

Быстрый алгоритм регуляризации полной вариации для класса радиально-симметричных функций

В.И. Кобер*, А.Ю. Маковецкий**, С.М. Воронин**, В.Н. Карнаухов*

* Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия

** Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Поступила в редколлегию 21.1.2019

Аннотация—В работе рассматривается регуляризация полной вариации для двумерных радиально-симметричных кусочно-постоянных функций. Получена система уравнений, решающая прямую задачу регуляризации полной вариации с использованием субградиентов. На основе полученной системы уравнений сформулирован алгоритм вычисления экстремальной функции и дана геометрическая интерпретация экстремальной функции с использованием модифицированного подхода к построению "натянутой струны". Предложенный алгоритм регуляризации полной вариации используется в двумерном случае для реализации адаптивного алгоритма регуляризации полной вариации с переменным параметром регуляризации. Алгоритмическая сложность предложенного алгоритма одномерной регуляризации полной вариации равна сложности известного алгоритма Кондата. С помощью компьютерного моделирования проиллюстрирована эффективность разработанного алгоритма регуляризации полной вариации.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: восстановление сигналов, полная вариация, фильтрация шума.

ВВЕДЕНИЕ

Один из наиболее известных методов фильтрации шума для сигналов и изображений основан на регуляризации полной вариации (TV регуляризация) [1]. TV регуляризация является известной некорректной обратной задачей в теории восстановления изображений и сигналов [2–4]. Алгоритмы TV регуляризации хорошо подходят для обработки изображений, потому что они инвариантны к параллельному переносу и повороту, сохраняют контуры объектов. В статье [5] Шамболле и Покк описывают современные методы TV регуляризации. Обозначим через $J(u)$ следующий функционал:

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u - u_0\|^2 + \lambda TV(u), \quad (1)$$

где $\|\cdot\|$ – L^2 норма и все функции принадлежат $BV(\Omega)$, т.е. классу функций с ограниченной вариацией на множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Выражение $\frac{1}{2} \|u - u_0\|^2$ называется точностным членом, а выражение $\lambda TV(u)$ называется регуляризирующим членом. Мы будем использовать определение полной вариации $TV(u)$ функции u , данное в [1]. Выражение u_0 соответствует наблюдаемому сигналу (зашумленной функции), искаженному аддитивным шумом n ,

$$u_0 = v + n, \quad (2)$$

где v – исходная незашумленная функция. Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$u_* = \operatorname{argmin}_{u \in BV(\Omega)} [J(u)] \quad (3)$$

В выражении (1) $\lambda > 0$ – это параметр регуляризации, который определяет баланс между близостью к измеренным данным u_0 и изменением исходной функции в результате процесса регуляризации, выполненной для измеренных данных. Экстремальная функция u_* задачи (3) является приближением к зашумленной функции u_0 с минимальным значением полной вариации с учетом штрафа за отклонение по норме от наблюдаемой функции u_0 . Большие значения λ приводят к большему вкладу регуляризации и меньшей степени соответствия u_* зашумленной функции u_0 .

Дэвис и Ковач [6] рассматривали вариационную задачу как непараметрическую регрессию и описали метод “натянутой струны”. Кондат [7] предложил быстрый алгоритм поиска точных решений 1D задачи регуляризации TV для дискретных функций. Система уравнений, описывающая экстремальную функцию, была получена путем решения двойственной вариационной задачи. В общем случае сложность алгоритма равна $O(N^2)$, где N – количество элементов дискретной функции. Однако для широкого и практически наиболее значимого класса функций сложность может быть уменьшена до $O(N)$ [7].

В данной статье рассматривается задача TV регуляризации для двумерных кусочно-постоянных радиально-симметричных функций. Новизна полученных результатов заключается в следующем: получена система уравнений, описывающая экстремальную функцию, решающая прямую вариационную задачу с использованием субградиента; предложен быстрый алгоритм построения экстремальной функции; дана четкая геометрическая интерпретация экстремальной функции с использованием метода натянутой струны [6]. Кроме того в статье представлен новый вариант “трубы”, возникающей при реализации метода натянутой струны. Новая конструкция трубы имеет различный размер вертикальных поперечных сечений и “горизонтальных ступеней” в отличие от подхода стандартного метода натянутой струны [6]. Предложенный алгоритм задачи регуляризации двумерной полной вариации для радиально-симметричных кусочно-постоянных функций позволил разработать адаптивный алгоритм регуляризации одномерной задачи с переменным параметром регуляризации λ . Сложность предложенного алгоритма и сложность алгоритма Кондата одинаковы. Метод TV регуляризации, основанный на использовании субградиента для одномерного случая, рассматривался в [8].

Форма минимизируемого функционала в двумерной радиально-симметричной кусочно-постоянной задаче регуляризации позволяет свести задачу к поточечной одномерной задаче регуляризации с переменным параметром регуляризации.

Компьютерное моделирование иллюстрирует геометрические соотношения между экстремальными функциями и трубами для 2D радиально-симметричного кусочно-постоянного случая. Предложенный алгоритм используется при фильтрации шума для одномерных сигналов, искаженных нестационарным гауссовским шумом. Результаты показывают, что качество восстановления с помощью адаптивного алгоритма регуляризации 1D TV значительно лучше, чем у алгоритма с постоянным параметром регуляризации.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 на основе субградиентного метода выводится система уравнений, задающая экстремальную функцию. Приводится геометрическая интерпретация решения системы методом натянутой струны. В разделе 3 описан алгоритм нахождения экстремальной функции. В разделе 4 представлены результаты компьютерного моделирования.

1. TV РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КАК КОНЕЧНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Пусть функция u_0 из задачи (1)-(3) принадлежит классу радиально-симметричных кусочно-постоянных функций (RSPC). Тогда вариационная задача (3) имеет единственное решение u_* , причем u_* также принадлежит классу RSPC функций [9]. Более того, функции u_* и u_0 имеют

одинаковую структуру с точки зрения участков постоянства. Это позволяет редуцировать вариационную задачу (3) к конечномерной задаче.

