Информационные процессы, Том 19, № 4, 2019, стр. 433–441
© *2019 Цитович.*

Численное исследование асимптотически оптимального метода последовательной проверки гипотез

И.И. Цитович[*,**]

[*] *Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия*
[**] *Научно-исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия*
Поступила в редколлегию 23.12.2019

Аннотация—В работе приводятся результаты численного моделирования асимптотически оптимальных последовательных процедур проверки гипотез. Основное внимание уделяется случаю, когда в альтернативных гипотезах находятся два и более распределений, имеющих одинаковое минимальное уклонение Кульбака–Лейблера от наблюдаемого распределения. Подтвержден теоретический результат, что в такой ситуации среднее время наблюдений существенно отличается от предположения о необходимом времени наблюдений, основанного лишь на главном члене асимптотического разложения функции риска решающего правила при стремлении ошибки в принятии решения к нулю.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: последовательная проверка гипотез, асимптотическая оптимальность, численное моделирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задаче последовательной проверки статистических гипотез в различных постановках, близких к [3]–[5], посвящена обширная литература (см., например, [6], [7]). Основное внимание уделяется построению асимптотически оптимальных стратегий при наличии малого параметра, в роли которого обычно выступает ошибка принятия неправильного решения α. Если в первых работах основное внимание уделялось задаче, обеспечивающей достижение главного члена асимптотического разложения функции риска (в рассматриваемой постановке — это средняя продолжительность наблюдений до принятия решения), то в последнее время главное внимание уделяется процедурам более высокого порядка эффективности ([8]–[18]). Это связано с тем обстоятельством, что имеется широкий класс процедур, которые обеспечивают достижение главного члена асимптотики, однако для практических задач они дают существенно разные значения для функции риска, поэтому представляется важным выяснить причины возникновения этих различий. Кроме того, в некоторых случаях не асимптотически оптимальные решения могли быть более эффективными ([19]). Поэтому важно понять какие свойства распределений, задающих проверяемые гипотезы, влияют на среднюю продолжительность наблюдений таким образом, что главный член асимптотического разложения функции риска может давать не определяющий вклад в итоговое значение функции риска. Численному анализу некоторых принципиальных ситуаций и посвящена эта работа.

В работах [20] и [8] были предприняты попытки получить уточнение функции риска. В [20] была получена нижняя граница для средней продолжительности наблюдений $\mathbf{E}_\theta\tau$ в терминах решения некоторой задачи линейного программирования. Анализ решения этой задачи показывает, что

$$\mathbf{E}_\theta\tau \geq I(\theta)^{-1}|\ln(\alpha)| + C|\ln(\alpha)|^{1/2} + o(|\ln(\alpha)|^{1/2}), \tag{1}$$

где $I(\theta)$ — информационное количество, характеризующее "расстояние" от параметра θ (характеризующего гипотезы) до конкурирующих гипотез при использовании асимптотически оптимального управления, причем $C \geq 0$. В [8] была построена процедура управления наблюдениями, для которой при выполнении некоторых достаточно общих условий выполнялось неравенство

$$\mathbf{E}_\theta \tau \leq I(\theta)^{-1}|\ln(\alpha)| + O(\ln|\ln(\alpha)|).$$

Этот факт говорит о том, что величина C может обратиться в 0. Для получения более точных результатов важно получить оценку остаточного члена вида $O(1)$ В связи с этим можно предложить следующее представление для функции риска

$$\mathbf{E}_\theta \tau = R_0(\theta) + R_1(\theta) + K,$$

где $R_0(\theta) = I(\theta)^{-1}|\ln(\alpha)|$ — главный член асимптотического разложения функции риска, $R_1(\theta) = o(R_0(\theta))$ — дополнительный член асимптотического разложения функции риска и K — остаточный член асимптотического разложения функции риска. В анализируемых в работе случаях $R_1(\theta) = O(|\ln(\alpha)|^{1/2})$, а K является, как правило, ограниченной величиной.

