2\left(\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1\right)-2u(c\xi'_j+\xi'_ip_1)+{\xi'_j}^2p_2+2c\xi'_i\xi'_j+{\xi'_i}^2p_1\right)/2\right]du+$$
$$+\int_{\xi'_i+\xi'_jp_2/c}^{+\infty} u\exp\left[-\left(u^2[(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1]-2u\xi'_ip_1+{\xi'_i}^2p_1\right)/2\right]du\Biggr)=$$

$$=k_{34}\Biggl(\int_0^{\xi'_i+\xi'_jp_2/c}u\exp\Bigl(-\Bigl(\bigl(u-[c\xi'_j+\xi'_ip_1]/[(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1]\bigr)^2\times$$
$$\times\left(\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1\right)-\frac{(c\xi'_j+\xi'_ip_1)^2}{(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1}+{\xi'_j}^2p_2+2c\xi'_i\xi'_j+{\xi'_i}^2p_1\Bigr)/2\Bigr)du+$$
$$+\int_{\xi'_i+\xi'_jp_2/c}^{+\infty}u\exp\Bigl(-\bigl((u-\xi'_ip_1/[(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1])^2\times$$
$$\times\left((\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1\right)-(\xi'_ip_1)^2/[(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1]+{\xi'_i}^2p_1\bigr)/2\Bigr)du\Biggr)\le$$

$$\le k_{35}\sigma_i^2{T'_2}^{-1}\Bigl(\exp[-B_1(\xi'_i,\xi'_j)/2](1+k_{36}|c\xi'_j+\xi'_ip_1|\sigma_i/{T'_2}^{1/2})+$$
$$+\exp\left[-({\xi'_i}^2[(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2])/(2[(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1])\right]+$$
$$+(\exp\left[-(\xi'_i+\xi'_jp_2/c-\xi'_ip_1/[(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1])^2/2\right]+k_{36}|\xi'_i|p_1\sigma_i/{T'_2}^{1/2})\Bigr)=$$
$$=k_{35}\frac{\sigma_i^2}{T'_2}\left(\exp\left(-\frac{B_1(\xi'_i,\xi'_j)}{2}\right)\left(1+k_{36}\frac{|c\xi'_j+\xi'_ip_1|\sigma_i}{\sqrt{T'_2}}\right)+\exp\left(-\frac{B_2(\xi'_i,\xi'_j)}{2}\right)+k_{36}\exp(-{\xi'_i}^2k_{37})\frac{|\xi'_i|p_1\sigma_i}{\sqrt{T'_2}}\right),\quad(69)$$

где

$$B_1(\xi'_i,\xi'_j)={\xi'}_j^2p_2+2c\xi'_i\xi'_j+{\xi'}_i^2p_1-\left(c\xi'_j+\xi'_ip_1\right)^2/[(\sigma_j/\sigma_i)^2+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1],$$

$$B_2(\xi'_i,\xi'_j)={\xi'}_i^2k_{37}+(\xi'_jp_2/c-\xi'_i[\sigma_j^2+k_{32}T'_2]/[\sigma_j^2+k_{32}T'_2+p_1\sigma_i^2])^2,$$

k_{37} — некоторое положительное число (в предположении, что выполняется неравенство $T'_2/\sigma_i^2 > A > 0$). Отметим, что $B_1(\xi'_i,\xi'_j)$ и $B_2(\xi'_i,\xi'_j)$ являются почти наверное строго положительно определенными квадратичными формами как функции ξ'_i,ξ'_j (поскольку коэффициенты этих форм являются случайными величинами, то строгая положительная определенность понимается следующим образом: можно указать такие два положительные числа, что собственные значения квадратичных форм будут не менее этих чисел почти наверное).

Из (66) и оценок (69) получаем оценки для первого слагаемого в A_{11}:

$$\mathbf{E}\left(\int_{-\xi_j}^{+\infty}\int_{-\xi'_i}^{+\infty}\Phi\left(-(\xi'_i+x)k_{30}\frac{\sqrt{T'_2}}{\sigma_i}\right)\exp(-\frac{x^2p_1+y^2p_2+2cxy}{2})I((\xi'_i+x)\sigma_j>(\xi'_j+y)\sigma_i)dydx(\xi_1)^+\right)\le$$
$$\le \mathbf{E}\left(k_{35}\frac{\sigma_i^2}{T'_2}\left(\exp\left(-\frac{B_1(\xi'_i,\xi'_j)}{2}\right)\left(1+k_{36}|c\xi'_j+\xi'_ip_1|\frac{\sigma_i}{\sqrt{T'_2}}\right)+\exp\left(-\frac{B_2(\xi'_i,\xi'_j)}{2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+k_{36}\exp(-{\xi'}_i^2p_1k_{37})\frac{|\xi'_i|p_1\sigma_i}{\sqrt{T'_2}}\right)(\xi_1)^+\right)\le$$
$$\le k_{38}\mathbf{E}\left(\frac{|\xi|^2}{T_2}\left(\exp\left(-\frac{B_1(\xi'_i,\xi'_j)}{4}\right)\left(1+k_{39}\sqrt{\frac{|\xi|}{T_2}}\right)+\exp\left(-\frac{B_2(\xi'_i,\xi'_j)}{2}\right)+k_{39}\exp(-{\xi'}_i^2p_1\frac{k_{37}}{2})\sqrt{\frac{|\xi|}{T_2}}\right)\right).$$