RSPC функция в \mathbf{R}^2 задает набор колец на диске Ω радиуса R . Обозначим через $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = R$ радиальное разбиение диска, через λ_i отрезок $[r_{i-1}; r_i]$, $i = 1, \dots, n$. Разбиение $\delta = \Delta_i$ состоит из множества таких отрезков. Отрезок $[r_{i-1}; r_i]$ задает кольцо R_i , $i = 1, \dots, n$ как множество, ограниченное двумя окружностями на краю (радиуса r_{i-1} и r_i); первое кольцо R_1 является диском радиуса r_1 . Функция $u(r)$ определяется как кусочно-постоянная относительно разбиения δ , если $u(r) = u^i$, где $r \in \Delta_i$, и u^i – константа. Функция $u(r)$ называется *кусочно-постоянной относительно δ* , если $u(r) = u^i$, где $r \in \Delta_i$, и u^i является константой. Обозначим через $PC(\delta)$ класс кусочно-постоянных функций относительно разбиения δ .

Пусть функция u принадлежит $PC(\delta)$. Это означает, что $u(x) = u^i, x \in R_i, i = 1, \dots, n$, т.е. $u = (u^1, \dots, u^n)$. Поэтому, для набора радиусов $r = (r^1, \dots, r^n)$, функциональное пространство $PC(\delta)$ может быть отождествлено с \mathbf{R}^n . Обозначим через l_i периметр окружности радиуса r_i , через S_i площадь кольца $R_i, i = 1, \dots, n$. Для функций из $PC(\delta)$ функционал $J(u)$ принимает следующий вид [9]:

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u^i - u_0^i)^2 S_i + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} |u^{i+1} - u^i| l_i, \quad (4)$$

где

$$S_i = \pi((r^i)^2 - (r^{i-1})^2), \quad i = 1, \dots, n, \quad r^0 = 0, \quad l_i = 2\pi r^i, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Вариационная задача (3) может быть переписана в следующем виде:

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u - u_0\|^2 + \lambda TV(u) \rightarrow \min_{u \in PC(\delta)}, \quad (5)$$

где $\|u\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u^i)^2 S_i$ and $TV(u) = \sum_{i=1}^{n-1} |u^{i+1} - u^i| l_i$. Так как функционал $\|u - u_0\|^2$ строго выпуклый, и функционал $TV(u)$ выпуклый, то существует единственное решение задачи (5). Для экстремальной функции (минимума) u_* субградиент $\nabla J(u_*)$ удовлетворяет следующему условию:

$$0 \in \nabla J(u_*). \quad (6)$$

1.1. Вычисление субградиента

Рассмотрим субградиент $\nabla J(u)$:

$$\nabla J(u) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \nabla (u^i - u_0^i)^2 S_i + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \nabla |u^{i+1} - u^i| l_i.$$

Субградиенты $\frac{1}{2} \nabla (u^i - u_0^i)^2 S_i, i = 1, \dots, n$, могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{1}{2} \nabla (u^i - u_0^i)^2 S_i = (0, \dots, 0, (u^i - u_0^i) S_i, 0, \dots, 0),$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \nabla (u^i - u_0^i)^2 S_i = ((u^1 - u_0^1) S_1, (u^2 - u_0^2) S_2, \dots, (u^n - u_0^n) S_n).$$

Субградиенты $\nabla |u^{i+1} - u^i| l_i, i = 1, \dots, n - 1$, могут быть записаны следующим образом:

$$\nabla |u^2 - u^1| l_1 = \begin{cases} (-1, 1, 0, \dots, 0) l_1, & \text{if } u^2 > u^1 \\ (1, -1, 0, \dots, 0) l_1, & \text{if } u^2 < u^1 \\ \{(\delta^1, -\delta^1, 0, \dots, 0) l_1 | \delta^1 \in [-1; 1]\}, & \text{if } u^2 = u^1. \end{cases}$$

Из этих выражений мы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \nabla |u^{i+1} - u^i| l_i &= \\ &= \{(\delta^1 l_1, \delta^2 l_2 - \delta^1 l_1, \delta^3 l_3 - \delta^2 l_2, \dots, \\ &\quad \delta^{n-1} l_{n-1} - \delta^{n-2} l_{n-2}, -\delta^{n-1} l_{n-1})| \\ &\quad \delta^i = -1, \text{ if } u^{i+1} > u^i; \delta^i = 1, \text{ if } u^{i+1} < u^i; \delta^i \in [-1; 1], \text{ if } u^{i+1} = u^i\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметризация субградиента приводит к следующим выражениям:

$$\begin{cases} (\nabla J(u))^1 = (u^1 - u_0^1) S_1 + \lambda \delta^1 l_1 \\ (\nabla J(u))^2 = (u^2 - u_0^2) S_2 + \lambda \delta^2 l_2 - \lambda \delta^1 l_1 \\ \dots \\ (\nabla J(u))^{n-1} = (u^{n-1} - u_0^{n-1}) S_{n-1} + \lambda \delta^{n-1} l_{n-1} - \lambda \delta^{n-2} l_{n-2} \\ (\nabla J(u))^n = (u^n - u_0^n) S_n + \lambda \delta^{n-1} l_{n-1}, \end{cases}$$

где

$$\delta^i = \begin{cases} -1, & \text{if } u^{i+1} > u^i \\ 1, & \text{if } u^{i+1} < u^i \\ \in [-1; 1], & \text{if } u^{i+1} = u^i \end{cases}. \quad (8)$$

Заметим, что (6) означает что $(\nabla J(u_*))^i = 0, i = 1, \dots, n-1$ для некоторых значений параметров δ^i удовлетворяет (8). Таким образом,

$$\begin{cases} u_*^1 S_1 = u_0^1 S_1 - \lambda \delta^1 l_1 \\ u_*^2 S_2 = u_0^2 S_2 - \lambda \delta^2 l_2 + \lambda \delta^1 l_1 \\ \dots \\ u_*^{n-1} S_{n-1} = u_0^{n-1} S_{n-1} - \lambda \delta^{n-1} l_{n-1} + \lambda \delta^{n-2} l_{n-2} \\ u_*^n S_n = u_0^n S_n + \lambda \delta^{n-1} l_{n-1}, \end{cases}. \quad (9)$$

Сложив уравнения в (9), получим

$$\begin{cases} u_*^1 S_1 = u_0^1 S_1 - \lambda \delta^1 l_1 \\ u_*^2 S_2 + u_*^1 S_1 = u_0^2 S_2 + u_0^1 S_1 - \lambda \delta^2 l_2 \\ \dots \\ u_*^{n-1} S_{n-1} + \dots + u_*^1 S_1 = u_0^{n-1} S_{n-1} + \dots + u_0^1 S_1 - \lambda \delta^{n-1} l_{n-1} \\ u_*^n S_n + \dots + u_*^1 S_1 = u_0^n S_n + \dots + u_0^1 S_1. \end{cases}$$