Оказывается (см. [20]), что для построения стратегий, отличающихся от оптимальных на ограниченную величину, можно ограничиться лишь процедурами, правило остановки которых следующее: необходимо, чтобы отношение правдоподобия для истинного значения параметра θ превзошло заданный уровень при всех альтернативных значениях параметра. Этот принцип гораздо проще задачи поиска оптимального решающего правила δ, основанного на применении динамического программирования (см., например, [6]). Вместе с тем, оказалось, что при наличии двух или более распределений у альтернативных гипотез, имеющих одинаковое минимальное удаление от распределения, задающего гипотезу H_0, $R_1(\theta) = C|\ln(\alpha)|^{1/2}$, причем $C > 0$, а если такое распределение одно, то $C = 0$. Кроме того, влияние на $R_1(\theta)$ оказывает величина перескока заданного уровня, которая будет ограниченной при наличии второго момента у отношения правдоподобия [21].

Асимптотические свойства последовательной проверки гипотез и анализируются в настоящей работе с помощью численного моделирования некоторых принципиальных ситуаций. В разделе 2 рассматривается классическая модель для нормальных распределений в ситуации, когда имеются два распределения, одинаково удаленные от распределения, задающего гипотезу H_0. Для демонстрации обнаруженного эффекта, но уже в практически значимой области изменения вероятности ошибки решающего правила α, в разделе 3 приведены результаты моделирования, когда наблюдения формируются дискретными распределениями, сосредоточенными в трех точках. Оказывается, что таких простых распределений достаточно, чтобы проиллюстрировать эффект влияния одинаково близких альтернативных распределений на среднюю продолжительность процедуры последовательной проверки гипотез. Далее рассматривается случай непрерывных распределений, когда распределение, задающее гипотезу H_0, имеет тяжелые хвосты. Для этого случая рассмотрены две ситуации: когда отношение правдоподобия имеет второй момент, т.е. согласно [15] имеет ограниченный остаточный член, и когда отношение правдоподобия не обладает вторым моментом, и показано существенное отличие в поведении среднего времени наблюдений в этих ситуациях.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В этом разделе рассмотрена классическая модель для нормальных распределений в ситуации, когда имеются два распределения, одинаково удаленные от распределения, задающего гипотезу H_0:

$$H_0: \ p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$H_1: \ p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$H_2: \ p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2\sigma^2}\right).$$

В этом случае информационные уклонения Кульбака–Лейблера

$$I_{01} = I_{02} = \sigma^{-2}/2; \ I_{10} = I_{20} = \sigma^{-2}/2, \ I_{12} = I_{21} = 2\sigma^{-2}.$$

Асимптотически оптимальная последовательная проверка гипотез имеет следующий вид [10]. На основании данных наблюдений $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ вычисляются статистики:

$$L_{01}(n) = \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}(0.5 - x_i), \ L_{02}(n) = \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}(0.5 + x_i), \ L_{12}(n) = 2\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$L_{10}(n) = -L_{01}(n), \ L_{02}(n) = -L_{02}(n), \ L_{21}(n) = -L_{12}(n),$$

$$L_0(n) = \min\{L_{01}(n), L_{02}(n)\}, \ L_1(n) = \min\{L_{10}(n), L_{12}(n)\}, \ L_2(n) = \min\{L_{20}(n), L_{21}(n)\}.$$

Если

$$L(n) = \max\{L_0(n), L_1(n), L_2(n)\} \tag{2}$$

впервые превзойдет уровень $-\log(\alpha/2)$, то наблюдения завершаются,

$$\tau = n, \ \delta = i,$$

где i — номер статистики в (2), на которой достигается максимум (поскольку только одна из статистик является положительной, то значение i определяется однозначно).

