

Оценка пропускной способности многопользовательского векторного дизъюнктивного канала для произвольных входных распределений¹

В.С. Дыренков**, Н.М. Шевель**, Ф.И. Иванов*,**, А.А. Крещук*,**

* Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия

** Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 15.06.2020

Аннотация—В данной работе рассмотрен векторный дизъюнктивный канал, в котором пользователи передают некоторые последовательности из L битов. Для данной модели канала оценивается его пропускная способность и выводится нижняя граница этой величины. Кроме того, нижняя граница рассчитывается как для случая распределения Бернулли, так и для произвольного распределения для случая, когда $L = 2$. Численно показано, что при $L = 2$ и кратности возникшей коллизии $t = 1$ распределение Бернулли является оптимальным, т. е. максимизирует пропускную способность векторного дизъюнктивного канала.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Векторный дизъюнктивный канал, пропускная способность, дискретная случайная величина

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из ключевых особенностей беспроводных сетей является очень быстрое увеличение числа активных пользователей в системе, что вызвано активным развитием концепций интернета вещей и умного дома. Ввиду этого взаимное влияние пользователей друг на друга становится все более ощутимым. В то же время требования, которые предъявляются к скорости и надежности передачи данных, становятся все более жесткими.

В связи с вышесказанным, требуется, чтобы очень большое число пользователей могли вести некоординированную передачу в беспроводных сетях. Среди общего числа пользователей можно выделить подмножество из U пользователей, которые активны в данный момент времени, при этом каждый из них ведет передачу коротких пакетов информации на базовую станцию. При этом задача базовой станции заключается только в восстановлении списка сообщений, которые были на нее переданы. При этом не происходит идентификация пользователя, который передал конкретное сообщение. Некоординированный способ передачи, а также короткая длина передаваемых сообщений существенно влияют на методы построения сигнально-кодовых конструкций, которые были бы практически применимыми в данных условиях.

Практически все широко известные сигнально-кодовые конструкции, которые используются в классических многопользовательских каналах, например системы на основе кодового разделения (CDMA), разделения скоростей [1], перемежения [2], предполагают координирование передачи между пользователями. Кроме того, параметры таких схем, такие как разделяющая последовательность, кодовые скорости, графы Таннера кодов и т. д., зависят от числа пользователей в системе.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 18-37-00322 и совета по грантам Президента РФ МК-1248.2020.9

В данной работе рассматривается конструкция кодов для многопользовательского векторного дизъюнктивного канала, который был предложен Кохеном, Хеллером и Витерби в [3]. Данный канал является обобщением A -канала [4]–[6].

Данный канал уже рассматривался в работах [7], [8], где для разрешения коллизий, возникающих при передаче предлагалось использовать перемеженные коды БЧХ и Рида–Соломона, а также в работах [9] и [10], где исследовалась пропускная способность данного класса каналов.

Данная работа базируется на результатах, полученных преимущественно в [10], где для оценки пропускной способности были использованы специфические свойства матрицы переходных вероятностей данного класса каналов, а именно возможность ее представления через кронекеровское произведение матрицы переходных вероятностей для канала с $l = 1$ на матрицу переходных вероятностей вероятностей канала с $l' = L - 1$. Однако в [10] для оценки пропускной способности множество входных распределений было сужено до рассмотрения только распределений Бернулли с различными значениями параметра p . В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда $L = 2$, а множество входных распределений является произвольным.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ КАНАЛА

Рассмотрим векторный дизъюнктивный канал, который состоит из $Q > 1$ независимых подканалов (частот), которые мы будем называть элементарными подканалами. Предположим, что имеется $U > 0$ пользователей, которые используют канал для передачи. Предположим, что $Q = LS$, т. е. многопользовательский канал разделен на S независимых каналов, каждый из которых состоит из L элементарных подканалов. Мы будем называть такие «обобщенные» независимые каналы L -каналами или слотами. В некоторый момент времени τ каждый i -ый пользователь выбирает произвольный j -ый L -канал ($1 \leq j \leq \frac{Q}{L}$) и передает в нем блок из L бит. На приемнике для каждого подканала происходит дизъюнкция всех переданных в нем данных.