Рассмотрим последовательность кумулятивных сумм U^1, \dots, U^n and U_0^1, \dots, U_0^n :

$$\begin{cases} U^1 = u_*^1 S_1 \\ U^2 = u_*^2 S_2 + u_*^1 S_1 \\ \dots \\ U^{n-1} = u_*^{n-1} S_{n-1} + \dots + u_*^1 S_1 \\ U^n = u_*^n S_n + \dots + u_*^1 S_1 \end{cases}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} U_0^1 = u_0^1 S_1 \\ U_0^2 = u_0^2 S_2 + u_0^1 S_1 \\ \dots \\ U_0^{n-1} = u_0^{n-1} S_{n-1} + \dots + u_0^1 S_1 \\ U_0^n = u_0^n S_n + \dots + u_0^1 S_1 \end{cases}. \quad (11)$$

Таким образом, решение задачи (5) с учетом (10) и (11) сводится к решению следующей задачи:

$$\begin{cases} U^1 = U_0^1 - \lambda\delta^1 l_1 \\ U^2 = U_0^2 - \lambda\delta^2 l_2 \\ \dots \\ U^{n-1} = U_0^{n-1} - \lambda\delta^{n-1} l_{n-1} \\ U^n = U_0^n \end{cases}, \quad (12)$$

с известной дискретной функцией U_0 , неизвестной дискретной функцией U и параметром δ , удовлетворяющим (8).

Заметим, что для любого $i = 1, \dots, n - 1$ условие $u_*^{i+1} > u_*^i$ эквивалентно условию $\frac{U^{i+1}-U^i}{S_{i+1}} > \frac{U^i-U^{i-1}}{S_i}$, условие $u_*^{i+1} < u_*^i$ эквивалентно условию $\frac{U^{i+1}-U^i}{S_{i+1}} < \frac{U^i-U^{i-1}}{S_i}$, условие $u_*^{i+1} = u_*^i$ эквивалентно условию $\frac{U^{i+1}-U^i}{S_{i+1}} = \frac{U^i-U^{i-1}}{S_i}$. Рассмотрим дополнительную переменную $U^0 = U_0^0 = 0$. Тогда система уравнений (12) может быть переписана следующим образом:

$$\begin{cases} U^0 = U_0^0 = 0 \\ U^1 = U_0^1 - \lambda\delta^1 l_1 \\ U^2 = U_0^2 - \lambda\delta^2 l_2 \\ \dots \\ U^{n-1} = U_0^{n-1} - \lambda\delta^{n-1} l_{n-1} \\ U^n = U_0^n \end{cases}, \quad (13)$$

где

$$\delta^i = \begin{cases} -1, & \text{if } \frac{U^{i+1}-U^i}{S_{i+1}} > \frac{U^i-U^{i-1}}{S_i} \\ 1, & \text{if } \frac{U^{i+1}-U^i}{S_{i+1}} < \frac{U^i-U^{i-1}}{S_i} \\ \in [-1; 1], & \text{if } \frac{U^{i+1}-U^i}{S_{i+1}} = \frac{U^i-U^{i-1}}{S_i} \end{cases}. \quad (14)$$

1.2. Геометрическая интерпретация формул (13) и (14)

Рассмотрим последовательность следующих кумулятивных сумм: $x_0 = 0, x_i = x_{i-1} + S_i, i = 1, \dots, n$. Значения $U_0^0, U_0^1, \dots, U_0^n$ дискретной функции U_0 определяют кусочно-линейную кривую с вершинами (x_i, U_0^i) , которая является осевой линией трубы.

Значения $U_0^0, U_0^1 + \lambda l_1, \dots, U_0^{n-1} + \lambda l_{n-1}, U_0^n$ определяют кусочно-линейную кривую с вершинами $(x_i, U_0^i + \lambda l_i)$, то есть верхнюю границу трубы. Значения $U_0^0, U_0^1 - \lambda l_1, \dots, U_0^{n-1} - \lambda l_{n-1}, U_0^n$ образуют кусочно-линейную кривую с вершинами $(x_i, U_0^i - \lambda l_i)$, то есть нижнюю границу трубы.

Значения U^0, U^1, \dots, U^n дискретной функции U определяют кусочно-линейную кривую с вершинами (x_i, U^i) . Формулы (13) и (14) позволяют сформулировать простую геометрическую интерпретацию экстремальной дискретной функции U . Рассмотрим экстремальную кусочно-линейную кривую, определяемую дискретной функцией U . Экстремальная кривая удовлетворяет следующим условиям:

1. Так как $\delta^i, i = 1, \dots, n - 1$ принимает значения из интервала $[-1; 1]$, то экстремальная кривая (т.е. решение задачи (5)) полностью лежит в трубе.
2. Если экстремальная кривая пересекает i -ое вертикальное сечение $\{x = x_i\}$ трубы во внутренней точке, то экстремальная кривая является прямой линией в окрестности точки пересечения.

Замечание 1. Последнее утверждение показывает, что экстремальная кривая имеет излом в точках, которые принадлежат верхней или нижней границам трубы.

Замечание 2. В отличие от метода натянутой струны [6], предлагаемая конструкция трубы имеет непостоянные размеры вертикальных сечений и горизонтальных ступеней.

1.3. TV регуляризация с адаптивным регуляризирующим членом

Заметим что если в формуле (4) выбрать значения площадей и длин колец с помощью следующих формул: $S_i = 1, i = 1, \dots, n$ и $\lambda_i = \lambda l_i, i = 1, \dots, n-1$, то функционал $J(u)$ из вариационной задачи (5) принимает следующую форму: $J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u^i - u_0^i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i |u^{i+1} - u^i|$. Вариационная задача с таким функционалом $J(u)$ является дискретной версией одномерного пространственно-адаптивного восстановления или регуляризации функции [10]. Таким образом, предлагаемый подход позволяет решить соответствующую одномерную вариационную задачу. Использование работы с различными параметрами регуляризации будет проиллюстрировано с помощью компьютерного моделирования.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ КРИВОЙ ДЛЯ RSPC ФУНКЦИЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Разработанный алгоритм построения экстремальной кривой вариационной задачи (5) состоит из следующих этапов.

Входные данные.

Пусть n - количество колец, S - множество областей колец, L - множество длин внешних границ колец, u_0 - массив значений начальная функция u_0 , а $\lambda > 0$ - действительный параметр.