Отметим, что для любой положительно определенной квадратичной формы справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\left(\exp(-B(\xi'_i,\xi'_j))\right)\le k_{40}T_2/T_1,$$

причем величина k_{40} зависит лишь от собственных значений квадратичной формы. Поэтому из условий леммы получаем ограниченность математических ожиданий всех слагаемых для первого слагаемого A_{11}.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$c\ge -\xi'_jp_2/\xi'_i, \tag{70}$$

тогда для внутреннего интеграла получаем оценки

$$\int_{-\xi'_j}^{\beta}\exp(-\left[y^2p_2+2cxy\right]/2)dy\le$$
$$\le k_{41}[(\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i+\xi'_j]\exp(-[(\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i+\xi'_j]^2/2)\times$$
$$\times\exp(-\left[((\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i)^2p_2+2cx((\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i)\right]/2)=$$
$$=k_{41}[(\xi'_i+x)\sigma_j/\sigma_i]\exp(-[(\xi'_i+x)\sigma_j/\sigma_i]^2/2)\times$$
$$\times\exp(-\left[((\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i)^2p_2+2cx((\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i)\right]/2)$$

при

$$-\xi'_i\le x\le(\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/(p_2\sigma_j+c\sigma_i)$$

и

$$\int_{-\xi'_j}^{\beta}\exp(-\left[y^2p_2+2cxy\right]/2)dy\le k_{41}[(\xi'_i+x)\sigma_j/\sigma_i]\exp(-[(\xi'_i+x)\sigma_j/\sigma_i]^2/2)$$

при

$$x>(\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/(p_2\sigma_j+c\sigma_i),$$

где k_{41} - некоторое положительное число. Поэтому

$$\int_{-\xi'_i}^{+\infty}\int_{-\xi'_j}^{\frac{\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i}{\sigma_i}+\frac{x\sigma_j}{\sigma_i}}\exp(-\left[y^2p_2+2cxy\right]/2)dy\exp(-\left[(\xi'_i+x)^2k_{32}T'_2/\sigma_i^2+x^2p_1\right]/2)dx\leq$$

$$\leq\int_{-\xi'_i}^{(\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/(p_2\sigma_j+c\sigma_i)}k_{41}[(\xi'_i+x)\sigma_j/\sigma_i]\exp(-[(\xi'_i+x)\sigma_j/\sigma_i]^2/2)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\left(\frac{\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i}{\sigma_i}+\frac{x\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2p_2+2cx\left(\frac{\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i}{\sigma_i}+\frac{x\sigma_j}{\sigma_i}\right)}{2}\right)\exp\left(-\frac{(\xi'_i+x)^2k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+x^2p_1}{2}\right)dx+$$

$$+\int_{\frac{\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i}{p_2\sigma_j+c\sigma_i}}^{+\infty}k_{41}\left((\xi'_i+x)\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)\exp\left(-\left((\xi'_i+x)\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2/2\right)\exp\left(-\left((\xi'_i+x)^2k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+x^2p_1\right)/2\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\xi'_i(\sigma_j+p_2\sigma_j+c\sigma_i)-\xi'_j\sigma_i}{p_2\sigma_j+c\sigma_i}}k_{41}\exp\left(-\frac{\left(u\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2+\left(-\xi'_j+u\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2p_2+2c(u-\xi'_i)\left(-\xi'_j+u\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)+u^2k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+(u-\xi'_i)^2p_1}{2}\right)u\frac{\sigma_j}{\sigma_i}du+$$

$$+\int_{\frac{\xi'_i(\sigma_j+p_2\sigma_j+c\sigma_i)-\xi'_j\sigma_i}{p_2\sigma_j+c\sigma_i}}^{+\infty}k_{41}\left(u\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)\exp\left(-\left(\left(u\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2+uk_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+(u-\xi'_i)^2p_1\right)/2\right)du\leq$$

