Информационные процессы, Том 19, № 3, 2019, стр. 339–353.

О колмогоровской эпсилон-энтропии аттракторов автономных и неавтономных динамических систем[1]

А.А.Ильин[a,b], В.В.Чепыжов[a,c]

[a] *Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*
[b] *Институт прикладной математики, Российская академия наук, Москва, Россия*
[c] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

Поступила в редколлегию 26.07.2019

Аннотация—В работе получены оценки сверху для колмогоровская ε-энтропи и связанной с ней фрактальной размерности глобальный аттракторов бесконечномерных динамических систем, порождаемых автономными и неавтономными эволюционными уравнениями в гильбертовых пространствах. В качестве важного применения общих теорем получены оценки сверху для ε-энтропии и размерности глобальных аттракторов двумерных систем Навье–Стокса в ограниченной области с условиями прилипания на границе. Рассмотрен как автономный, так и неавтономный случай системы Навье–Стокса.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: эпсилон-энтропия, фрактальная размерность, неавтономные динамические системы, глобальные аттракторы, системы Навье–Стокса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие ε-энтропии было введено А.Н. Колмогоровым в связи с изучением классов аналитических функций, используемых в теории связи, которая возникла из пионерских работ К. Шенона и В.А. Котельникова.

Колмогоровская ε-энтропия и связанная с ней энтропийная или фрактальная размерность являются важными характеристиками, которые описывают сложность компактных множеств, что весьма существенно в теории приближений функций. В знаменитой работе А.Н. Колмогорова и В.М. Тихомирова [1] были получены оценки сверху и снизу для ε-энтропии многих классов функциональных множеств в банаховых или гильбертовых пространствах, что послужило началом нового научного направления.

Новый интерес к колмогоровской ε-энтропии возник в связи с исследованием нерегулярных или "странных" аттракторов динамических систем, которые появляются в различных моделях так называемого детерминированного хаоса. Классическим примером такой системы является система Лоренца и ее "странный" аттрактор (см. [2, 3]).

Аттрактором динамической системы называется компактное множество в фазовом пространстве этой системы, которое инвариантно относительно сдвигов по времени вдоль траекторий системы и которое притягивает любые ограниченный семейства траекторий (решений) изучаемой динамической системы при $t \to +\infty$. Это понятие становится особенно важным при исследование бесконечномерных динамических систем, порождаемых нелинейными эволюционными уравнениями с частными производными, которые могут иметь компактные аттракторы весьма сложной структуры. Возможно, эти объекты имеют тесную связь с проблемой

[1] Исследования А.А. Ильина выполнены при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01-00515 и 18-01-00524). Работа В.В. Чепыжова выполнена при финансовой поддержке Минисиерства образования и наука РФ (проект 14.Z50.31.0037).

описания явлений турбулентности в математической гидродинамике. В этом случае информация об ε-энтропии аттракторов дает описание сложности изучаемых явлений.

С точки зрения аттракторов стали изучаться разные диссипативные уравнения с частными производными: системы Навье–Стокса, неоднородные системы реакции-диффузии, уравнения Гинзбурга–Ландау, нелинейные диссипативные волновые уравнения и многие другие важные уравнения и системы уравнений с частными производными.

Существенный прогресс в теории глобальных аттракторов автономных бесконечномерных динамических систем был достигнут в работах О.А. Ладыженской, М.И. Вишика, А.В. Бабина, Ю.С. Ильяшенко, C. Foias, R. Temam, P. Constantin, J. Hale, G. Sell, A. Haraux, I.D. Chueshov (см., например, монографии [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]). Целью этих исследований было построение глобальных аттракторов диссипативных уравнений и изучение структуры этих аттракторов с помощью колмогоровской ε-энтропии и фрактальной размерности.

Теория равномерных глобальных аттракторов для неавтономных бесконечномерных динамических систем, порождаемых неавтономными диссипативными уравнениями с частными производными, возникла в работах A. Haraux (см. [11]), и была развита в работах М.И. Вишика и В.В. Чепыжова (см. монографию [12]). Равномерные аттракторы неавтономных бесконечномерных динамических систем являются компактными множествами в фазовых пространствах этих систем, однако, в общем случае эти множества имеют бесконечную размерность, поэтому при исследовании структуры равномерных аттракторов весьма актуальна колмогоровская ε-энтропия.

2. КОЛМОГОРОВСКАЯ ε-ЭНТРОПИЯ И ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Рассмотрим компактное множество X в некотором банаховом пространстве E. Пусть $N_\varepsilon(X)$ обозначает наименьшее число шаров $B(x_i,\varepsilon) = \{x \in E \mid \|x - x_i\|_E < \varepsilon\}$ в пространстве E с радиусом ε и с центрами $x_i,\ i = 1,\ldots,N$, которые покрывают множество X :

$$N_\varepsilon(X) = \min N, \qquad X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,\varepsilon).$$

Определение 1. Вещественное число

$$\mathbf{H}_\varepsilon(X) = \log_2 N_\varepsilon(X)$$

называется *ε-энтропией* множества X в пространстве E.

Ясно, что $H_\varepsilon(X) < +\infty$ поскольку множество X компактно в E. Для конкретных множеств X задача заключается в изучении асимптотического поведения ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(X)$ как функции ε при $\varepsilon \to 0+$.

С помощью ε-энтропии определяется *энтропийная размерность* множества X, которая еще называется *фрактальной размерностью* множества. На английском языке эта величина также часто называется *box counting*.

Определение 2. Число

$$\mathbf{d}_F(X,E) = \mathbf{d}_F(X) := \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\mathbf{H}_\varepsilon(X)}{\log_2(1/\varepsilon)}$$

называется фрактальной размерностью множества X в пространстве E.

Если $0 < \mathbf{d}_F(X) < +\infty$, то необходимо порядка $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\mathbf{d}_F(X)}$ точек в пространстве E, чтобы приблизить множество X с точностью ε. Эта размерность весьма полезна при описании негладких самоподобных множеств в конечномерных пространствах ($\dim E < \infty$), а именно, *фракталов*, фрактальная размерность которых не является целым числом.