Выходные данные. Массив v значений экстремальной функции u_* .

Кроме того, через U_0 обозначим массив значений кумулятивных сумм u_0 , а через U обозначим массив значений кумулятивных сумм u_* , $N = n + 1$.

Шаги алгоритма:

1. $j = 0$ // j - индекс начальной точки

$U[0] = 0$ // начальная точка

$L[N - 1] = 0$ // условие конца трубы

2. $i = j + 1$ // i - индекс текущего вертикального сечения трубы

3. $x = S[i]$ // x - расстояние между текущим и начальным сечением $\alpha = \frac{U_0[i] - U[j] - \lambda L[i]}{x}$ // нижняя граница допустимого значения наклона

$\beta = \frac{U_0[i] - U[j] + \lambda L[i]}{x}$ // верхняя граница допустимого значения наклона

$pt = i, pb = i$ // указатели на допустимые верхнюю и нижнюю вершины

4. $i := i + 1, x = x + S[i]$ $\alpha_1 = \frac{U_0[i] - U_0[j] - \lambda L[i]}{x}$ // нижняя граница допустимого значения наклона для следующего сечения

$\beta_1 = \frac{U_0[i] - U_0[j] + \lambda L[i]}{x}$ // верхняя граница допустимого значения наклона для следующего сечения

5. if $\alpha_1 > \beta$, then

{

for $k = j + 1$ to pt do $U[k] = U[k - 1] + \beta S[k]$

// отрисовка части натянутой струны

$j = pt$ // новое значение индекса начальной точки

перейти к шагу 2 // цикл

}

6. if $\beta_1 < \alpha$, then

{

for $k = j + 1$ to pb do $U[k] = U[k - 1] + \alpha S[k]$

// отрисовка части натянутой струны

$j = pb$ // новое значение индекса начальной точки

```

    переход к шагу 2 // цикл
}
7. if  $\alpha_1 > \alpha$ , then
{
     $\alpha = \alpha_1$  // новое значение нижней границы допустимого значения наклона
     $pb = i$  // новая позиция указателя нижней границы
}
8. if  $\beta_1 < \beta$ , then
{
     $\beta = \beta_1$  // новое значение верхней границы допустимого значения наклона
     $pt = i$  // новая позиция указателя верхней границы
}
9. if  $i < n$ , переход к шагу 4 // цикл
else
{
    for  $k = j + 1$  to  $N - 1$  do  $U[k] = U[k - 1] + \beta S[k]$  // отрисовка последнего участка
    натянутой струны
    end
}

```

3. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

3.1. Геометрическая иллюстрация применения алгоритма для 2D RSPC функции

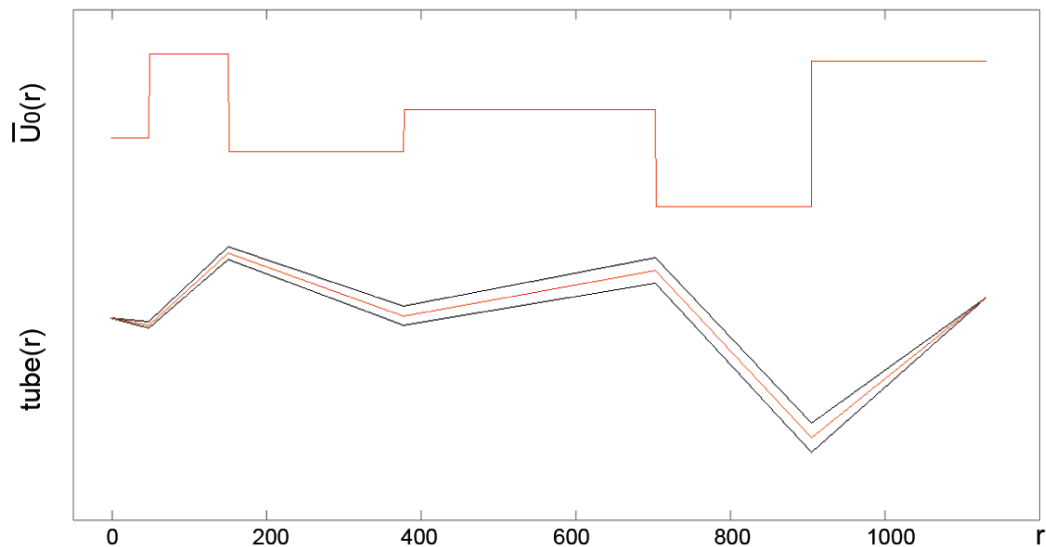


Рис. 1. График функции \bar{u}_0 (верхняя часть рисунка) и труба для $\lambda = 20$ (нижняя часть рисунка).

Геометрическая иллюстрация алгоритма приведена на примере модели с использованием обозначений из раздела 2.1. Обозначим через $u_0 = \{u_0^1, \dots, u_0^6\}$ RSPC функцию с $\{u_0^1, \dots, u_0^6\} = \{-20, 100, -40, 20, -120, 90\}$, $\{r^1, \dots, r^6\} = \{4, 7, 11, 15, 17, 19\}$. Рассмотрим модификацию \bar{u}_0 функции u_0 , определенную следующим образом:

$$\bar{u}_0(r) = u_0^i, x_{i-1} < r < x_i, i = 1, \dots, n.$$

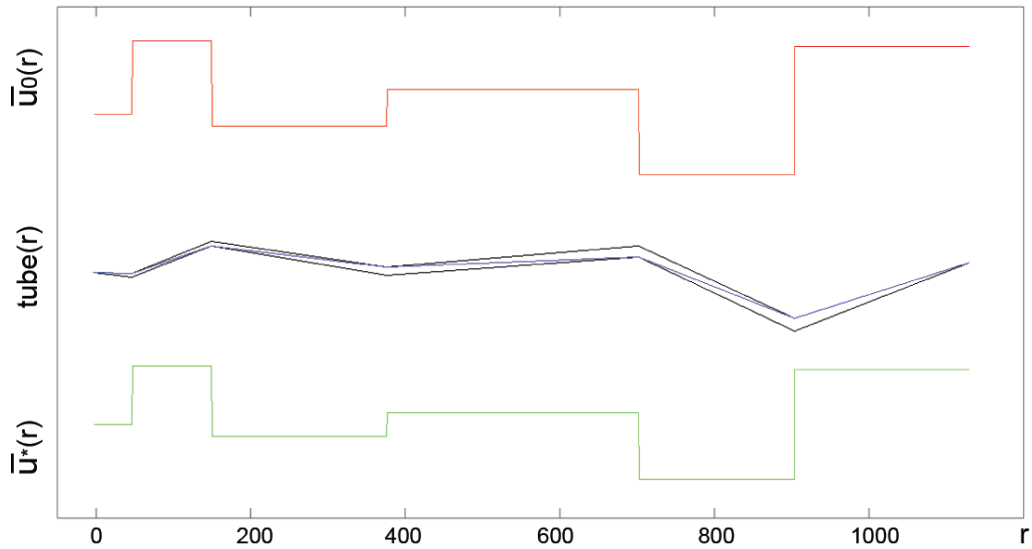


Рис. 2. Верхняя часть: функция \bar{u}_0 , средняя часть: кривая экстремальной линии в трубе для $\lambda = 20$, нижняя часть: модифицированная экстремальная функция \bar{u}_* .

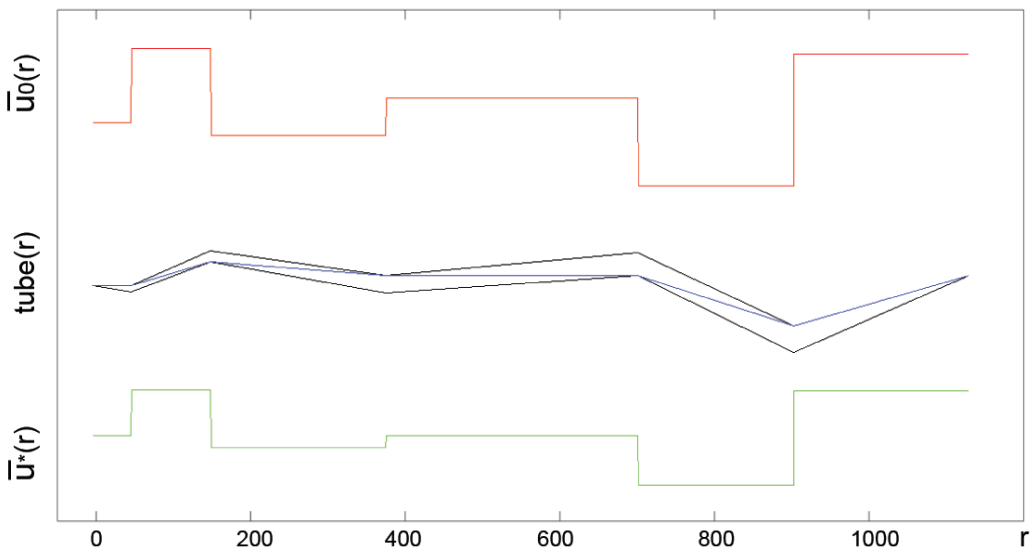


Рис. 3. Верхняя часть: функция \bar{u}_0 , средняя часть: кривая экстремальной линии в трубе для $\lambda = 40$, нижняя часть: модифицированная экстремальная функция \bar{u}_* .

Обозначим через $U_0(x)$ примитивную функцию для $\bar{u}_0(x)$, то есть

$$U_0(x) = \int_0^x \bar{u}_0(r) dr.$$

График функции U_0 представляет собой кусочно-линейную кривую с вершинами (x_i, U_0^i) . Этот график является осевой линией соответствующей трубы для функции u_0 . Для данного λ построим верхнюю и нижнюю границы трубы.

На Рис. 1 показан график функции \bar{u}_0 (верхняя часть) и трубы для $\lambda = 20$ (нижняя часть).

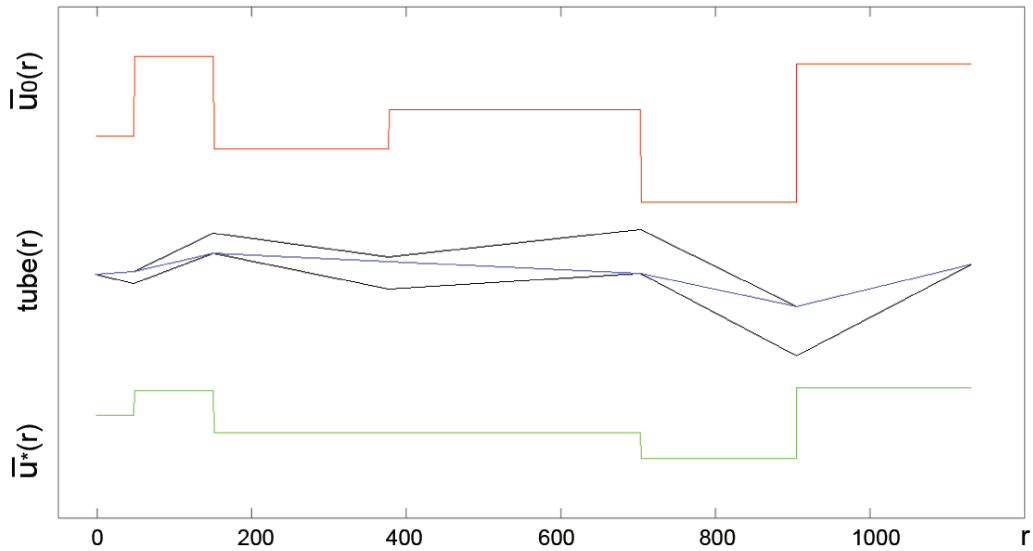


Рис. 4. Верхняя часть: функция \bar{u}_0 , средняя часть: кривая экстремальной линии в трубе для $\lambda = 70$, нижняя часть: модифицированная экстремальная функция \bar{u}_* .