$$\leq k_{42}\left(\int_0^{\frac{\xi'_i(\sigma_j+p_2\sigma_j+c\sigma_i)-\xi'_j\sigma_i}{p_2\sigma_j+c\sigma_i}}u\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(u-\frac{\xi'_i(c\sigma_j+p_1\sigma_i)+\xi'_j(p_2\sigma_j+c\sigma_i)}{k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i}+\frac{\sigma_j^2}{\sigma_i}(1+p_2)+2c\sigma_j+p_1\sigma_i}\right)^2\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2(1+p_2)+2c\frac{\sigma_j}{\sigma_i}+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1\right)-\frac{\left(\xi'_i(c\sigma_j+p_1\sigma_i)+\xi'_j(p_2\sigma_j+c\sigma_i)\right)^2}{\sigma_i^2\left((\frac{\sigma_j}{\sigma_i})^2(1+p_2)+2c\frac{\sigma_j}{\sigma_i}+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1\right)}+{\xi'}_j^2p_2+2c\xi'_i\xi'_j+{\xi'}_i^2p_1\right)\right)du+\right.$$

$$+\int_{\frac{\xi'_i(\sigma_j+p_2\sigma_j+c\sigma_i)-\xi'_j\sigma_i}{(p_2\sigma_j+c\sigma_i}}^{+\infty}u\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(u-\frac{\xi'_ip_1}{(\frac{\sigma_j}{\sigma_i})^2+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1}\right)^2\left((\frac{\sigma_j}{\sigma_i})^2+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{(\xi'_ip_1)^2}{\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1}+{\xi'}_i^2p_1\right)\right)du\right)\leq$$

$$\leq k_{43}\frac{\sigma_i^2}{{T'}_2}\left(\exp\left(-\frac{B_3(\xi'_i,\xi'_j)}{2}\right)\left(1+k_{44}|\xi'_i(c\sigma_j+p_1\sigma_i)+\xi'_j(p_2\sigma_j+c\sigma_i)|\frac{\sigma_i}{\sqrt{{T'}_2}}\right)+\right.$$

$$+\exp\left(-\frac{{\xi'}_i^2\left((\frac{\sigma_j}{\sigma_i})^2+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}\right)}{2\left((\frac{\sigma_j}{\sigma_i})^2+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1\right)}\right)\times$$

$$\left.\times\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi'_i(\sigma_j+p_2\sigma_j+c\sigma_i)-\xi'_j\sigma_i}{p_2\sigma_j+c\sigma_i}-\frac{\xi'_ip_1}{\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right)^2+k_{32}\frac{T'_2}{\sigma_i^2}+p_1}\right)^2\right)+k_{44}|\xi'_i|p_1\frac{\sigma_i}{\sqrt{{T'}_2}}\right)\right)=$$

$$=k_{43}\sigma_i^2{T'}_2^{-1}\left(\exp\left(-\frac{B_3(\xi'_i,\xi'_j)}{2}\right)(1+k_{44}|\xi'_i(c\sigma_j+p_1\sigma_i)+\xi'_j(p_2\sigma_j+c\sigma_i)|\frac{\sigma_i}{\sqrt{{T'}_2}})+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{B_4(\xi'_i,\xi'_j)}{2}\right)+k_{44}\exp(-{\xi'}_i^2k_{45})|\xi'_i|p_1\frac{\sigma_i}{\sqrt{{T'}_2}})\right),\qquad(71)$$

где

$$B_3(\xi'_i,\xi'_j)={\xi'}_j^2p_2+2c\xi'_i\xi'_j+{\xi'}_i^2p_1-\frac{(\xi'_i(c\sigma_j+p_1\sigma_i)+\xi'_j(p_2\sigma_j+c\sigma_i))^2}{\sigma_i^2[(\sigma_j/\sigma_i)^2(1+p_2)+2c\sigma_j/\sigma_i+k_{32}T'_2/\sigma_i^2+p_1]}$$

и

$$B_4(\xi'_i,\xi'_j)={\xi'}_i^2k_{45}+\left(\frac{\xi'_jp_2}{c}-\xi'_i\frac{\sigma_j^2+k_{32}T'_2}{\sigma_j^2+k_{32}T'_2+p_1\sigma_i^2}\right)^2$$

являются почти наверное строго положительно определенными квадратичными формами как функции ξ'_i,ξ'_j.

Из (66) и оценок (71) получаем ограниченность первого слагаемого в A_{11} аналогично тому, как это было получено в предыдущем случае.

Если нарушено хотя бы одно из условий в (67), то начало координат не попадает в область интегрирования по переменным x и y при вычислении интеграла (66), поэтому функцию $\exp(-(x^2p_1+y^2p_2+2cxy)/2)$ можно заменить на ее наибольшее значение в области интегрирования $\exp(-B_5(\xi'_i,\xi'_j))$, где $B_5(\xi'_i,\xi'_j)$ — некоторая положительно определенная форма относительно переменных ξ'_i и ξ'_j. Поэтому

$$\int_{-\xi'_i}^{+\infty}\int_{-\xi'_j}^{(\xi'_i\sigma_j-\xi'_j\sigma_i)/\sigma_i+x\sigma_j/\sigma_i}\exp(-\left[x^2p_1+y^2p_2+2cxy\right]/2)dy\exp(-\left[(\xi'_i+x)^2k_{32}T'_2/\sigma_i^2\right]/2)dx\le$$
$$\exp(-B_5(\xi'_i,\xi'_j))\int_{-\xi'_i}^{+\infty}\frac{(\xi'_i+x)\sigma_j}{\sigma_i}\exp\left(-\frac{(\xi'_i+x)^2k_{32}T'_2}{2\sigma_i^2}\right)dx\le k_{46}\sigma_i^2{T'}_2^{-1}\exp(-B_5(\xi'_i,\xi'_j)).$$

Следовательно, завершение доказательства можно провести по той же схеме, что и в предыдущих случаях.