В рассматриваемом случае главный член асимптотического разложения для среднего времени наблюдений $R_0(i)$, где i — номер гипотезы, имеет вид:

$$R_0(0) = -\log(\alpha/2)I_{01}^{-1}, \ R_0(1) = R_0(2) = -\log(\alpha/2)I_{10}^{-1}, \tag{3}$$

и как следует из [13], нижняя граница для среднего числа наблюдений имеет вид:

$$\mathbf{E}_0\tau \geq R_0(0) + \sqrt{\frac{-2\log(\alpha/2)}{\pi}} + O(1), \tag{4}$$

$$\mathbf{E}_i\tau \geq R_0(i) + O(1), \ i = 1, 2. \tag{5}$$

В качестве показателя эффективности стратегии проверки гипотез рассмотрим величину

$$\mathcal{E}_i = \frac{\mathbf{E}_i\tau}{R_0(i)}, \ i = 0, 1, 2, \tag{6}$$

которая показывает насколько требуемое среднее число наблюдений отличается от классической нижней границы ((1) при $C = 0$). Следовательно,

$$\mathcal{E}_i = 1 + O\left(\frac{1}{|\log(\alpha)|}\right), \ i = 1, 2, \tag{7}$$

$$\mathcal{E}_0 = 1 + \frac{1}{2\sigma^2}\sqrt{\frac{2}{|\log(\alpha/2)|\pi}} + O\left(\frac{1}{|\log(\alpha)|}\right). \qquad (8)$$

Из (3), (5), (6) и (7) следует, что

$$\mathcal{E}_i \to 1 \text{ при } \alpha \to 0$$

для всех i, однако из (8) следует, что

$$\mathcal{E}_0 \to \infty \text{ при } \sigma \to 0$$

при фиксированном α. Последнее обстоятельство показывает наличие эффекта: фактическое среднее время наблюдений может существенно отличаться от прогнозируемого лишь на основании главного члена асимптотического разложения для функции риска.

Важно отметить, что в рассматриваемом примере этот эффект не наблюдается в практически значимой области изменения параметров модели. Связано это с тем обстоятельством, что величина $\mathbf{E}_0\tau$ должна быть большой, и уж во всяком случае больше 1. Для того чтобы обеспечить это условие при малых σ величина α должна быть чрезвычайно близка к 0. Например, при $\sigma = 0.2$ для обеспечения условия $\mathbf{E}_0\tau \approx 2$ $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}$. Из (8) в этом случае получаем $\mathcal{E}_0 \approx 2$.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что в случае нормального распределения результатов наблюдений эффект влияния наличия двух одинаково близких альтернативных распределений на эффективность асимптотически оптимального правила проверки гипотез теоретически присутствует, но не может наблюдаться в практически значимой области изменения вероятности ошибки решающего правила.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Для анализа эффектов, связанных с существенным различием между $\mathbf{E}_i\tau$ и $R_0(i)$ рассмотрим следующий тестовый пример: мера $\mathbf{P}_0$ сосредоточена в точках -1, 0 и 1 с весами 1/3, $\mathbf{P}_1$ сосредоточена в этих же точках с весами p, q и $1-p-q$ соответственно, а $\mathbf{P}_2$ сосредоточена в этих же точках с весами $1-p-q$, q и p соответственно, причем $p \ll q \ll 1$. В этом случае

$$I_{01} = I_{02} = -\frac{\log(pq(1-p-q))}{3} - \log(3),$$

$$I_{10} = I_{20} = p\log(p) + q\log(q) + (1-p-q)\log(1-p-q) + \log(3),$$

$$I_{12} = I_{21} = (1-2p-q)\log\left(\frac{1-p-q}{p}\right).$$

Поэтому

$$\mathcal{E}_0 = 1 + \sqrt{\frac{2D^2 I_{01}}{|\log(\alpha/2)|\pi}} + O\left(\frac{1}{|\log(\alpha)|}\right), \qquad (9)$$