Например фрактальная размерность *множества Кантора* K, принадлежащей вещественной прямой $\mathbb{R}$, равна

$$\mathbf{d}_F(K) = \log_3 2 < 1.$$

Другое важное применение фрактальной размерности и ε-энтропии связано с изучением аттракторов динамических систем, которые описывают детерминированный хаос, открытый Лоренцем в 60-х годах прошлого века. Для системы Лоренца фазовым пространством служит $E = \mathbb{R}^3$. Эта система имеет глобальный аттрактор, который называется *аттрактором Лоренца* и его фрактальная размерность удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \le \mathbf{d}_L(\mathcal{A}) = 2.402\ldots$$

Здесь $\mathbf{d}_L(\mathcal{A})$ обозначает *размерность Ляпунова* аттрактора $\mathcal{A}$, которая всегда больше или равна фрактальной размерности множества (см. [3]).

В следующих параграфах изучаются ε-энтропия и фрактальная размерность глобальных аттракторов бесконечномерных динамических систем, как автономных так и неавтономных. В качество приложения к конкретным уравнениям математической физики рассматриваются автономные и неавтономные системы Навье–Стокса в ограниченной области из $\mathbb{R}^2$.

3. ГЛОБАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ АВТОНОМНЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОЦЕНКИ ИХ РАЗМЕРНОСТИ

Начнем с рассмотрения автономных уравнений, которые можно записать в виде

$$\partial_t u = A(u), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$ обозначает решение задачи Коши (1). Здесь, $A(u)$ – нелинейный оператор, определяемый функцией u и ее частными производными по пространственной переменной x. Начальное условие $u_0(x)$ принадлежит некоторому банахову пространству E. Предполагается, что при любой начальной функции $u_0(\cdot) \in E$, задача (1) имеет, и при том единственное, решение $u(\cdot,t), t \ge 0$, причем значение $u(\cdot,t) \in E$ при всех $t \ge 0$. Отметим, что точный смысл фразы “$u(x,t)$ является решением (1)” определяется для каждого рассматриваемого уравнения отдельно. Пространство E называется *фазовым пространством* задачи (1).

Рассмотрим семейство отображений $\{S(t), t \ge 0\}$, отвечающее задаче (1)

$$S(t) : E \to E, \quad t \ge 0,$$

которое действует в пространстве E по формуле

$$S(t)u_0 = u(t), \quad u_0 \in E.$$

Отображения $\{S(t)\}$ образуют *динамическую полугруппу* в пространстве E относительно операции композиция, то есть

$$S(0) = \mathrm{Id} \quad \text{и} \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \ge 0.$$

Задача состоит в изучении поведения в пространстве E решений или траекторий

$$u(t) = S(t)u_0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

равномерно относительно произвольного ограниченного множества начальных данных $B = \{u_0\} \subset E$.

В качестве примера задачи (1), рассмотрим классическую 2D систему Навье–Стокса, которая описывает течение вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$, с граничным условием прилипания:

$$\begin{aligned} &\partial_t u = -\nu L u - B(u,u) + g(x), \quad \operatorname{div} u = 0, \\ &u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in H. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь, неизвестная вектор-функция $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t)),\ x \in \Omega,\ \nu > 0$ – коэффициент вязкости, $L = -\Pi\Delta$ – оператор Стокса, $B(u,u) = \Pi(u^1\partial_{x_1}u + u^2\partial_{x_2}u)$ – стандартный билинейный кинематический член, Π – оператор Лэре ортогонального проецирования из пространства $(L_2(\Omega))^2$ на его подпространство

$$H = \left[\left\{v(x) \in (C_0^\infty(\Omega))^2,\ \operatorname{div} v(x) = 0\right\}\right]_{(L_2(\Omega))^2}.$$

($[\,\cdot\,]_E$ обозначает замыкание в пространстве E.) Оператор Π используется для исключения из системы Навье–Стокса неизвестной функции давления в жидкости. Также предполагается, что известная внешняя сила $g(x)$ принадлежит пространству H.

Из классических работ Хопфа, Лерэ и Ладыженской (см., например, [8,9,15]) известно, что при любой начальной функции $u_0(\cdot) \in H$ задача (2) имеет единственное решение $u(t), t \geq 0$, в пространстве

$$L_\infty(\mathbb{R}_+; H) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H^1).$$

Здесь

$$H^1 = \left[\left\{v(x) \in (C_0^\infty(\Omega))^2,\ \operatorname{div} v(x) = 0\right\}\right]_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^2}.$$

При этом $u(\cdot,t) \in H$ при любом $t \geq 0$ и кроме того $u(\cdot,t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Следовательно, задача (2) порождает динамическую полугруппу $\{S(t)\}$, действующую в фазовом пространстве $E = H$.

Определение 3. (см. [8,9]) Компактное множество $\mathcal{A} \Subset E$ называется *глобальным аттрактором* полугруппы $\{S(t)\}$, действующей в пространстве E, если

(**i**) множество $\mathcal{A}$ строго инвариантно относительно $\{S(t)\}$:

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad \forall t \geq 0,$$

(**ii**) для любого ограниченного множества $B \subset E$, множество $S(t)B$ притягивается к $\mathcal{A}$ при $t \to +\infty$ по норме в пространстве E, то есть, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(B,\varepsilon)$ такое, что ε-окрестность $O_\varepsilon(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ в норме E содержит $S(t)B$ при всех $t \geq T$:

$$S(t)B \subset O_\varepsilon(\mathcal{A}), \quad \forall t \geq T.$$

В работах О.А. Ладыженской, Р. Темама, М.И. Вишика и А.В. Бабина (см., например, [8,9]) была доказана следующая фундаментальная теорема.

Теорема 1. *2D система Навье–Стокса имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} \Subset H$, причем это множество связно и компактно в пространстве H^1.*

Следующий шаг состоял в изучении размерности и ε-энтропии глобального аттрактора 2D системы Навье–Стокса. Рассмотри следующую безразмерную величину

$$G = \frac{|\Omega|\|g\|_H}{\nu^2},$$

которая называется *числом Грасхофа* системы (2). Здесь $|\Omega|$ обозначает площадь области Ω. Оказывается, что размерность глобального аттрактора зависит от числа Грасхофа.