Например, рассмотрим случай передачи двух пользователей i и k , которые выбрали общий слот для передачи в j момент времени.

Предположим, что пользователи i и k передают двоичные векторы длины L :

$$\mathbf{X}_{ij} = (x_{ij}^{(1)}, x_{ij}^{(2)}, \dots, x_{ij}^{(L)}),$$

и

$$\mathbf{X}_{kj} = (x_{kj}^{(1)}, x_{kj}^{(2)}, \dots, x_{kj}^{(L)})$$

соответственно в одном и том же слоте. Ввиду того, что канал является дизъюнктивным, то в общем слоте на приемник придет $\mathbf{X}_{ij} \vee \mathbf{X}_{kj}$.

Например, если $L = 3$ и два пользователя выбрали некоторый общий слот для передачи, то в случае, если первый пользователь передавал вектор $(0, 1, 0)$ а второй – $(0, 1, 1)$, то на приемнике в данном слоте будет наблюдаться $(0, 1, 1)$.

Очевидно, что максимальное число пользователей, которые могут передавать ортогонально в данных условиях, равно S .

2.1. Модель коллизии

Коллизии в описанной модели передачи могут иметь место в том случае, когда два или более пользователей выбирают для передачи один и тот же L -канал в один момент времени. Очевидно, что вероятность P_s такого события может быть вычислена как:

$$P_s = 1 - \left(1 - \frac{1}{S}\right)^{U-1}.$$

В данной работе мы рассматриваем бесшумный канал и некоординированную передачу. Поэтому для заданного пользователя передача остальных $U - 1$ пользователей будет рассматриваться как шум (источник коллизий).

Обозначим через κ случайную величину – порядок (кратность) коллизии. Данная величина может быть рассмотрена как количество активных пользователей, которые выбрали заданный j -ый L -канал, в котором ведет передачу пользователь. Очевидно, что $0 \leq \kappa \leq U - 1$. Кроме того, легко посчитать вероятность события $\kappa = t$ (построить распределение случайной величины κ):

$$P(\kappa = t) = \binom{U-1}{t} \left(\frac{1}{S}\right)^t \left(1 - \frac{1}{S}\right)^{U-t-1}.$$

В самом деле, ввиду того, что каждый из $U - 1$ пользователей независимо и равновероятно (с вероятностью $\frac{1}{S}$) выбирает фиксированный L -канал для передачи, то t пользователей выберут один и тот же канал с вероятностью $\left(\frac{1}{S}\right)^t \binom{U-1}{t}$. Остальные $U - 1 - t$ пользователей могут выбрать любой из оставшихся $S - 1$ L -каналов. Вероятность такого события равна $\left(1 - \frac{1}{S}\right)^{U-t-1}$.

Легко заметить, что

$$P_s = P(\kappa \geq 1) = \sum_{t=1}^{U-1} P(\kappa = t).$$

В некоторых случаях передача других пользователей в том же слоте, где ведет передачу заданный пользователь, не приводит к коллизии (с точки зрения данного пользователя). Например, если пользователь передает $(1, 1, \dots, 1)$, то такая информация будет принята корректно вне зависимости от того, что передают другие пользователи в этом же слоте. В самом общем случае для i -ого пользователя на приемнике не будет наблюдаться коллизия в том и только том случае, когда вектор передаваемый им двоичный вектор покрывает векторы всех остальных пользователей, выбравших тот же слот для передачи.

Зависимость между конфигурацией вектора и вероятностью его искажения при наступлении коллизии подробно рассматривается в следующем разделе.

3. ОЦЕНКА ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ КАНАЛА

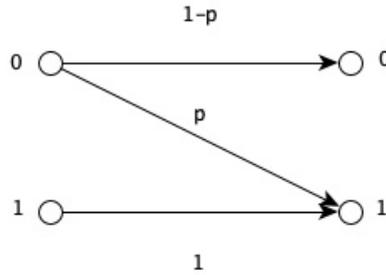
Теперь поставим вопрос оценки пропускной способности данного канала для заданных величин L и t . В дальнейших рассуждениях мы будем придерживаться терминологии и подходов, предложенных в [10].