где

$$D^2 = (1-q)\log^2\left(\frac{1-p-q}{p}\right). \qquad (10)$$

Если, например, $p = q^2$ и $q \to 0$, то

$$I_{01} = I_{02} \approx -\log(3q), D \approx -2\log(q)$$

и

$$R_0(0) \approx \frac{\log(\alpha)}{\log(q)},\ \mathcal{E}_0 \approx 1 - 2\log(q)\sqrt{\frac{2\log(q)}{\pi\log(\alpha/2)}}.$$

Если положить $q = \alpha^m$, то

$$R_0(0) \approx \frac{1}{m},\ \mathcal{E}_0 \approx 1 - 2m\log(\alpha)\sqrt{\frac{2m}{\pi}},$$

т.е. $\mathcal{E}_0 \to \infty$ при $\alpha \to 0$. Например, при $m = 0.5$ $R_0(0) \approx 2$, $\mathcal{E}_0 \approx 1 - \frac{\log(\alpha)}{\sqrt{\pi}}$ и для $\alpha = 0.01$ $\mathcal{E}_0 \approx 2.1$. Таким образом превышение ожидаемого числа наблюдений для принятия решения в 2 раза из-за наличия двух одинаково близких распределений будет возможным уже при заданной ошибке решения порядка 1%, т.е. обнаружение эффекта влияния наличия двух одинаково близких альтернативных распределений на эффективность асимптотически оптимального правила проверки гипотез возможно в практически значимой области изменения параметра α.

Наличие трех типов вероятностей позволяет обнаружить указанный эффект: малость величины q позволяет получить большое значение информационного уклонения I_{01}, а малость величины p по сравнению с q позволяет получить большое значение величины D.

Некоторые численные результаты приведена в табл. 1 в предположении, что справедлива гипотеза H_0, т.е. во всех наблюдениях моделируется распределение по мере $\mathbf{P}_0$. Здесь помимо уже введенных обозначений приведена величина $R_0(0)+R_1(0)$ — предполагаемая средняя длительность наблюдений с учетом второго члена асимптотического разложения функции риска, а также $\overline{\alpha}$ — средне значение количества процедур наблюдений, когда была отвергнута правильная гипотеза H_0, $\overline{\tau}$ — средняя продолжительность наблюдений для принятия решения по результатам моделирования, $\overline{K}$ — среднее значение превышения числа наблюдений предполагаемого значения, т.е. $\overline{K} = \overline{\tau} - (R_0(0) + R_1(0))$. Результаты получены на основании 10000 попыток независимого моделирования наблюдений.

Таблица 1. Результаты численного моделирования для тестового примера.

N	α	p	q	$R_0(0)$	$R_0(0)+R_1(0)$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\tau}$	$\overline{K}$	$\mathcal{E}_0$
1	0.01	0.0183	0.135	5.54	9.70	0.0066	11.41	1.71	1.75
2	0.01	0.0009	0.030	2.20	4.77	0.0095	8.93	4.15	2.18
3	0.001	0.0183	0.135	7.94	12.74	0.0004	14.98	2.21	1.61
4	0.001	0.0009	0.030	3.15	6.07	0.0008	11.21	5.14	1.92
5	0.001	0.00012	0.011	2.23	4.58	0.00097	10.98	6.40	2.05
6	0.0001	0.0183	0.135	10.35	15.91	0.00009	18.38	2.47	1.54
7	0.0001	0.0009	0.030	4.11	7.09	0.00006	13.31	6.22	1.73
8	0.0001	0.00012	0.011	2.91	5.17	0.00002	12.89	7.73	1.78

Представленные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. используемое асимптотически оптимальное правило принятия решений обеспечивает заданное качество решения, поскольку всегда $\overline{\alpha} < \alpha$;

2. величина $\overline{K}$ является устойчивой при изменении α;

3. величина $\mathcal{E}_0$ может существенно превосходить значение 1, однако с убыванием α она так же убывает;