Предложение 1. *Найдется аболютная константа $c_0 > 0$, такая, что при $G < c_0$, система (2) имеет едиственное стационарное решение $z(x)$:*

$$-\nu Lz - B(z,z) + g(x) = 0, \quad z \in H_1,$$

и для любого решения $u(t) = S(t)u_0$ системы (2) выполнена оценка

$$\|u(t) - z\|_H \leq C\|u_0 - z\|_H e^{-\gamma t}, \ \gamma > 0.$$

Следовательно, если число Грасхофа мало, то глобальный аттрактор A является тревиальным и совпадает со стационарным решением $\{z\}$. Следовательно, $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = 0$.

Однако, если число Грасхофа G велико, то стационарное решение $z(x)$ теряет устойчивость. Могут возникнуть другие стационарные решения, а также появиться иные предельные траектории, например, предельные циклы, предельные торы, неустойчивые многообразия, выходящие из стационарных точек. Все эти траектории включаются в глобальный аттрактор $\mathcal{A}$. С ростом G картина еще больше запутывается. Могут появиться хаотические траектории наподобие странного аттрактора Лоренца. Общая структура глобального аттрактора сильно усложняется и становится нерегулярной, хаотической. Отметим, что большинство из этих заключений сделаны на основе компьютерного моделирования системы (2).

Имеются также некоторые строгие результаты для частных случаем системы Навье–Стокса. Например, А.В. Бабин и М.И. Вишик изучали аттрактор системы Навье–Стокса с периодическими граничными условиями, которая порождает *неустойчивые теечения Колмогорова.* В работах А.А. Ильина были получены эффективные оценки снизу для размерности глобальных аттракторов таких систем в терминах физических параметров задачи.

Впервые конечномерность максимального инвариантного множества для двумерной системы Навье–Стокса, которое совпадает с глобальным аттрактором этой системы, было доказано О.А. Ладыженской, причем полученная оценка сверху для размерности аттрактора была экспоненциальной функцией числа Грасхофа G. После этого, Ю.С. Ильяшенко и независимо от него, А.В. Бабин и М.И. Вишик, получили полиномиальную оценку порядка G^2. Наконец, P. Constantin, C. Foias, R. Temam доказали оценку порядка G с использованием неравенств Либа–Тирринга. Наилучшие известные оценки сверху для хаусдорфовой и фрактальной размерности аттракторов 2D системы Навье–Стокса имеют следующий вид

$$\mathbf{d}_H(\mathcal{A}) \leq c_1 G, \quad \mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \leq c_2 G. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{d}_H(\mathcal{A})$ обозначает хаусдорфову размерность глобального аттрактора $\mathcal{A}$. Заметим, что всегда $\mathbf{d}_H(\mathcal{A}) \leq \mathbf{d}_F(\mathcal{A})$, а для константы c_2 выполняется оценка [13]

$$c_2 \leq \frac{1}{c_{\mathrm{LY}}} \left(\frac{c_{\mathrm{LT}}}{2} \right)^{1/2}.$$

Здесь c_{LY} — это константа из оценки типа Ли–Яу для сумм собственных значений оператора Стокса. А именно, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ собственные значения оператора Стокса

$$Lu_j = \lambda_j u_j, \qquad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots ,$$

то для любого $n \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq \frac{c_{\mathrm{LY}}}{|\Omega|} n^2.$$

Точные значения постоянных Ли–Яу для оператора Стокса найдены в [13], в частности, в рассматриваемом двумерном случае $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$

$$c_{\mathrm{LY}} = 2\pi.$$

Далее, c_{LT} — это постоянная в неравенстве Либа–Тирринга

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^m |v_j|^2\right)^2 dx \le c_{\mathrm{LT}} \sum_{j=1}^m \|\nabla v_j\|^2,$$

где $\{v_j\}_{j=1}^m$ произвольная ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)^2$ система бездивергентных вектор-функций:

$$\int_\Omega v_i \cdot v_j dx = (v_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad \operatorname{div} v_j = 0, \quad v_j \in H_0^1(\Omega)^2.$$

На основании работы [14] в [13] получена оценка

$$c_{\mathrm{LT}} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}\,,$$

так что

$$c_2 \le \frac{1}{4\pi 3^{1/4}} = 0.060\ldots. \tag{4}$$

Из неравенства (3) следует оценка для колмогоровской ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \lesssim c_2 G \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{5}$$

Оценки, аналогичные (3) и (5) для хаусдорфовой и фрактальной размерности глобальных аттракторов широкого класса автономных уравнений математической физики были доказаны в работах Р. Темама [8], А.В. Бабина, М.И. Вишика [9] и других математиков [16]. В основе доказательства лежит исследование свойств сжатия конечномерных объемов под действием квазидифференциалов полугрупп, порождаемых этими автономными уравнениями. Мы опишем этот метод позже применительно к неавтономным динамическим системам.

4. РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ НЕАВТОНОМНЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается неавтономное эволюционное уравнение вида:

$$\partial_t u = A(u,t), \;\; u|_{t=\tau} = u_\tau \in E, \;\; t \ge \tau. \tag{6}$$

Нелинейный оператор $A(u,t)$ зависит от функции u, ее частных производных по x, а также от времени $t \in \mathbb{R}$. Начальное условие u_τ, принадлежащее банахову пространству E, задается при $t = \tau$, где τ – любое фиксированное число. Предполагается, что при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и любом $u_\tau \in E$ задача (6) имеет, и притом единственное, решение $u(t)$ такое, что $u(t) \in E$ при всех $t \ge \tau$. Рассматривается двупараметрическое семейство отображений $\{U(t,\tau)\}$, $t \ge \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, в E, которое строится по формуле

$$U(t,\tau)u_\tau = u(t), \;\; t \ge \tau, \;\; \tau \in \mathbb{R}, \; u_\tau \in E, \tag{7}$$

где $u(t)$ – решение (6) с начальным условием $u_\tau \in E$. Семейство операторов $\{U(t,\tau)\}$ называется *динамическим процессом*, порожденным задачей (6). Процесс имеет следующие свойства:

1) $U(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$;
2) $U(t,s) \circ U(s,\tau) = U(t,\tau)$ при всех $t \geq s \geq \tau,\ \tau \in \mathbb{R}$.