Вначале рассмотрим простейший случай, когда $L = 1$ и $t = 1$. Обозначим полученный канал через \mathcal{C}_1^1 . Если p есть вероятность передать 1, то \mathcal{C}_1^1 представляет из себя простейший Z -канал:

Матрица переходных вероятностей для \mathcal{C}_1^1 имеет вид:

$$\mathbf{P}_1^1 = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathcal{C}_1^1 : \{0, 1\} \mapsto \{0, 1\}$ и входные вероятности $p_{in}(x)$ определяются как: $p_{in}(0) = 1 - p$, $p_{in}(1) = p$, то легко вычислить вероятности на выходе из канала $p_{out}(y)$: $p_{out}(0) = (1 - p)^2$, $p_{out}(1) = p(2 - p)$.

Рис. 1. Z-канал для $L = 1$ и $t = 1$.

Таким образом, пропускную способность C канала \mathcal{C}_1^1 можно оценить снизу как:

$$\begin{aligned}
 C(\mathcal{C}_1^1) &= \sup_{p_{in}(x)} \sum_{x \in \{0,1\}} p_{in}(x) \sum_{y \in \{0,1\}} p(y|x) \log_2 \frac{p(y|x)}{p_{out}(y)} = \\
 &= \max_p (1-p)^2 \log_2 \frac{1}{1-p} + p(2-p) \log_2 \frac{1}{2-p} + p \log_2 \frac{1}{p}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

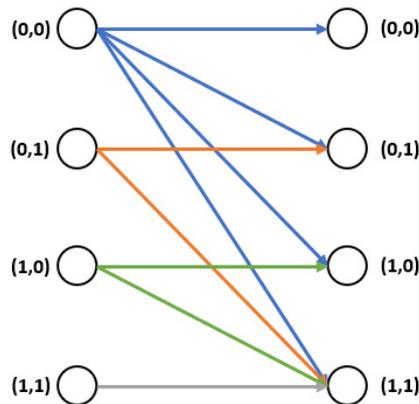
Кроме того, мы предполагаем, что если $t = 0$ то $C(\mathcal{C}_1^0) = h(p)$, где $h(\cdot)$ — двоичная энтропия.

На самом деле следует отметить, что при $L = 1$ формула (1) является точной (является точным значением пропускной способности) в случае, если распределение символов на входе канала является распределением Бернулли. Это следует из того, что любую дискретную случайную величину, принимающую только 2 значения можно описать распределением Бернулли.

Очевидно, что уже для случая, когда $L = 2$ (то есть канал имеет 4 входа и 4 выхода) это уже не так. Далее мы представим оценку на пропускную способность для случая распределения Бернулли и для наиболее общего случая произвольного распределения и сравним полученные оценки.

3.1. Случай распределения Бернулли

Рассмотрим случай, когда $L = 2$ и $t = 1$. Обозначим этот канал как \mathcal{C}_2^1 . Графическая иллюстрация данного канала представлена на рис. 2

Рис. 2. Канал \mathcal{C}_2^1

Будем оценивать пропускную способность канала \mathcal{C}_2^1 .

Для начала вновь ограничимся случаем распределения Бернулли на входном алфавите. Если $p_{in}(0) = 1 - p$, $p_{in}(1) = p$ то легко рассчитать вероятности появления векторов $(0, 0)$, ..., $(1, 1)$ на входе в канал:

$$\begin{aligned} p_{in}((0, 0)) &= (1 - p)^2 \\ p_{in}((0, 1)) &= p_{in}((1, 0)) = p(1 - p) \\ p_{in}((1, 1)) &= p^2. \end{aligned}$$

Матрица переходных вероятностей для \mathcal{C}_2^1 имеет вид:

$$\mathbf{P}_2^1 = \begin{pmatrix} (1-p)^2 & p(1-p) & p(1-p) & p^2 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что

$$\mathbf{P}_2^1 = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\otimes 2} = (\mathbf{P}_1^1)^{\otimes 2},$$

где $\mathbf{A}^{\otimes k}$ обозначает k -ую кронекеровскую степень матрицы \mathbf{A} .