4. величина $\overline{K}$ существенно зависит от значения D, которое согласно (10) зависит от p и q.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ПРИ НАЛИЧИИ ТЯЖЕЛЫХ ХВОСТОВ У РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Далее рассматривается пример с тяжелыми хвостами у распределений для обнаружения эффекта влияния наличия двух одинаково близких альтернативных распределений на эффективность асимптотически оптимального правила проверки гипотез в практически значимой области изменения параметра α:

$$H_0:\ p_0(x) = \frac{\beta}{2}(1+|x|)^{-\beta-1},\ \beta > 0,$$

$$H_1:\ p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$H_2:\ p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x+a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Представленные распределения являются в некотором смысле непрерывными аналогами рассмотренных в предыдущем разделе дискретных распределений: выбирая $a \gg 1$ и $\sigma \approx 0$ можно добиться малых значений аналогов p и q как в предыдущем разделе.

На основании данных наблюдений $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ вычисляются статистики:

$$L_{01}(n) = \log\left(\frac{\sqrt{2\pi}\sigma\beta}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(-(\beta+1)\log(1+|x_i|) + \frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$L_{02}(n) = \log\left(\frac{\sqrt{2\pi}\sigma\beta}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(-(\beta+1)\log(1+|x_i|) + \frac{(x_i+a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$L_{12}(n) = 2a\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

остальные статистики получаются из приведенных выше как и в предыдущем случае. В этом случае

$$I_{01} = I_{02} = \log\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\beta\right) + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{2\sigma^2}\left(a^2 + \frac{2}{\beta^2-3\beta+2}\right).$$

Поскольку

$$L_{01}(n) - L_{02}(n) = L_{12}(n),$$

то (4) принимает вид

$$\mathbf{E}_0\tau \geq \frac{-\log(\alpha/2)}{I_{01}} + \sqrt{\frac{-2\log(\alpha/2)}{\pi}} + O(1), \tag{11}$$

В табл. 2 приведены результаты численного моделирования при различных значениях β и α. Они показывают, что реальное превышение среднего числа наблюдений примерно в 2 раза больше, чем предполагаемое на основании главного члена асимптотического разложения и в целом соответствуют результатам табл. 1.

Таблица 2. Результаты численного моделирования для примера с тяжелыми хвостами.

β	α	I_{01}	$\overline{I_{01}}$	$R_0(0)$	$R_0(0)+R_1(0)$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\tau}$	$\overline{K}$	$\mathcal{E}_0$
3	0.01	2.49	2.47	2.15	5.94	0.0000	5.02	−0.92	2.33
4	0.01	2.53	2.53	2.09	3.22	0.0000	4.12	0.90	1.97
3	0.001	2.49	2.47	3.14	6.27	0.0000	6.68	0.41	2.13
4	0.001	2.53	2.53	3.02	4.34	0.0000	5.45	1.11	1.80
3	0.0001	2.49	2.47	4.13	7.07	0.0000	8.31	1.24	2.01
4	0.0001	2.53	2.53	3.92	5.59	0.0000	6..84	1.26	1.74

Далее приведены результаты численного моделирования при малых значениях β. Вероятностное распределение будет при $\beta > 0$. При $0 < \beta < 2$ $I_{01} = \infty$, поэтому в табл. 3 приведены результаты моделирования при значениях β, когда у I_{01} есть первый момент, но отсутствует второй. В этом случае не работает формула (11), что приводит к парадоксальным результатам, приведенным в табл.3. Здесь дополнительно рассматривается параметр $\overline{I_{01}}$, который показывает наблюдаемое значение величины I_{01} по результатам наблюдений. В предыдущем случае такая необходимость отсутствовала, поскольку $\overline{I_{01}} \approx I_{01}$. Теперь же из-за отсутствия второго момента у I_{01} соответствующий интеграл при вычислении I_{01} медленно сходится, поэтому его фактическое значение в экспериментах может существенно отличаться от теоретического. При вычислении предполагаемого числа наблюдений $R_0(0)$ и $R_0(0)+R_1(0)$ использовалось наблюдаемое значение $\overline{I_{01}}$, поскольку при использовании I_{01} значение $R_0(0)$ будет сильно занижено.