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 2 величины $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,A_{10}$, введенные при ее доказательстве, являются ограниченными.*

Доказательство. Из (28) для A_1 получаем неравенства

$$\Bigg|\mathbf{E}\left(\sqrt{T'_2}\Phi(-\sqrt[4]{T'_2}(\xi'_i+\eta'_i)/\sigma(\xi'))(\xi'_1+\eta'_1)^+I(\xi'_i+\eta'_i\ge0)\prod_{k=2}^{n}I(\xi'_k+\eta'_k\ge0)I(B_1)\right)-$$
$$-\mathbf{E}\left(\sqrt{T'_2}\Phi(\sqrt[4]{T'_2}(\xi'_i+\eta'_i)/\sigma(\xi'))(\xi'_1+\eta'_1)^+I(\xi'_i+\eta'_i<0)\prod_{k=2,k\ne i}^{n}I(\xi'_k+\eta'_k\ge0)I(B_1)\right)\Bigg|\le$$
$$\le2\mathbf{E}\left(\sqrt{T'_2}(\xi'_1+\eta'_1)^+I(B_1)\right)\le2\left(\mathbf{E}\left(\sqrt{T'_2}(\xi'_1+\eta'_1)^+\right)^2\mathbf{E}\left\{I(B_1)\right\}^2\right)^{1/2}\le k_{47}\sqrt{T_1\frac{T_1^2}{T_2^4}}=k_{47}.\quad(72)$$

Из (26) как и при доказательстве неравенства (72), получаем, что при любом положительном ε выполняется неравенство

$$|A_2|\le\Bigg|\mathbf{E}\left(\sqrt{T'_2}\Phi\left(-\sqrt[4]{T'_2}\frac{\xi'_i+\eta'_i}{\sigma(\xi')}\right)(\xi'_1+\eta'_1)^+I(\xi'_i+\eta'_i\ge0)\prod_{k=2}^{n}I(\xi'_k+\eta'_k\ge0)(1-I(B_1))I(B_2)\right)-$$

$$-\mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}\Phi\left(\sqrt[4]{T_2'}\frac{\xi_i'+\eta_i'}{\sigma(\xi')}\right)(\xi_1'+\eta_1')^+ I(\xi_i'+\eta_i'<0)\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))I(B_2)\right)\Bigg| \leq$$

$$\leq 2\mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))-I(B_2)\right)\leq$$

$$\leq 2\left(\mathbf{E}\left(\sqrt{T_2'}(\xi_1'+\eta_1')^+\right)^2\mathbf{E}\left((1-I(B_1))I(B_2)\right)^2\right)^{1/2}\leq k_{49}(\varepsilon)[T_1(T_1^2/T_2^4)]^{1/2}=k_{49}(\varepsilon). \quad (73)$$

Покажем, что величина A_3 , задаваемая формулой (36), является ограниченной величиной. Действительно, из неравенства $1-\exp(-x^2/2)\leq x^2/2$ и (36) получаем

$$|A_3| = \Bigg|\mathbf{E}\left(\left(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)/\beta_i\right)(\xi_1'+\eta_1')^+\prod_{k=2,k\neq i}^{n} I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{+\infty}\Phi(-v)\mathrm{sh}\left(v\sigma(\xi')\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}\right)\left(1-\exp\left(-0.5\left(v\frac{\sigma(\xi')}{\sqrt[4]{T_2'}}\right)^2\right)\right)dv\right)\Bigg|\leq$$

$$\leq\Bigg|\mathbf{E}\Bigg(\left(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)/\beta_i\right)(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}\Phi(-v)\mathrm{sh}\left(v\sigma(\xi')\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}\right)0.5\left(\frac{v\sigma(\xi')}{\sqrt[4]{T_2'}}\right)^2)dv\Bigg)\Bigg|\leq$$

$$\leq\left|\mathbf{E}\left(\frac{\sigma(\xi')^3}{\sqrt[4]{T_2'}}\frac{\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i}\int_0^{+\infty}v^2\Phi(-v)\mathrm{sh}\left(v\sigma(\xi')\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}\right)dv\,(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\right|\leq$$

$$\leq\left|\mathbf{E}\left(\frac{\sigma(\xi)^3}{T_2'}\frac{\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i}\int_0^{+\infty}v^2\Phi(-v)\mathrm{sh}\left(v\sigma(\xi')\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}\right)dv\,(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\right|.$$