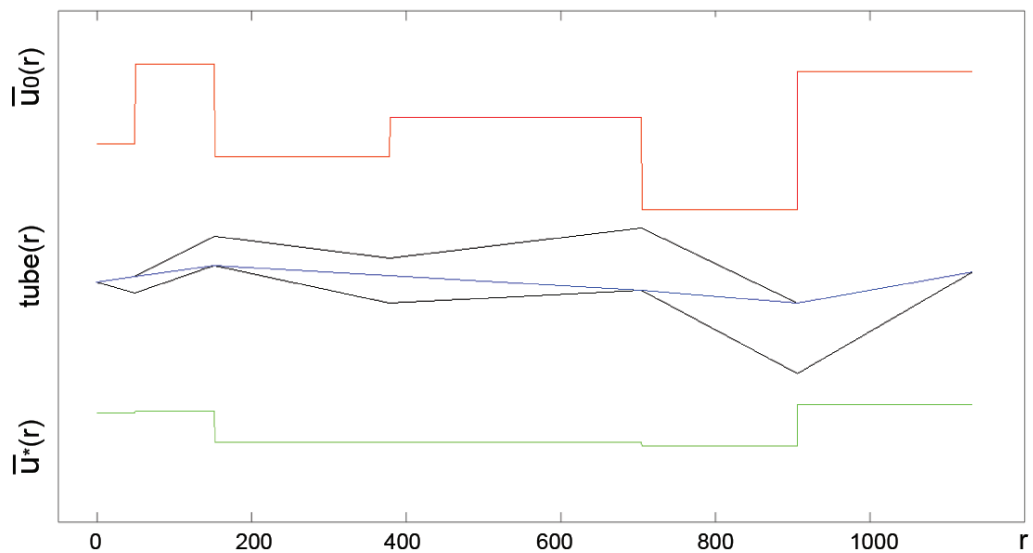


Рис. 5. Верхняя часть: функция \bar{u}_0 , средняя часть: кривая экстремальной линии в трубе для $\lambda = 100$, нижняя часть: модифицированная экстремальная функция \bar{u}_* .

Верхняя и нижняя границы трубы нарисованы черным цветом, осевая линия и функция U_0 нарисованы красным цветом.

На Рис. 2 - 7 показаны результаты работы алгоритма для различных значений параметра регуляризации λ . Кривая экстремальной линии U показана в средней части рисунков (синий цвет). Модифицированная экстремальная функция \bar{u}_* показана в нижней части рисунков (зеленый цвет). Заметим, что функция \bar{u}_* является производной функции U , и экстремальную функцию u_* можно получить из \bar{u}_* . Для сравнения модифицированная начальная функция \bar{u}_0 показана в верхней части рисунков. Рис. 3 показывает, что поведение красной и зеленой

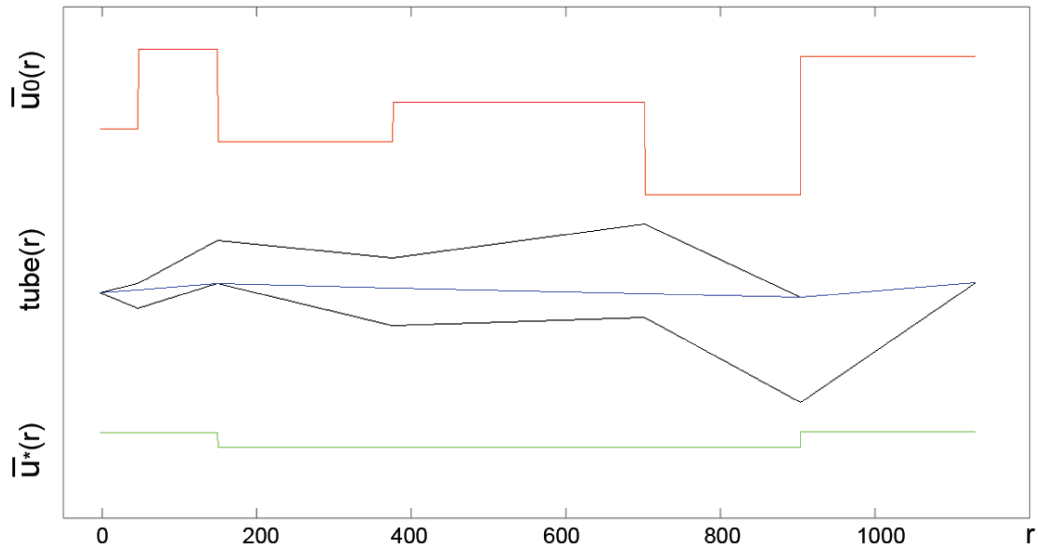


Рис. 6. Верхняя часть: функция \bar{u}_0 , средняя часть: кривая экстремальной линии в трубе для $\lambda = 150$, нижняя часть: модифицированная экстремальная функция \bar{u}_* .

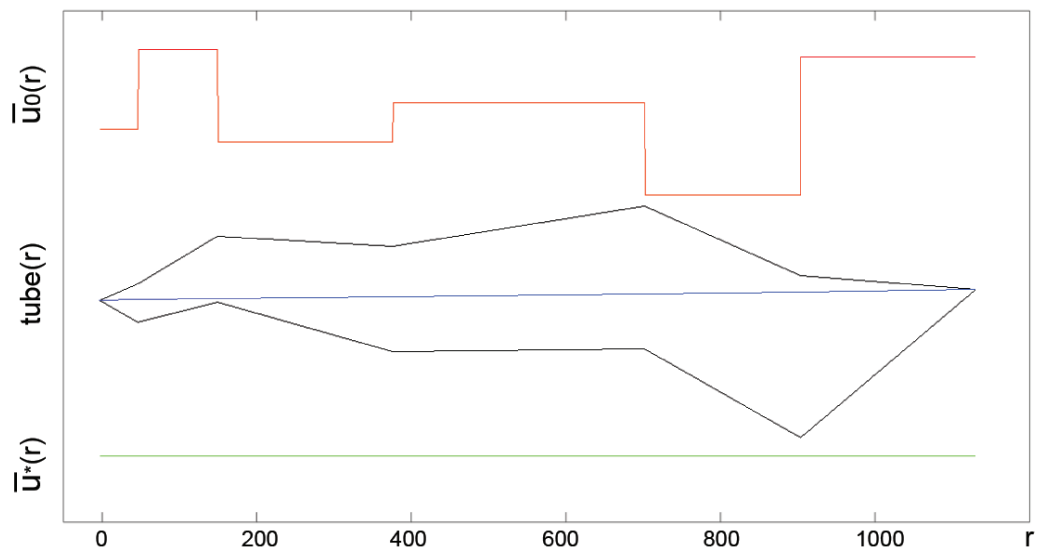


Рис. 7. Верхняя часть: функция \bar{u}_0 , средняя часть: кривая экстремальной линии в трубе для $\lambda = 230$, нижняя часть: модифицированная экстремальная функция \bar{u}_* .

линий одинаково; то есть небольшой скачок на зеленой линии в точке $x_3 \approx 380$ соответствует небольшому разрыву на синей линии в той же точке.