Если операторы $A(u,t)$ в (6) не зависят от времени, то процесс $\{U(t,\tau)\}$ является полугруппой $U(t,\tau) = S(t-\tau)$, порождаемой автономной задачей (1).

В качестве примера рассмотрим двумерную систему Навье–Стокса, в которой внешняя сила зависит от времени,

$$\begin{cases} \partial_t u = -\nu Lu - B(u,u) + g_0\left(x,t\right), \ \operatorname{div} u = 0, \ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=\tau} = u_\tau(x) \in H. \end{cases} \tag{8}$$

Все обозначения имеют тот же смысл, что и в системе (1). Предполагается, что зависящая от времени внешняя сила $g_0\left(\cdot,t\right) \in C_b(\mathbb{R};H)$, то есть, она является непрерывной ограниченной функцией времени со значениями в пространстве H.

Как и в автономном случае справедлива теорема о существовании и единственности решения этой задачи: для любого $u_\tau(\cdot) \in H$ существует, и притом единственное, решение $u(x,t)$ задачи (8), принадлежащее пространству $L_\infty(\mathbb{R}_\tau;H) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_\tau;H^1)$, причем $u(\cdot,t) \in C_b(\mathbb{R}_\tau;H)$ (см. [8, 9, 12, 15]). Здесь обозначено $\mathbb{R}_\tau = [\tau,+\infty)$. Следовательно, задача (8) порождает динамический процесс $\{U(t,\tau)\}$, действующий в H по формуле (7).

Дадим определение *равномерного глобального аттрактора* $\mathcal{A}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$. Множество $P \subset E$ называется *равномерно* (по $\tau \in \mathbb{R}$) *притягивающим* для процесса $\{U(t,\tau)\}$, если для любого ограниченного множества $B \subset E$, множество $U(t,\tau)B$ притягивается к P при $t-\tau \to +\infty$ по норме в пространстве E, то есть, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T = T(B,\varepsilon)$ такое, что ε-окрестность $O_\varepsilon(P)$ множества P содержит $U(t,\tau)B$ при $t-\tau \geq T$:

$$U(t,\tau)B \subset O_\varepsilon(P), \quad \forall t \geq \tau,\ t-\tau \geq T.$$

Определение 4. (см. [11, 12]) *Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется* равномерным (по $\tau \in \mathbb{R}$) глобальным аттрактором *процесса $\{U(t,\tau)\}$, если оно замкнуто в E, является равномерно притягивающим для процесса $\{U(t,\tau)\}$ и обладает свойством минимальности, т.е. $\mathcal{A}$ принадлежит любому замкнутому равномерно притягивающему множеству этого процесса.*

Понятие равномерного глобального аттрактора процесса было введено в работах А. Аро [11] (см. также [12]). В [12] доказано следующее общее утверждение.

Предложение 2. *Если процесс $\{U(t,\tau)\}$ является равномерно асимптотически компактным, то существует единственный равномерный аттрактор $\mathcal{A}$, который является компактным множеством в E.*

Рассмотрим динамический процесс $\{U(t,\tau)\}$, отвечающий системе (8). В [12] доказано, что этот процесс имеет *компактное* в E *равномерно поглощающее множество.* Это доказывается с помощью основных энергетических априорных оценок задачи. В силу утверждения 2, у этого процесса есть равномерный аттрактор $\mathcal{A}$, который компактен в фазовом пространстве H этой задачи.

Для описания общей структуры глобального аттрактора процесса необходимы некоторые дополнительные понятия. Функция $u(s), s \in \mathbb{R}$, со значениями в E называется *полной траекторией* процесса $\{U(t,\tau)\}$, если

$$U(t,\tau)u(\tau) = u(t) \text{ для всех } t \geq \tau,\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Определение 5. *Ядром $\mathcal{K}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ называется семейство всех ограниченных полных траекторий этого процесса:*

$$\mathcal{K} = \{u(\cdot) \mid u \ \text{удовлетворяет (9) и } \|u(s)\|_E \le C_u, \ \forall s \in \mathbb{R}\}.$$

Множество $\mathcal{K}(t) = \{u(t) \mid u(\cdot) \in \mathcal{K}\} \subset E, \ \ t \in \mathbb{R}$, называется *сечением* ядра в момент времени t. Легко проверяется следующее свойство.

Предложение 3. *Если процесс $\{U(t,\tau)\}$ имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, то все сечения его ядра принадлежат $\mathcal{A}$:*

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{K}(t) \subseteq \mathcal{A}. \tag{10}$$

Отметим, что в общем случае включение (10) является строгим, т.е. на глобальном аттракторе $\mathcal{A}$ могут лежать точки, которые не являются значениями ограниченных полных траекторий исходного уравнения (6). Однако, как будет показано ниже, такие точки являются значениями ограниченных полных траекторий уравнений, "родственных" исходному уравнению. Чтобы описать эти "родственные" уравнения, вводится понятие *временного символа* рассматриваемого уравнения.

Предположим, что все члены уравнения (6), которые явно зависят от времени t, можно записать в виде функции $\sigma(t), \ t \in \mathbb{R}$, со значениями в некотором банаховом пространстве Ψ. При этом само уравнение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\partial_t u = A_{\sigma(t)}(u), \ \ y|_{t=\tau} = y_\tau \in E, \ \ t \ge \tau. \tag{11}$$

Функция $\sigma(t)$ называется *временным символом* уравнения. Например, в неавтономной системе (6) символом является внешняя сила $g_0(\cdot,t), \ \sigma(t) = g_0(\cdot,t)$, значения которой принадлежат пространству $H = \Psi$. Для простоты будем предполагать, что $\sigma(t) \in C(\mathbb{R};\Psi)$.

Символ исходного уравнения (6) обозначим через $\sigma_0(t)$. Вместе с этим уравнением, имеющим символ $\sigma_0(t)$, мы также рассмотрим уравнения (6), в которых символами служат функции $\sigma(t) = \sigma_0(t+h)$ со сдвинутыми по времени аргументами на любые $h \in \mathbb{R}$. Кроме того, рассматриваются также уравнения, символы $\sigma(t)$ которых получаются предельными переходами из последовательностей вида $\sigma_0(t+h_n)$ при $n \to \infty$. Пределы берутся в пространстве $C(\mathbb{R};\Psi)$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, которая определяется следующим образом. По определению последовательность функций $\{\xi_n(t)\}$ из $C(\mathbb{R};\Psi)$ сходится к функции $\xi(t)$ при $n \to \infty$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, если для любого фиксированного $M > 0$

$$\max_{t\in[-M,M]} \|\xi_n(t) - \xi(t)\|_\Psi \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Введенная топология локальной равномерной сходимости в $C(\mathbb{R};\Psi)$ является метризуемой, а соответствующее метрическое пространство полно (см. [12]).