Таблица 3. Результаты численного моделирования для примера с тяжелыми хвостами при отсутствии второго момента у L_{01} и L_{02}.

β	α	I_{01}	$\overline{I_{01}}$	$R_0(0)$	$R_0(0)+R_1(0)$	$\overline{\alpha}$	$\overline{\tau}$	$\overline{K}$	$\mathcal{E}_0$
2.01	0.01	100.4	5.66	0.94	61.14	0.0000	6.30	−54.85	6.73
2.26	0.01	4.65	3.35	1.58	27.60	0.0000	5.98	−21.63	3.77
2.01	0.001	100.4	5.66	1.34	73.46	0.0000	8.15	−65.30	6.07
2.26	0.001	4.65	3.35	2.32	61.85	0.0000	7.88	−53.97	3.41
2.01	0.0001	100.4	5.66	1.75	84.06	0.0000	9.92	−74.14	5.67
2.26	0.0001	4.65	3.35	2.24	103.32	0.0000	9.84	−93.70	4.29

Приведенные в табл. 3 результаты показывают, что асимптотически оптимальные методы последовательной проверки гипотез обеспечивают заданные параметры качества решения, но фактическое среднее число наблюдений существенно отличается о предполагаемого их числа, вычисленного лишь на основании главного члена асимптотического разложения, даже при использовании фактического значения I_{01}. Значения величины $\mathcal{E}_0$ оказываются в этом случае значительно больше, чем аналогичные значения в таб. 2. Поскольку в рассматриваемом случае формула (11) неприменима, то значение величины $\overline{K}$ существенно отличается от 0 и применение этой формулы будет давать существенно завышенное значение ожидаемого числа наблюдений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные численные результаты подтвердили теоретические выводы об асимптотической оптимальности предложенных в [12, 13] методов последовательной проверки гипотез.

Если не принимать во внимание второй член асимптотического разложения для средней продолжительности наблюдений при планировании необходимого числа наблюдений, то это может привести к занижению в 2 и более раз предполагаемого числа наблюдений при наличии двух и более распределений в альтернативных гипотезах, имеющих одинаковое минимальное уклонение Кульбака–Лейблера от наблюдаемого распределения.

В случае нормального распределения результатов наблюдений эффект влияния наличия двух одинаково близких альтернативных распределений на эффективность асимптотически оптимального правила проверки гипотез теоретически присутствует, но не может наблюдаться в практически значимой области изменения вероятности ошибки решающего правила.

Приведенные результаты показывают, что значение величины K зависит от большого числа факторов, поэтому реальное ее значение может изменяться существенным образом в зависимости от условий проведения наблюдений. Это обстоятельство является одним из факторов, влияющих на свойства асимптотически оптимальных решающих правил при их практическом использовании.