Рис. 4 показывает, что скачок на зеленой линии в точке $x_3 \approx 380$ исчез и синяя линия в этой точке больше не имеет излома. Рис. 5 показывает, что зеленая линия имеет пренебрежимо малые скачки в точках $x_1 \approx 50$ и $x_4 \approx 706$. В этих точках синий график - почти прямой. На Рис. 6 скачки зеленой линии в точках $x_1 \approx 50$ и $x_4 \approx 706$ исчезли. В тех же точках синяя линия - прямая. На Рис. 7 зеленая линия не имеет скачков, и, следовательно, синяя линия является прямой.

3.2. 1D TV регуляризация с адаптивным регуляризационным членом

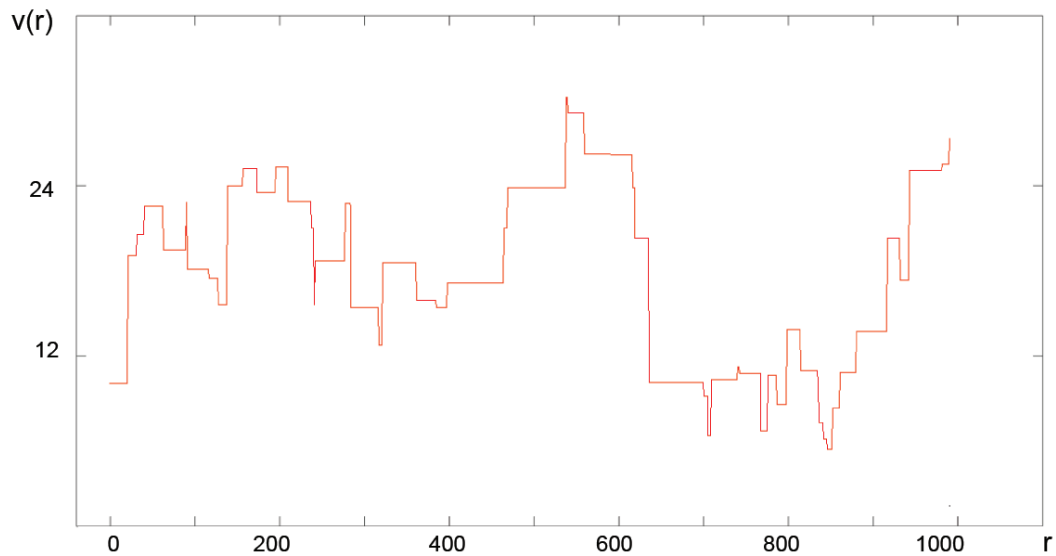


Рис. 8. Исходная дискретная функция v .

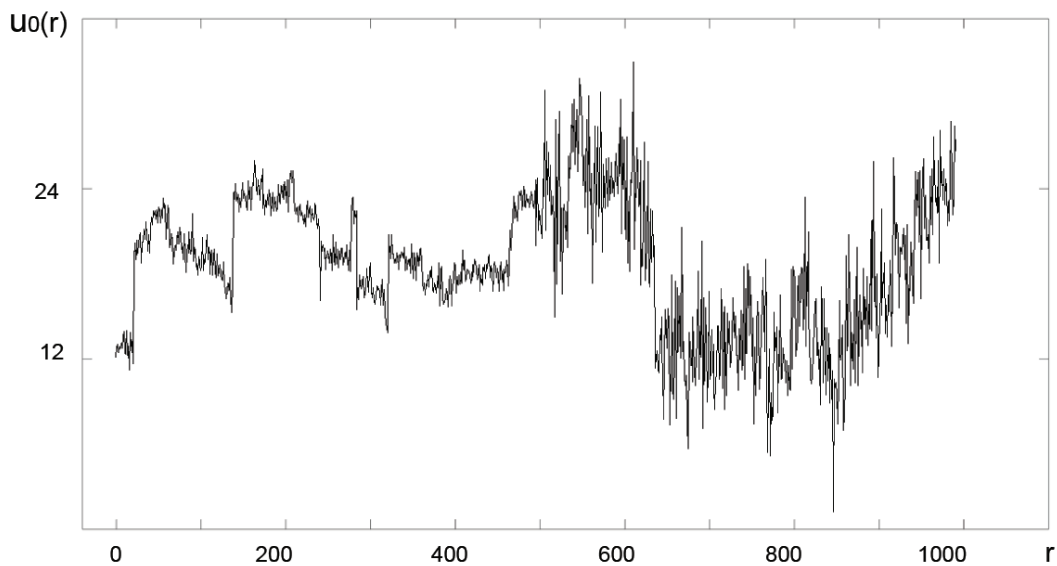


Рис. 9. Зашумленная функция u_0 .

Далее проиллюстрируем работу предложенного алгоритма для восстановления одномерного зашумленного сигнала. На Рис. 8 показана исходная дискретная функция v длиной $n = 1000$. Пусть $u_0 = v + n$ - наблюдаемый сигнал (функция шума), искаженный аддитивным шумом n , где n - нестационарный гауссов шум. Здесь $n^i \sim N(0, \sigma^i)$, $(\sigma^i)^2 = 1$ для $i = 1, \dots, 500$ и $(\sigma^i)^2 = 10$ для $i = 501, \dots, 1000$. Функция с шумом u_0 показана на Рис. 9.

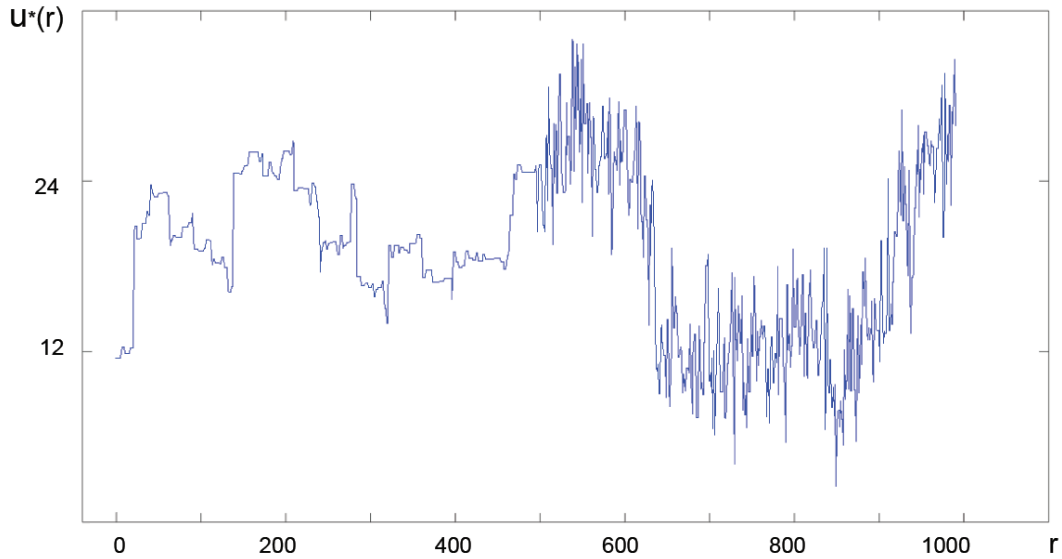


Рис. 10. Восстановленная функция u_* для $\lambda = 1$.