Определение 6. *Множество*

$$\mathcal{H}(\sigma_0) = [\{\sigma_0(t+h) \mid h \in \mathbb{R}\}]_{C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)} \tag{12}$$

называется оболочкой *функции $\sigma_0(t)$ в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Здесь, как обычно, квадратные скобки $[\,\cdot\,]_{C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)}$ обозначают замыкание в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$.*

Рассматривается семейство уравнений (11), временные символы $\sigma(t)$ которых принадлежат оболочке $\mathcal{H}(\sigma_0)$ символа $\sigma_0(t)$ исходного уравнения (6). Будем предполагать, что $\sigma_0(t)$ является *трансляционно-компактной* функцией в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$.

Определение 7. *Функция* $\sigma_0(t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$ *называется* трансляционно-компактной в пространсве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, *если ее оболочка* $\mathcal{H}(\sigma_0)$ *компактна в* $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$.

Рассмотрим некоторые примеры трансляционно-компактных функций.

Пример 1. Пусть функция $\sigma_0(t)$ является *почти периодической* со значениями в банаховом пространстве Ψ. По определению это означает, что ее оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактна в пространстве $C_b(\mathbb{R};\Psi)$ с топологией равномерной сходимости на всей оси $\mathbb{R}$. Топология $C_b(\mathbb{R};\Psi)$, очевидно, сильнее топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, поэтому, если множество $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактно в $C_b(\mathbb{R};\Psi)$, то оно компактно и в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, т.е. функция $\sigma_0(t)$ трансляционно-компактна в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$.

Пример 2. Важным частным случаем почти периодических функций являются квазипериодические функции со значениями в Ψ. Функция $\sigma_0(t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$ называется *квазипериодической*, если она представима в виде

$$\sigma_0(t) = \phi\left(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_k t\right) = \phi\left(\bar{\alpha} t\right), \quad \phi\left(\bar{\alpha} t\right) \in \Psi, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

где функция $\phi\left(\bar{\omega}\right) = \phi\left(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\right)$ является непрерывной и 2π-периодической по каждому аргументу $\omega_i \in \mathbb{R}$. При $k = 1$ получаются периодические функции.

Пусть $\mathbb{T}^k = [\mathbb{R} \bmod 2\pi]^k$ обозначает k-мерный тор. Тогда $\phi(\bar{\omega}) \in C(\mathbb{T}^k;\Psi)$. Предполагается, что компоненты вектора $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ в (13) являются рационально независимыми числами (иначе можно сократить число независимых аргументов ω_i в представлении (13)). Легко показать, что оболочку квазипериодической функции $\sigma_0(t)$ в $C_b(\mathbb{R};\Psi)$ образуют функции

$$\left\{\phi(\bar{\alpha} t + \bar{\omega}_1) \mid \bar{\omega}_1 \in \mathbb{T}^k\right\} = \mathcal{H}(\sigma_0). \tag{14}$$

Следовательно, оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ является непрерывным образом k-мерного тора $\mathbb{T}^k$. В частности, если функция $\phi(\bar{\omega})$ является гладкой, то фрактальная размерность множества $\mathcal{H}(\sigma_0)$ не превосходит k :

$$\mathbf{d}_F\left(\mathcal{H}(\sigma_0)\right) \le \mathbf{d}_F\left(\mathbb{T}^k\right) = k, \tag{15}$$

и в случае общего положения равна k (неравенство в (15) может быть строгим).

Можно построить другие примеры трансляционно-компактных функций, которые не являются почти периодическими или квазипериодическими (см. [12, 17]).

Рассмотрим теперь семейство уравнений (11) с символами $\sigma(t) \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, где $\sigma_0(t)$ – трансляционно-компактная функция в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Предполагается, что для каждого символа $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$ задача Коши (11) однозначно разрешима при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и для каждого начального условия $u_\tau \in E$. Следовательно, имеется семейство динамических процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, действующих в пространстве E.

Семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, называется $(E \times \mathcal{H}(\sigma_0), E)$-непрерывным, если для любых t и $\tau, t \ge \tau$, отображение $(u,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,\tau)u$ непрерывно из $E \times \mathcal{H}(\sigma_0)$ в E.

Сформулируем основную теорему о структуре глобального аттрактора уравнения (11) с трансляционно-компактным символом $\sigma_0(t)$. Процесс, порожденный этим символом, обозначим $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$. Доказательство этой теоремы приведено в [12].

Теорема 2. *Предположим, что функция* $\sigma_0(t)$ *трансляционно-компактна в пространстве* $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. *Пусть динамический процесс* $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ *является асимптотически компактным, а соответствующее ему семейство процессов* $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, *является* $(E \times \mathcal{H}(\sigma_0), E)$-*непрерывным. Тогда процесс* $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ *имеет глобальный аттрактор* $\mathcal{A} \Subset E$, *для которого* *справедливо следующее равенство:*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)} \mathcal{K}_\sigma(0), \tag{16}$$

где $\mathcal{K}_\sigma$ – ядро процесса $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ с символом $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. Ядро $\mathcal{K}_\sigma$ не пусто при любом $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$.

Применяя теорему 2 к исследованию неавтономной 2D системы Навье–Стокса (8), получаем следующий результат.

Предложение 4. *Предположим, что внешняя сила $g_0(\cdot,t)$ в уравнении (8) является трансляционно-компактной функцией в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Тогда процесс $\{U_{g_0}(t,\tau)\}$ задачи (8) имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} \Subset E = H$, причем*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{g \in \mathcal{H}(g_0)} \mathcal{K}_g(0), \tag{17}$$

где $\mathcal{K}_g$ – ядро системы Навье–Стокса с внешней силой $g(\cdot,t) \in \mathcal{H}(g_0)$.