Т.к. для $\sigma(\xi)$ выполнены неравенства (12) при некоторых значениях c, а так же неравенства (29)и (34), то найдется такое положительное число k_{50}, что

$$A_3\leq\left|\mathbf{E}\left(k_{50}\frac{|\xi|^{3/2}}{T_2}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)\int_0^{+\infty}v^2\Phi(-v)\mathrm{sh}\left(v\frac{\varepsilon(\xi_i'+\alpha_i)}{\beta_i^2}\right)dv(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\right|.$$

Отметим, что справедливо неравенство

$$\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)\int_0^{+\infty}v^2\Phi(-v)|\mathrm{sh}\left(v\frac{\varepsilon(\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i^2}\right)|dv\leq k_{52}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{2\beta_i}\right) \quad (74)$$

при $\varepsilon<k_{51}$, где k_{51} и k_{52} — некоторые числа.

Поэтому

$$A_3\leq\mathbf{E}\left(\left(k_{53}|\xi|^{5/2}/T_2^{3/2}\right)\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)+\mathbf{E}\left(k_{54}|\xi|^{3/2}/T_2\right). \quad (75)$$

Второе слагаемое в правой части этого неравенства ограничено ввиду условия теоремы на величину T_2, поэтому достаточно оценить первое слагаемое. Поскольку вектор ξ имеет нормальное распределение, то вектор $\tilde{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\ldots,\xi_n)$ так же имеет нормальное распределение с параметрами $\mathbf{c}\xi_i$ и $\tilde{\Sigma}_1$, где $\mathbf{c}$ — некоторый вектор, который не зависит от ξ_i и T_1, а матрица $\tilde{\Sigma}_1$ обладает теми же свойствами, что и Σ_1. Значит

$$\mathbf{E}\left(\left(k_{53}|\xi|^{5/2}/T_2^{3/2}\right)\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\leq$$
$$\leq\mathbf{E}\left(\left(k_{53}(|\tilde{\xi}|^{1/2}+|\xi_i|^{1/2})(|\tilde{\xi}|^2+\xi_i^2)/T_2^{3/2}\right)\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)=$$
$$=\mathbf{E}\left(\left(k_{53}|\tilde{\xi}|^{5/2}/T_2^{3/2}\right)\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)+$$
$$+\mathbf{E}\left(\left(k_{53}(|\tilde{\xi}|^{1/2}\xi_i^2)/T_2^{3/2}\right)\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)+$$
$$+\mathbf{E}\left(\left(k_{53}|\xi_i|^{1/2}|\tilde{\xi}|^2/T_2^{3/2}\right)\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)+$$
$$+\mathbf{E}\left(\left(k_{53}|\xi_i|^{5/2}/T_2^{3/2}\right)\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)=$$
$$=\mathbf{E}\left(k_{53}\left(|\tilde{\xi}|^{5/2}+|\tilde{\xi}|^{1/2}\xi_i^2+|\xi_i|^{1/2}|\tilde{\xi}|^2+|\xi_i|^{5/2}\right)\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))T_2^{-3/2}\right)\leq$$
$$\leq k_{55}T_2^{-3/2}\mathbf{E}\Bigg(\Big(T_1^{5/4}+(|\mathbf{c}||\xi_i|)^{1/2}T_1+2T_1^{3/4}|\mathbf{c}||\xi_i|+2T_1^{1/2}(|\mathbf{c}||\xi_i|)^{3/2}+T_1^{1/4}(|\mathbf{c}||\xi_i|)^2+(|\mathbf{c}||\xi_i|)^{5/2}+$$
$$+|\xi_i|^{1/2}(T_1+|\mathbf{c}|^2|\xi_i|^2)+(T_1^{1/4}+|\mathbf{c}|^{1/2}|\xi_i|^{1/2})\xi_i^2+|\xi_i|^{5/2}\Big)\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{2\beta_i}\right)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg)\leq$$
$$\leq k_{55}T_2^{-3/2}\mathbf{E}\Bigg(\Big(T_1^{5/4}+k_{56}|\xi_i|^{1/2}T_1+k_{57}T_1^{3/4}|\xi_i|+k_{58}T_1^{1/2}|\xi_i|^{3/2}+k_{59}T_1^{1/4}|\xi_i|^2+k_{60}|\xi_i|^{5/2}\Big)\times$$
$$\times\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\Bigg)\leq$$
$$\leq k_{55}\mathbf{E}\left(\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{2\beta_i}\right)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\frac{T_1^{5/4}}{T_2^{3/2}}+k_{61}\leq k_{62}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2}\frac{T_1^{5/4}}{T_2^{3/2}}+k_{61}\leq k_{62}+k_{61}.\quad(76)$$