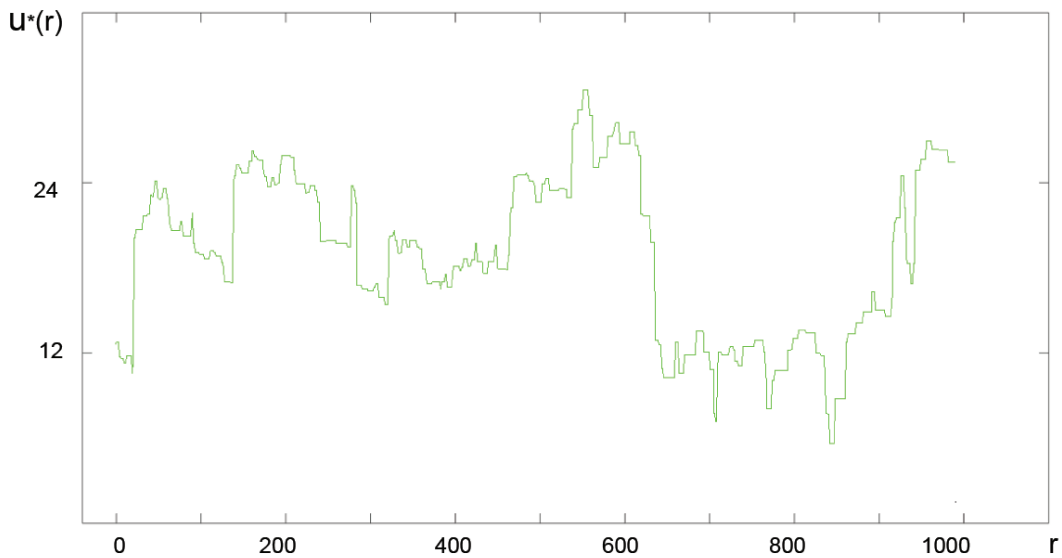


Рис. 11. Восстановленная функция u_* для переменных значений параметров регуляризации.

На Рис. 10 показан результат работы предложенного алгоритма с постоянным параметром регуляризации $\lambda = 1$. Можно заметить, что результаты восстановления в левой и правой частях графика - разные; то есть первая часть сигнала восстанавливается хорошо, тогда как вторая часть сигнала практически не восстанавливается. Если будут использоваться большие значения параметра регуляризации, то шум в правой части будет подавлен, но левая часть сигнала будет сильно искажена.

Работа предложенного алгоритма при варьировании значений параметра регуляризации показана на Рис. 11. В нашем случае мы используем $\lambda = 1$ для левой части и $\lambda = 7$ для правой части. Отметим, что результат восстановления намного лучше, чем в предыдущем случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый эффективный алгоритм TV регуляризации вычисления экстремальной функции для класса двумерных радиально-симметричных кусочно-постоянных функций. Описана четкая геометрическая интерпретация экстремальной функции с использованием модифицированного метода натянутой струны. Используя предложенный алгоритм регуляризации для 2D случая, разработан адаптивный алгоритм регуляризации 1D TV с переменным параметром регуляризации. Сложность предложенного адаптивного алгоритма регуляризации 1D TV равна сложности алгоритма Кондата. Результаты компьютерного моделирования иллюстрируют эффективность предложенных алгоритмов TV регуляризации. Отметим, что качество восстановления с помощью адаптивного алгоритма регуляризации 1D TV значительно лучше, чем у алгоритма с постоянным параметром регуляризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rudin L., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // *Physica D*. 1992. Vol. 60, no. 9. P. 259–268.
2. Acar R., Vogel C. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems // *Inverse Probl.* Vol. 10. P. 1217–1229.
3. Allard W. Total variation regularization for image denoising, ii. examples // *SIAM J. Imag. Sci.* 2008. Vol. 1. P. 400–417.
4. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. New York : Cambridge University Press, 2004. Vol. 1.
5. Chambolle A., Pock T. An introduction to continuous optimization for imaging // *Acta Numerica*. 2016. Vol. 25. P. 161–319.
6. Davies P., Kovac P. Local extremes, runs, strings and multiresolution // *Ann. Statist.* 2001. Vol. 29. P. 1–65.
7. Condat L. A direct algorithm for 1-d total variation denoising // *IEEE Signal Processing Letters*. 2013. Vol. 20. P. 1054–1057.
8. A. Makovetskii S. Voronin V. K. A generalized condats algorithm of 1d total variation regularization. Vol. 10396. 2017. P. 103962K.
9. A. Makovetskii S. Voronin V. K. Total variation regularization with bounded linear variations. Vol. 9971. 2016. P. 99712T–9.
10. Strong D., Chan T. Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization // *Inverse Problems*. 2003. Vol. 19. P. 165–187.

A fast TV regularization algorithm for the class of radially symmetric functions

Kober V., Makovetskii A., Voronin S., Karnaukhov V.

In this paper, total variation regularization (TV regularization) for two-dimensional radially symmetric piecewise constant (RSPC) functions is considered. A system of equations solving the direct variational problem with the subgradient method is obtained. Using the system we propose an algorithm for computation of an extremal function. A geometrical interpretation of the extremal function with a modified taut string approach is provided. The proposed 2D TV regularization algorithm is used for the design an adaptive 1D TV regularization algorithm with a varying regularization parameter. The complexity of the proposed adaptive 1D TV regularization algorithm equals to the complexity of the known Condat's algorithm. Computer simulation results are provided to illustrate the performance of the proposed TV regularization algorithm.

KEYWORDS: image restoration, signal restoration, total variation, denoising, subgradient.