Обозначим

$$\|g_0\|^2_{L_2^b(\mathbb{R};H)} \equiv \|g_0\|^2_{L_2^b} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |g_0(\cdot,s)|^2 ds.$$

Отметим, что $\|g_0\|^2_{L_2^b} < \infty$, если функция g_0 является трансляционно-компактной в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$.

Сформулируем неавтономный аналог предложения 1. Рассмотрим число Грасхофа G неавтономной системы Навье–Стокса (8):

$$G := \frac{|\Omega| \|g_0\|_{L_2^b}}{\nu^2}. \tag{18}$$

Предложение 5. *Найдется абсолютная константа $c_0 > 0$, такая, что при $G < c_0$ система (8) имеет, и притом единственное, решение $z_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ограниченное в H, (то есть ядро $\mathcal{K}_{g_0}$ состоит из единственной траектории $z_0(t)$). Это решение $z_0(t)$ является экспоненциально устойчивым: для любого решения $u(t)$ уравнения (8) выполнено следующее неравенство:*

$$|u(t) - z_0(t)| \le C_0 |u_\tau - z_0(\tau)| e^{-\beta(t-\tau)} \ \forall t \ge \tau, \tag{19}$$

где $u(t) = U_{g_0}(t,\tau)u_\tau$ (константы C_0 и β не зависят от u_τ и τ).

Если известно, что $g_0(x,t) = \phi(x, \alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_k t)$ – квазипериодическая функция, причем функция $\phi(\bar\omega) \in C^{Lip}(\mathbb{T}^k;H)$ непрерывная по Липшицу, то $z_0(x,t)$ также квазипериодическая с тем же набором рационально независимых частот, т.е.

$$z_0(x,t) = \Phi(x, \alpha_1 t, \alpha_2 t, \dots, \alpha_k t), \tag{20}$$

где $\Phi(x,\bar\omega) \in C^{Lip}(\mathbb{T}^k;E)$ – некоторая непрерывная по Липшицу, периодическая функция относительно $\bar\omega \in \mathbb{T}^k$.

Отметим, что константа c_0 такая же, что и в автономном случае (см. предложение 1).

С помощью неравенства (19) из предложения 4 легко выводится, что глобальным аттрактором системы (8) при условии $G < c_0$ служит множество

$$\mathcal{A} = \left[\{z(t) \mid t \in \mathbb{R}\}\right]_H. \tag{21}$$

Если дополнительно известно, что $g_0(x,t) = \phi(x, \alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_k t)$ является квазипериодической функцией, то из представления (20) ограниченной траектории $z_0(t)$ и из (21) находим, что $\mathcal{A} = \Phi(\mathbb{T}^k)$. Поэтому, из непрерывности по Липшицу функции Φ, получаем оценку для фрактальной размерности аттрактора

$$\mathcal{A}: \ \mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = \mathbf{d}_F(\Phi(\mathbb{T}^k)) \leq \mathbf{d}_F(\mathbb{T}^k) = k,$$

а для его ε-энтропии справедливо неравенство

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \lesssim k \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{22}$$

Легко построить примеры функций $g_0(x,t)$ для которых $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = k$. Для этого достаточно выбрать подходящую гладкую функцию $z_0(x,t)$ вида (20) и подставить ее в систему (8) для нахождения $g_0(x,t)$. Так же строится пример почти периодической функции $g_0(x,t)$ с бесконечным набором рационально независимых частот, для которой $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = +\infty$.

Эти простые примеры указывают на целесообразность изучения в общем случае колмогоровской ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}$ неавтономной системы Навье–Стокса.

5. ОЦЕНКИ ε-ЭНТРОПИИ И РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается семейство уравнений (11), в котором символ $\sigma(t) \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. Предполагается, что исходный символ $\sigma_0(t)$ является трансляционно-компактной функцией в пространстве $C^{\text{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Рассматривается соответствующее ему семейство динамических процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, действующих в E. Предполагаются выполненными условия теоремы 2. Тогда процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, который представим в виде (16).

Задача заключается в исследовании ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, E)$ аттрактора $\mathcal{A}$ в пространстве E. При этом предполагается известной ε-энтропия множества $\Pi_{0,l}\mathcal{H}(\sigma_0)$ в пространстве $C([0,l];\Psi)$. Здесь $\Pi_{0,l}$ обозначает оператор сужения на отрезок $[0,l]$.

Сформулируем некоторые дополнительные условия для $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$. Пусть $\{U(t,\tau)\}$ – некоторый процесс в E. Пространство E предполагается гильбертовым. Рассмотрим ядро $\mathcal{K}$ этого процесса. Из определения ядра вытекает следующее свойство строгой инвариантности сечений ядра:

$$U(t,\tau)\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(t), \ \forall t \geq \tau, \ \ \tau \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Определение 8. Процесс $\{U(t,\tau)\}$ в E называется равномерно квазидифференцируемым на $\mathcal{K}$, если найдется семейство линейных ограниченных операторов $\{L(t,\tau,u)\}$, где $u \in \mathcal{K}(\tau), \ t \geq \tau, \ \tau \in R$, такое что

$$\|U(t,\tau)u_1 - U(t,\tau)u - L(t,\tau,u)(u_1 - u)\|_E \leq \gamma(\|u_1 - u\|_E, t-\tau)\|u_1 - u\|_E \tag{24}$$

для любых $u, u_1 \in \mathcal{K}$, причем функция $\gamma = \gamma(\xi, s) \to 0+$ при $\xi \to 0+$ для каждого фиксированного $s \geq 0$.

Предполагается, что процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ является равномерно квазидифференцируемым на ядре $\mathcal{K}_{\sigma_0}$, причем его квазидифференциал порождается уравнением в вариациях

$$\partial_t z = A_{\sigma_0 u}(u(t))z, \ \ z|_{t=\tau} = z_\tau \in E, \tag{25}$$

где $u(t) = U_{\sigma_0}(t,\tau)u_\tau$, $u_\tau \in \mathcal{K}_{\sigma_0}(\tau)$, т.е., $L(t,\tau,u_\tau)z_\tau = z(t)$, где $z(t)$ – решение задачи (25), которая предполагается однозначно разрешимой при всех $u_\tau \in \mathcal{K}_{\sigma_0}(\tau)$ для любого $z_\tau \in E$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $L : H_1 \to H$ – линейный, возможно, неограниченный оператор. Тогда m-мерным следом оператора L называется число

$$\mathrm{Tr}_m L = \sup_{\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,m}} \sum_{i=1}^{m} (L\varphi_i, \varphi_i), \tag{26}$$

где точная верхняя грань взята по всевозможным ортонормированным в H семействам векторов $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,m}$, лежащим в H^1.