Теперь покажем, что величина A_4 ограничена. Из (38)

$$|A_4|=\mathbf{E}\Bigg(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\frac{\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i}(\xi_1'+\eta_1')^+\prod_{k=2,k\neq i}^{n}I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\times$$
$$\times\int_0^{+\infty}\Phi(-v)\left(\mathrm{sh}(v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2))-v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2)\right)dv\Bigg),$$

тогда

$$|A_4|\leq\mathbf{E}\Bigg(2\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\frac{\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i}(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\times$$
$$\times\int_0^{+\infty}\Phi(-v)|\mathrm{sh}(v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2))-v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2)|dv\Bigg).\quad(77)$$

Нам снова придется рассмотреть два случая: когда выполняется неравенство

$$|v\sigma(\xi')(\xi_i'+\alpha_i)/(\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2)|\leq 1,\quad(78)$$

и когда оно нарушено. В первом случае считаем, что наступило событие B_3. Следовательно достаточно показать, что ограничены следующие две величины:

$$A_{41}=\mathbf{E}\left(k_{63}\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\frac{\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i}\int_0^{+\infty}\Phi(-v)\left|v\sigma(\xi')\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}\right|^3 dv\,(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))I(B_3)\right),$$

$$A_{42}=\mathbf{E}\left(4\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\frac{\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i}\int_0^{+\infty}\Phi(-v)\exp\left|v\sigma(\xi')\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}\right|dv\,(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_3))(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(4\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\frac{\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{\beta_i}\int_{\frac{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}{\sigma(\xi')|\xi_i'+\alpha_i|}}^{+\infty}\Phi(-v)\exp\left|v\sigma(\xi')\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}\right|dv(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\le$$

$$\le\mathbf{E}\left(k_{64}\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}{\sigma(\xi')|\xi_i'+\alpha_i|}\right)^2\right)\exp\left(\frac{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}{\sigma(\xi')|\xi_i'+\alpha_i|}\right)^{-2}(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right).$$

Для A_{42} используем оценку (74), из которой при $\varepsilon\le 1/2$ получаем неравенство

$$|A_{42}|\le\mathbf{E}\left(k_{64}\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{2\beta_i}\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt[4]{T_2'}\beta_i^2}{\sigma(\xi')|\xi_i'+\alpha_i|}\right)^2\right)(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right).$$

Из неравенства $a^2+(b/a)^2\ge 2b$ и (29) получаем неравенство

$$|A_{42}|\le\mathbf{E}\left(k_{65}\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}\exp(-k_{66}\sqrt[4]{T_2}/\sigma(\xi'))(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right),$$

поэтому

$$|A_{42}|\le\mathbf{E}\left(k_{67}\left(\sigma(\xi')/\sqrt[4]{T_2}\right)^n\sigma(\xi')\sqrt[4]{T_2'}(\xi_1'+\eta_1')^+\right),$$

при любом положительном n, причем k_{44} зависит только от n. Используя для $\sigma(\xi')$ оценки типа (12), получаем неравенство

$$|A_{42}|\le\mathbf{E}\left(k_{68}|\xi|^{1+(n+1)/2}/T_2^{(n+1)/2}\right)\le k_{69}T_1^{((n+3)/4)-(3(n+1)/8)},$$

поэтому при $n=3$ получаем, что величина A_{42} ограничена

$$|A_{42}|\le k_{70}. \qquad (79)$$

Для A_{41} получаем следующие оценки:

$$|A_{41}|\le\mathbf{E}\left(k_{71}\left(\sigma(\xi')^4/\sqrt{T_2'}\right)\left((|\xi_i'+\alpha_i|/\beta_i)^3\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/\beta_i)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int_0^{+\infty}\Phi(-v)|v|^3dv\right)(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))I(B_3)\right)\le$$
$$\le\mathbf{E}\left(k_{72}|\xi|^3/T_2^2\right)\le k_{73}T_1^{3/2}/T_2^2\le k_{73}. \qquad (80)$$

Оценим A_5. Поскольку функция $\sigma(\mathbf{x})^2$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной, не зависящей от случайных величин и α, то из (41) получаем следующие свойства

$$\left|\mathbf{E}\left((\sigma(\xi)^2-\sigma(\xi^0)^2)\frac{\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{2\sqrt{T_2'}\beta_i^2}(\xi_1'+\eta_1')^+\prod_{k=2,k\neq i}^{n}I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\right|\leq$$
$$\leq k_{74}\mathbf{E}\left(\left(\frac{|\xi_i'|}{\beta_i}\left(\frac{|\xi_i'+\alpha_i|}{\beta_i}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)\right)/(2\beta_i)\right)(\xi_1'+\eta_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\leq$$
$$\leq k_{75}\mathbf{E}\left((\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))\left((\xi_1')^++(\eta_1')^+\right)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\leq$$
$$\leq k_{75}\mathbf{E}\left((\varphi((\xi_i'+\alpha_i)/(2\beta_i))(\xi_1')^+(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)+k_{75}\mathbf{E}(\eta_1')^+, \quad (81)$$