Для расчета пропускной способности канала \mathcal{C}_2^1 вычислим выходные вероятности векторов $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} p_{out}((0, 0)) &= (1 - p)^4 \\ p_{out}((0, 1)) &= p_{out}((1, 0)) = p(2 - p)(1 - p)^2 \\ p_{out}((1, 1)) &= p^2(2 - p)^2. \end{aligned}$$

Тогда применяя формулу, аналогичную (1) для $C(\mathcal{C}_2^1)$ с входными/выходными алфавитами $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ получим:

$$\begin{aligned} C(\mathcal{C}_1^2) &\geq \max_p (1-p)^4 \log_2 \frac{1}{(1-p)^2} + p(1-p)^3 \log_2 \frac{1}{(1-p)(2-p)} + \\ &+ p(1-p)^2 \log_2 \frac{1}{p(1-p)(2-p)} + p(1-p)^3 \log_2 \frac{1}{(1-p)(2-p)} + \\ &+ p^2(1-p)^2 \log_2 \frac{1}{(2-p)^2} + p^2(1-p) \log_2 \frac{1}{p(2-p)^2} + \\ &+ p(1-p)^2 \log_2 \frac{1}{p(1-p)(2-p)} + p^2(1-p) \log_2 \frac{1}{p(2-p)^2} + \\ &+ p^2 \log_2 \frac{1}{p^2(2-p)^2}. \end{aligned}$$

После некоторых вычислений данную формулу можно привести к виду:

$$C(\mathcal{C}_1^2) = 2C(\mathcal{C}_1^1). \quad (2)$$

Зависимость между p и $C(\mathcal{C}_2^1)$ представлена на рис.3

Как видно из рис. 3 функция $C(\mathcal{C}_2^1)$ имеет единственный максимум $\max C(\mathcal{C}_2^1) \approx 0.7664$, который достигается при $p \approx 0.288$.