Введем следующие числа:

$$\tilde{q}_j = \varlimsup_{t\to+\infty} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \sup_{u_0\in\mathcal{K}(\tau)} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Tr}_j(A_{\sigma_0 u}(u(s)))ds, \tag{27}$$

где $u(t) = U_{\sigma_0}(t,\tau)u_\tau$, а след $\mathrm{Tr}_j(L)$ линейного оператора L определен в (26).

Предполагается также выполненным следующее условия Липшица для семейства процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$:

$$\begin{gathered}\|U_{\sigma_1}(h,0)u - U_{\sigma_2}(h,0)u\|_E \le C(h)\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{C([0,h];\Psi)}, \\ \forall\sigma_1,\sigma_2 \in \mathcal{H}(\sigma_0), \forall u \in \mathcal{A},\ \forall h \ge 0.\end{gathered} \tag{28}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и кроме того, пусть исходный процесс* $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ *является равномерно квазидифференцируемым на* $\mathcal{K}_{\sigma_0}$, *причем его квазидифференциалы порождены уравнением в вариациях* (25), *а для чисел* $\tilde{q}_j$ (см. (27)) *выполнены неравенства*

$$\tilde{q}_j \le q_j,\ j = 1,2,3,\ldots \tag{29}$$

Предполагается выполненным условие Липшица (28) *для семейства* $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. *Предполагается, что функция* q_j *выпукла вверх по* j. *Пусть* m *– наименьшее число, такое что* $q_{m+1} < 0$ (*тогда* $q_m \ge 0$). *Обозначим*

$$d = m + q_m/(q_m - q_{m+1}).$$

Тогда для любого $\delta > 0$ *найдутся такие числа* $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon_0 > 0$, $h \ge 0$, *что*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon\alpha}{4C(h)}}\left(\Pi_{0,h\log_{1/\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)}\mathcal{H}(\sigma_0)\right),\ \ \forall\varepsilon < \varepsilon_0. \tag{30}$$

Число $C(h)$ *такое же, как в условии Липшица (28).*

Сформулируем некоторые важные следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *Пусть функция* $\sigma_0(t)$ *является почти периодической. Тогда неравенство* (30) *можно упростить:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon\alpha}{4C(h)}}\left(\mathcal{H}(\sigma_0)\right),\ \ \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \tag{31}$$

где $\mathbf{H}_\epsilon\left(\mathcal{H}(\sigma_0)\right)$ *–* ϵ*-энтропия оболочки* $\mathcal{H}(\sigma_0)$ *в пространстве* $C_b(\mathbb{R};\Psi)$.

В самом деле, ε-энтропия множества $\Pi_{0,l}\mathcal{H}(\sigma_0)$ в пространстве $C([0,l];\Psi)$ не превосходит ε-энтропию $\mathcal{H}(\sigma_0)$ в $C_b(\mathbb{R};\Psi)$. Из оценки (31) видно, что в случае общей почти периодической функции $\sigma_0(t)$, имеющей бесконечное число рационально независимых частот, основной вклад в оценку ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}$ вносит ε/L-энтропия оболочки $\mathcal{H}(\sigma_0)$, где $L = \frac{4C(h)}{\alpha}$. Однако если функция $\sigma_0(t)$ имеет конечное число частот, являясь квазипериодической, то вклад этой величины сравним с вкладом величины $d\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)$, что приводит к конечномерности глобального аттрактора.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 2 функция $\sigma_0(t)$ является квазипериодической вида $\sigma_0(t) = \phi(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_k t) = \phi(\bar{\omega} t)$, где $\phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) = \phi(\bar{\omega}) \in C^{\mathrm{Lip}}(\mathbb{T}^k;\Psi)$. Тогда оценка* (31) *выглядит так:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + k\log_2\left(\frac{4K}{\alpha\varepsilon}\right), \quad \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \tag{32}$$

где K – константа Липшица из неравенства

$$\|\phi(\bar{\omega}_1) - \phi(\bar{\omega}_2)\|_\Psi \le K\|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|_{\mathbb{R}^k}, \quad \forall\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \in \mathbb{T}^k.$$

В частности,

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \le d + k. \tag{33}$$

Рассмотрим еще две важные характеристики компактного множества X в пространстве E, введенные А.Н. Колмогоровым и В.М. Тихомировым. Число

$$\mathbf{df}(X,E) = \mathbf{df}(X) = \varlimsup_{\varepsilon\to 0+}\frac{\log_2\left(\mathbf{H}_\varepsilon(X)\right)}{\log_2\log_2\left(1/\varepsilon\right)} \tag{34}$$

называется *функциональной размерностью* множества X в E, а число

$$\mathbf{q}(X,E) = \mathbf{q}(X) = \varlimsup_{\varepsilon\to 0+}\frac{\log_2\left(\mathbf{H}_\varepsilon(X)\right)}{\log_2\left(1/\varepsilon\right)} \tag{35}$$

называется его *метрическим порядком* в E. Легко видеть, что $\mathbf{df}(X) = 1$, $\mathbf{q}(X) = 0$, если $\mathbf{d}_F(X) < +\infty$. Поэтому величины $\mathbf{df}(X)$ и $\mathbf{q}(X)$ характеризуют бесконечномерные множества.

Следствие 3. *Пусть $\sigma_0(t)$ – почти периодическая функция, тогда*

$$\mathbf{df}(\mathcal{A}) \le \mathbf{df}\left(\mathcal{H}(\sigma_0), C_b(\mathbb{R};\Psi)\right), \tag{36}$$

$$\mathbf{q}(\mathcal{A}) \le \mathbf{q}\left(\mathcal{H}(\sigma_0), C_b(\mathbb{R};\Psi)\right). \tag{37}$$

Теперь коротко изложим применение теоремы 3 и следствий 1 – 3 к неавтономной системе Навье–Стокса (8). Как уже отмечалось (см. предложение 4), эта система имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ в $E = H$, который представим в виде (17).