поскольку функция $\frac{|x|}{\beta_i}\frac{|x+y|}{\beta_i}\varphi\left(\frac{x+y}{2\beta_i}\right)$ является ограниченной. Поскольку

$$\mathbf{E}(\eta_1')^+\leq k_{76}, \quad (82)$$

а

$$\mathbf{E}\left(\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{2\beta_i}\right)(\xi_1')^+\right)=\mathbf{E}\left(\varphi\left(\frac{\xi_i'}{2\beta_i'}\right)(\xi_1')^+\right),$$

где β_i' — ограниченная величина ввиду свойств условного распределения вектора α_i при условии ξ, то из условия леммы 2 на распределение ξ следует ограниченность последнего математического ожидания. Из этого факта и (41), (82) следует ограниченность A_5 .

Докажем ограниченность величины A_6 . Из обозначений, введенных при доказательстве леммы 2 имеем

$$\tilde{\xi}_i-\xi_i'=-\frac{\xi_i f(\xi)}{\sqrt{T_2'T_2}(\sqrt{T_2'}+\sqrt{T_2})},$$

поэтому из (44)

$$|A_6|=\left|\mathbf{E}\left(\sigma(\xi^0)^2\frac{\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\varphi\left(\frac{\xi_i'+\alpha_i}{\beta_i}\right)-\frac{\tilde{\xi}_i+\alpha_i}{\beta_i}\varphi\left(\frac{\tilde{\xi}_i+\alpha_i}{\beta_i}\right)}{2T_2'\beta_i^2}\left(\xi_1+\eta_1'\sqrt{T_2'}\right)^+\prod_{k=2,k\neq i}^{n}I(\xi_k'+\eta_k'\geq 0)(1-I(B_1))(1-I(B_2))\right)\right|\leq$$
$$\leq k_{77}\mathbf{E}\left(|\xi|^2\frac{|\xi|+|\eta|}{T_2^2}\left|\tilde{\xi}_iH'\left(\left(\alpha_i+\tilde{\xi}_i\left(1-\frac{\theta f(\xi)}{\sqrt{T_2'}\left(\sqrt{T_2'}+\sqrt{T_2}\right)}\right)\right)\Big/\beta_i\right)\right|(1-I(B_1))\right), \quad (83)$$

где θ — некоторая величина в интервале $]0,1[$. Далее, как и при исследовании ситуации типа (30), рассмотрим два случая: когда выполняется неравенство

$$1-\frac{\theta f(\xi)}{\sqrt{T_2'}\left(\sqrt{T_2'}+\sqrt{T_2}\right)}\leq 1/2$$

(в этом случае наступает событие B_3) и когда оно нарушено, т.е. величина A_6 имеет вид

$$|A_6|\leq k_{77}\mathbf{E}\left(\left(\left|\tilde{\xi}_iH'\left(\left(\alpha_i+\tilde{\xi}_i\left(1-\frac{\theta f(\xi)}{\sqrt{T_2'}\left(\sqrt{T_2'}+\sqrt{T_2}\right)}\right)\right)\Big/\beta_i\right)\right||\xi|^2\frac{|\xi|+|\eta|}{T_2^2}\right)(1-I(B_1))I(B_3)\right)+$$
$$+k_{77}\mathbf{E}\left(\left(\left|\tilde{\xi}_iH'\left(\left(\alpha_i+\tilde{\xi}_i\left(1-\frac{\theta f(\xi)}{\sqrt{T_2'}\left(\sqrt{T_2'}+\sqrt{T_2}\right)}\right)\right)\Big/\beta_i\right)\right||\xi|^2\frac{|\xi|+|\eta|}{T_2^2}\right)(1-I(B_1))(1-I(B_3))\right).$$

Доказательство ограниченности первого слагаемого проводится по той же схеме, что и доказательство неравенств (73), а ограниченность второго следует из ограниченности функции $xH'\left(\frac{y+\frac{x}{2}}{\beta_i}\right)$ и того факта, что $\mathbf{E}\left(|\xi|^2\frac{|\xi|+|\eta|}{T_2^2}\right)$ — ограниченная величина.

Для A_8 из (48) получаем

$$|A_8| \le k_{78}\mathbf{E}\left(|\xi|\frac{\left|\frac{\tilde{\xi}_i+\alpha_i}{\beta_i}\varphi\left(\frac{\tilde{\xi}_i+\alpha_i}{\beta_i}\right)\right|}{T_2}|\eta_1'|\left|\sqrt{T_2'}-\sqrt{T_2}\right|(1-I(B_1))\right) \le$$

$$\le k_{79}\mathbf{E}\left(|\xi|^2|\eta_1'|T_2^{-3/2}\right) = k_{80}T_1T_2^{-3/2},$$

а последняя величина есть $O(1)$ при $\alpha \to 0$.