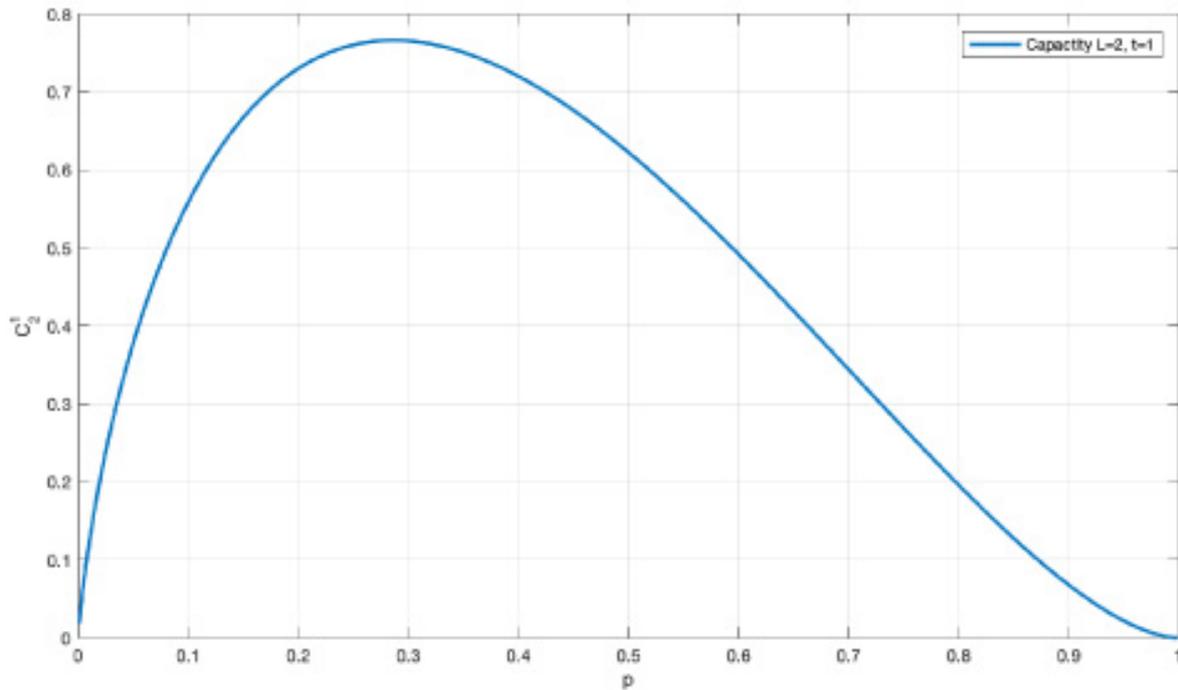


Рис. 3. Зависимость $C(C_2^1)$ от p

4. ПРОИЗВОЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Теперь исследуем, насколько ухудшает истинную оценку пропускной способности рассмотрение только класса распределений Бернулли. Для этого рассмотрим аналогичную модель канала ($L = 2, t = 1$) однако вместо распределения Бернулли, рассмотрим произвольное дискретное распределение на входе, то есть

$$\vec{p}_{in} = (p_0, p_1, p_2, p_3),$$

так что $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Матрица переходных вероятностей в данном случае будет иметь следующий вид:

$$p(y|x) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & p_0 + p_1 & 0 & p_2 + p_3 \\ 0 & 0 & p_0 + p_2 & p_1 + p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пропускную способность будем оценивать по формуле, аналогичной (1):

$$C(C_1^2) = \sup_{p_{in}(x)} \sum_{x \in \mathcal{X}} p_{in}(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y|x) \log_2 \frac{p(y|x)}{p_{out}(y)},$$

Где входной/выходной алфавиты: $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (00), (01), (10), (11)$, p_{in} является вектором длины 4

$$p_{in}(x) = \vec{p}_i,$$

а выходные вероятности рассчитываются по формуле полной вероятности

$$p_{out}(y) = \sum_{y \in (0,1)} p_{in}(x) p(y|x)$$

и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} p_{out}(00) &= p_0^2 \\ p_{out}(01) &= p_1(p_0 + p_1) + p_0p_1 \\ p_{out}(10) &= p_2(p_0 + p_2) + p_0p_2 \\ p_{out}(11) &= p_3 + p_1(p_2 + p_3) + p_2(p_1 + p_3) + p_0p_3 \end{aligned}$$

Таким образом, задача вычисления пропускной способности канала \mathcal{C}_1^2 равносильна решению задачи на условный экстремум:

$$\begin{cases} C(\mathcal{C}_1^2) = C(p_0, p_1, p_2, p_3) \rightarrow \max \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_i \geq 0, i = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3)$$

Данная задача имеет следующее численное решение:

$$C(\mathcal{C}_1^2) \approx 0.7668,$$

которое достигается при

$$\vec{p}_{opt} = [0.5091707, 0.20438863, 0.20438856, 0.08205211]$$

Напомним, что для случая распределения Бернулли оптимальное значение $C(\mathcal{C}_1^2) \approx 0.7664$ достигалось при $p_{opt} \approx 0.288$. Что позволяет заключить, что результаты, полученные для произвольного распределения и распределения Бернулли фактически совпадают. Кроме того, легко заметить, что $\vec{p}_{opt}(1) \approx (1 - p_{opt})^2$, $\vec{p}_{opt}(2) \approx \vec{p}_{opt}(3) \approx p_{opt}(1 - p_{opt})$ и $\vec{p}_{opt}(4) \approx p_{opt}^2$.

Рассмотрим соотношение $p_1 \approx p_2$ более детально. Вспомнив, что $p_1 = p_{in}(01)$, $p_2 = p_{in}(10)$ можно предположить, что оптимальная вероятность $p_{in,opt}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, не зависит от конкретного вида \mathbf{x} , а зависит только от его веса Хэмминга $wt(\mathbf{x})$:

$$p_{in,opt}(\mathbf{x}) = p_{in,opt}(wt(\mathbf{x})),$$

что означает, что вместо канала с 2^L входами и выходами достаточно рассматривать канал с $L + 1$ входом и выходом, где в качестве входов/выходов служат веса Хэмминга передаваемых/принимаемых векторов.