Теорема 4. *При выполнении условий предложения 4 найдутся числа $h > 0$, $L > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ и $\alpha < 1$ такие, что*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + c_2 G\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon}{L}}\left(\mathcal{H}(g_0)_{0,h\log_{1/\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)}\right) \tag{38}$$

для любого $\varepsilon \le \varepsilon_0$, где G – число Грасхофа, определенное в (18), а постоянная c_2 допускает ту же оценку (4)*, что и в автономном случае.*

Основная сложность при доказательстве теоремы 4 связана с получением эффективных оценок для коэффициентов $\tilde{q}_j$ (см. (27)) для неавтономной системы Навье–Стокса (8). При этом используются и обобщаются глубокие методы оценивания этих коэффициентов для автономного случая этой систем.

Следствие 4. *Если функция $g_0(s)$ является квазипериодической, у которой имеется k рационально независимых частот, то*

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + c_2 G \log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + k\log_2\left(\frac{L}{\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon \le \varepsilon_0, \\ &\mathbf{d}_F\mathcal{A} \le c_2 G + k \end{aligned} \tag{39}$$

для некоторых положительных чисел α, L и ε_0.

При $k = 0$ оценка (39) совпадает с оценкой (3) для фрактальной размерности глобального аттрактора автономной 2D системы Навье–Стокса.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналогичные результаты об оценках сверху ε-энтропии и фрактальной размерности глобальных аттракторов получены для многих классов уравнений математической физики, а именно для неавтономных систем реакции-диффузии, для уравнений Гинзбурга–Ландау, содержащих члены, зависящие от времени, а также для неавтономных диссипативных волновых уравнений (см. [12, 18, 19]). Для всех изучаемых уравнений доказаны оценки, которые явно зависят от основных параметров уравнений. Подробно изучены важные частные случаи, когда символы этих уравнений являются квазипериодическими функциями времени. Доказаны оценки сверху фрактальной размерности глобальных аттракторов таких неавтономных уравнений. Отметим, что разработанные нами методы применимы к исследованию весьма широких классов неавтономных уравнений математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах. *Успехи математических наук.* Т.14. 1959. N 2. С. 3–86. English transl.: *Selected workes of A.N.Kolmogorov*, III, Dordrecht: Kluwer, 1993.

2. Duady A., Oesterlé J. Dimension de Hausdorff des attracteurs. *C. R. Acad. Sci. Paris.* Série A. V. 290. 1980. P. 1135–1138.

3. Леонов Г.А. Формулы для ляпуновской размерности аттракторов Энона и Лоренца. *Алгебра и анализ.* Т. 13. 2001. N 3. С. 1–12. English transl.: *St.Petersburg Math.J.*, V. 13. 2002. N 2.

4. Ладыженская О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса. *Записки научного семинара ЛОМИ.* Т. 27. 1972. С. 91–115. English transl.: *J. Soviet Math.*, V. 34. 1975. P. 458–479.

5. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. *Успехи математических наук.* Т. 38. 1983. N 4. С. 133–187. English transl.: *Russian Math. Surveys*, V. 38. 1983. N 4. P. 151–213.

6. Constantin P., Foias C., Temam R. *Attractors representing turbulent flows.* Mem. Amer. Math. Soc. V. 53. 1985.

7. Hale J.K. *Asymptotic behaviour of dissipative systems.* Math. Surveys and Mon. V. 25. Providence: AMS. 1988.

8. Temam R. R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Applied Mathematics Series. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1988, 1997.

9. Бабин А.В., Вишик М.И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989. English transl.: North Holland, 1992.

10. Чуешов И.Д. *Введение в теорию бесконечномерных динамических систем*, Акта, Харьков, 1999. English translation: Acta, Kharkov, 2002; http://www.emis.de/monographs/Chueshov/.

11. Haraux A. *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications.* Paris: Masson, 1991.

12. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Attractors for equations of mathematical physics.* Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2002.

13. Ilyin A.A. On spectrum of the Stokes operator. *Functional analysis and applications.* V. 43. 2009. N 4. P. 14–25.

14. Dolbeault J., Laptev A., Loss M. Lieb–Thirring inequalities with improved constants. *J. European Math. Soc.* V. 10. 2008. N 4. P. 1121–1126.

15. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Физматгиз, 1961. English transl.: Gordon and Breach, New York, 1969.

16. Chepyzhov V.V., Ilyin A.A. On the fractal dimension estimate of invariant sets; application to Navier-Stokes equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* V.10. 2004. N.1& 2. P.117-135.

17. Чепыжов В.В. О трансляционно компактных функция. *Информационные процессы.* Т. 18. 2018. N 3. С. 149-162.

18. Вишик М.И., Чепыжов В.В. Оценки колмогоровской ε-энтропии для равномерных аттракторов неавтономных с истем реакции-диффузии. *Математический сборник.* Т.189. 1998. N 2. С. 81–110. English transl.: *Sbornik: Mathematics* V. 189. 1998. 2. P.235–263.

19. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Колмогоровская ε-энтропия в задачах о глобальных аттракторах эволюционных уравнений математической физики. *Проблемы передачи информации.* Т. 39. 2003. N 1. С.4–23. English transl.: *Problems of information transmission.* V. 39. 2003. N 1. P.2–20.

On Kolmogorov epsilon-entropy of global attractors for autonomous and non-autonomous dynamical systems

A.A.Ilyin, V.V.Chepyzhov

We have obtained upper bounds for the Kolmogorov ε-entropy and the fractal dimension for global attractors of infinite dimensional dynamical systems generated by autonomous and non-autonomous evolution equation in Hilbert spaces. As important applications of the general theorem, we have found upper estimates for the ε-entropy and the fractal dimension of global attractors for 2D Navier-Stokes systems in a bounded domain with non-slip boundary conditions. Both autonomous and non-autonomous cases of the Navier-Stokes system are considered.

KEYWORDS: epsilon-entropy, fractal dimension, non-autonomous dynamical systems, global attractors, Navier-Stokes systems.