При нарушении условия существования второго момента у отношения правдоподобия теряются свойства робастности оценки среднего числа наблюдений и в этом случае рекомендуется использовать редукцию статистической модели [16, 17] и использовать субоптимальные статистические решения [14, 18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wald, A., Sequential Tests of Statistical Hypotheses. *Ann. Math. Statist.,* 1945, vol. 16, no. 2, pp. 117–186.
2. Wald, A., Wolfowitz, J. Optimum Character of the Sequential Probability Ratio Test. *Ann. Math. Statist.,* 1948, vol. 19, no. 3, pp. 326–339.
3. Chernoff, H., Sequential design of experiments. *Ann. Math. Statist.,* 1959, vol. 30, no. 3, pp. 755–770.
4. Albert, A.E., Sequential design of experiments for infinitely many states of nature. *Ann. Math. Statist.,* 1959, vol. 30, no. 3, pp. 774–799.
5. Kiefer, J., Sacks, J., Asymptotically optimal sequential inference and design. *Ann. Math. Statist.,* 1963, vol.34, no. 3, pp. 705–750.
6. Bechhorer, R.E., Kiefer, J., Sobel, M., *Sequential Identification and Ranking Procedures.* Chicago: Univ. Chicago Press, 1968.
7. Chernoff, H., *Sequential analyses and optimal design.* Philadelphia: SIAM, 1972.
8. Цитович, И.И., О последовательном планировании экспериментов для различения гипотез. *Теория вероятн. и ее примен.,* 1984, т. 29, 4, стр. 778–781.
9. Цитович, И.И., Последовательное планирование экспериментов и проверка сложных гипотез. В: *Модели и методы информационных систем,* М.:Наука, 1990, стр. 36–48.
10. Цитович, И.И., *Последовательное планирование экспериментов и проверка гипотез.* Дисс. на соиск. уч. ст. док. физ.-мат. наук, М: Институт проблемы передачи информации РАН, 1993.
11. Malyutov, M.B., Tsitovich, I.I., Second Order asymptotically optimal sequential model choice. In: *Inernational Conference <Distributed computer communication networks. Theory and Applications>,* Tel-Aviv, 1999, pp. 94–98.
12. Малютов, М.Б., Цитович, И.И., Асимптотически последовательная проверка гипотез. *Проблемы передачи информации,* 2000, т. 36, 4, стр. 98–112.
13. Malyutov, M.B., Tsitovich, I.I., Second Order Optimal Tests. In: *Proceedings of International Workshop Optimal Design,* Cardiff. UK, 2000, pp. 67–78.
14. Цитович, Ф.И., Свойства субоптимальных последовательных правил проверки непараметрических гипотез о распределениях с экспоненциально убывающими хвостами. *Информационные процессы,* 2010, т. 10, 2. стр. 181–196.

15. Malyutov, M.B., Tsitovich, I.I., Second Order Optimal Sequential Model Choice and Change-point Detection. *Information Processes,* 2010, vol. 10, 3, pp. 275–291.

16. Tsitovich, F., Tsitovich, I., Sub-Optimal Nonparametric Hypotheses Discriminating with Guaranteed Decision. *International Journal Information Models and Analyses,* 2013, vol. 2, no. 1, pp. 62–69.

17. Tsitovich, F., Tsitovich, I., Sample space reducing for statistical decision effectiveness increasing. In: *6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, 2015, pp. 501–506.

18. Tsitovich, I., On Robust Sequential Parameters Estimating. *Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications*, Berlin: Springer-Verlag. Lecture Notes in Computer Science, 2017, vol. 10684, pp. 509–522.

19. Meeter, P., Pirie, W., Blot, W., A comparison of two model-descrimination criteria. *Technometrics*, 1970, vol.12, pp. 457–470.

20. Keener, R., Second order efficiency in the sequential design of experiments. *Ann. Statist.,* 1984, vol.12, no. 2, pp. 510–532.

21. Цитович, И.И., О величине перескока уровня субмартингалом. *Модели и методы исследований в системах информатики.* М.: Наука, 1988. С. 91–105.

Numerical study of the asymptomatically optimal method of the sequential hypothesis testing

I. I. Tsitovich

The work provides the results of numerical modeling of the asymptotically optimal sequential procedures for hypothesis testing. We focus on the case where alternative hypotheses contain two or more distributions that have the same minimal Kullback-Leibler divergence from the observed distribution. It is confirmed the theoretical result that in such situation the mean time of observations differs significantly from the assumpting time of observations based only on the main member of the asymptomatic decomposition risk function when the decision error tends to zero.

KEYWORDS: sequential hypothesis testing, asymptomatical optimality, numerical modeling.