Исходя из сделанных выше выводов, мы можем предположить, что $p_{in}(01)$ и $p_{in}(10)$ равны некоторому $0 \leq q \leq 1$. Если при этом $p(00) = p$, то $p_{in}(11) = 1 - 2q - p$ поэтому перейдем к другому входному распределению и визуализируем функцию пропускной способности: \mathcal{C}_L^i :

Чтобы убедиться, что вероятности $p_{in}(01)$ и $p_{in}(10)$ равны, представим их в виде $p_{in}(01) = a - b$ и $p_{in}(10) = a + b$ соответственно. После замены переменных подставим их в функцию $C(\mathcal{C}_1^2)$ и решим уравнение

$$\frac{\partial C(\mathcal{C}_1^2)(a, b)}{\partial b} = 0$$

Численное решение показало, что равенство нулю достигается тогда и только тогда, когда b равен нулю, что и требовалось доказать.

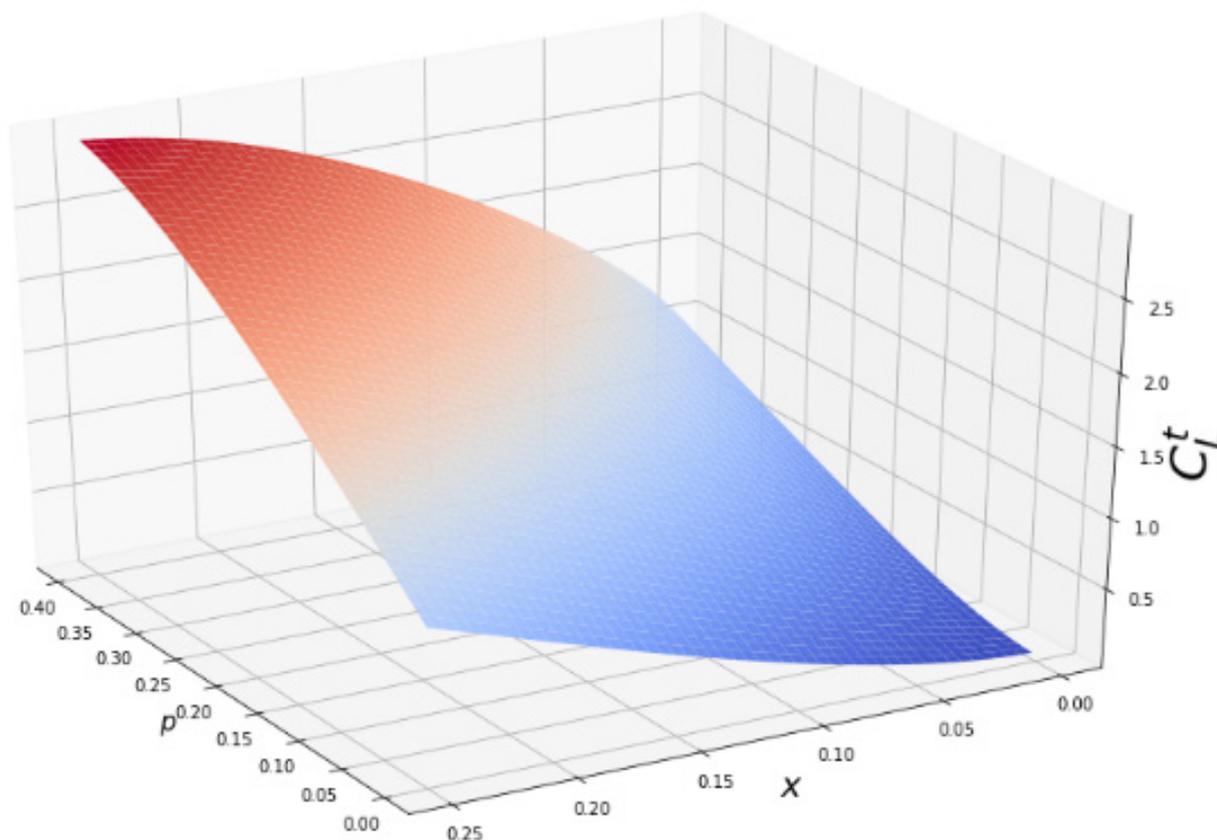


Рис. 4. Пропускная способность для случая $p_{in}(01) = p_{in}(10) = q$, $p_{in}(00) = p$, $p_{in}(11) = 1 - 2q - p$

4.1. Заключение

В данной работе рассмотрен векторный дизъюнктивный канал случайного множественного доступа, посредством которого пользователи отправляют короткие битовые пакеты на базовую станцию, которая восстанавливает дизъюнкцию всех передаваемых данных. Для случая длины пакета $L = 2$ и кратности коллизии $t = 1$ было рассмотрено 2 способа вычисления пропускной способности — аналитически для распределения Бернулли и численно для произвольного распределения дискретной случайной величины, принимающей значения (00) , (01) , (10) , (11) . Было показано, что значение пропускной способности, полученное для распределения Бернулли фактически не отличается от значения, полученного для произвольного распределения. Данный факт позволяет заключить, что при выборе оптимального входного распределения вместо 2^L различных вероятностей достаточно рассматривать $L + 1$ различных вероятностей, соответствующих весам Хэмминга передаваемых/принимаемых векторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Rimoldi and R. Urbanke, "A rate-splitting approach to the Gaussian multiple-access channel," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 42, no. 2, pp. 364–375, 1996.