Ограниченность величин A_9, A_{10} устанавливается так же, как и доказательство соотношений (72) и (73).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из утверждения теоремы следует, что добавление условно нормально распределенной случайной величины ζ со средним $\mathbf{0}$ и ковариационной матрицей порядка T_1 приводит к изменению среднего значения кусочно-линейного функционала от суммы случайных величин лишь на ограниченную величину при $T_1 \to \infty$.

Приведенное доказательство основного результата работы показывает, что значение величины K зависит от большого числа факторов, поэтому реальное ее значение может изменяться существенным образом в зависимости от условий проведения наблюдений. Это обстоятельство является одним из факторов, влияющих на свойства асимптотически оптимальных при их практическом использовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chernoff H. Sequential design of experiments. *Ann. Math. Statist.,* 1959, vol. 30, no. 3, pp. 755–770.
2. Albert A. E. Sequential design of experiments for infinitely many states of nature. *Ann. Math. Statist.,* 1959, vol. 30, no. 3, pp. 774–799.
3. Kiefer J., Sacks J. Asymptotically optimal sequential inference and design. *Ann. Math. Statist.,* 1963, vol.34, no. 3, pp. 705–750.
4. Bechhorer R. E., Kiefer J., Sobel M. *Sequential Identification and Ranking Procedures.* Chicago: Univ. Chicago Press, 1968.
5. Chernoff H. *Sequential analyses and optimal design.* Philadelphia: SIAM, 1972.
6. Цитович И. И. О последовательном планировании экспериментов для различения гипотез. *Теория вероятн. и ее примен.,* 1984, т. 29, №4, стр. 778–781.
7. Цитович И. И. Последовательное планирование экспериментов и проверка сложных гипотез. В: *Модели и методы информационных систем,* М.:Наука, 1990, стр. 36–48.
8. Цитович И. И. *Последовательное планирование экспериментов и проверка гипотез.* Дисс. на соиск. уч. ст. док. физ.-мат. наук, М: Институт проблемы передачи информации РАН, 1993.
9. Малютов М.Б., Цитович И.И. Последовательный поиск существенных переменных неизвестной функции. *Проблемы передачи информации,* 1997, т. 31, № 4, стр. 88–107.
10. Malyutov M.B., Tsitovich I.I. Second Order asymptotically optimal sequential model choice. In: *Inernational Conference <Distributed computer communication networks. Theory and Applications>,* Tel-Aviv, 1999, pp. 94–98.

11. Малютов М.Б., Цитович И.И. Асимптотически последовательная проверка гипотез. *Проблемы передачи информации,* 2000, т. 36, №4, стр. 98–112.

12. Malyutov M.B., Tsitovich I.I. Second Order Optimal Tests. In: *Proceedings of International Workshop Optimal Design,* Cardiff. UK, 2000, pp. 67–78.

13. Tsitovich I. Suboptimal Nonparametric Hypotheses Discriminating from Small Dependent Observations. *Pliska. Studia mathematica Bulgaria,* 2009. vol. 19, pp. 283–292.

14. Цитович Ф.И. Свойства субоптимальных последовательных правил проверки непараметрических гипотез о распределениях с экспоненциально убывающими хвостами. *Информационные процессы,* 2010, т. 10, № 2. стр. 181–196.

15. Malyutov M.B., Tsitovich I.I. Second Order Optimal Sequential Model Choice and Change-point Detection. *Information Processes,* 2010, vol. 10, № 3, pp. 275–291.

16. Tsitovich F., Tsitovich I. Sub-Optimal Nonparametric Hypotheses Discriminating with Guaranteed Decision. *International Journal Information Models and Analyses,* 2013, vol. 2, no. 1, pp. 62–69.

17. Tsitovich F., Tsitovich I. Sample space reducing for statistical decision effectiveness increasing. In: *6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, 2015, pp. 501–506.

18. Tsitovich I. On Robust Sequential Parameters Estimating. *Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications*, Berlin: Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science, 2017, vol. 10684, pp. 509–522.

19. Keener R. Second order efficiency in the sequential design of experiments. *Ann. Statist.,* 1984, vol.12, no. 2, pp. 510–532.

20. Lalley S. P. A fierst-passage problem for a two-dimensional controlled random walk. *J. Appl. Probab.,* 1986, vol. 23, no. 3, pp. 670–678.

21. Lalley S. P., Lorden G. A Control problem arising in the sequential design of experiments. *Ann. Prob.,* 1986, vol. 14. no. 1, pp. 136–172.

To the problem of the sequential hypothesis testing

I. I. Tsitovich

In the paper, we consider the score value of some functional of conditionally normally distributed random variables, which is linked to the problem of the sequential hypothesis testing. It is ascertained that the evaluation was limited in growth, which is responsible for setting the average length of observations.

KEYWORDS: sequential hypothesis testing, piecewise-linear function, normal distribution, multi-dimensional random variable.