2. L. Ping, L. Liu, K. Wu, and W. K. Leung, "Interleave division multiple-access," IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 5, no. 4, pp. 938–947, 2006.
3. A. R. Cohen, J. A. Heller and A. J. Viterbi, "A new coding technique for asynchronous multiple access communication," IEEE Transactions on Communication Technology, vol. 19, pp. 849–855, October 1971.

4. S. C. Chang and J. Wolf, "On the t -User m -Frequency Noiseless Multiple- Access Channel with and without Intensity Information," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 27, no. 1, pp. 41–48, Jan. 1981.
5. L. A. Bassalygo and M. S. Pinsker, "Evaluation of the Asymptotics of the Summarized Capacity of an m -Frequency t -User Noiseless Multiple-Access Channel," *Problems of Information Transmission*, vol. 36, no. 2, pp. 91–97, 2000.
6. A. Han Vinck and K. Keuning, "On the Capacity of the Asynchronous t -User m -Frequency Noiseless Multiple-Access Channel without Intensity Information," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 42, no. 6, pp. 2235–2238, Nov. 1996.
7. F. Ivanov and P. Rybin, "Signal-Code Construction Based on Interleaved Reed-Solomon Codes for Multiple Access System over Vector-Disjunctive Channel," 2018 IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC Workshops), Kansas City, MO, 2018, pp. 1–5, doi: 10.1109/ICCW.2018.8403615.
8. F. Ivanov and P. Rybin, "Novel Signal-Code Construction for Multiple Access System over Vector-Disjunctive Channel," 2018 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA), Singapore, 2018, pp. 560-564, doi: 10.23919/ISITA.2018.8664331.
9. Ivanov F., Rybin P., Afanassiev V. "On the Performance of Slotted Vector-Disjunctive Channel" //2019 16th Canadian Workshop on Information Theory (CWIT). IEEE, 2019. C. 1–5.
10. F. Ivanov, A. Kreshchuk, P. Rybin and V. Afanassiev, "On the Capacity Estimation of a Slotted Multiuser Communication Channel," 2019 11th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), Dublin, Ireland, 2019, pp. 1–5, doi: 10.1109/ICUMT48472.2019.8970989.

Estimation of the Capacity of a Multi-User Vector Disjunctive Channel for Arbitrary Input Distributions

V.S. Dyrenkov, N.M. Shevel, F.I. Ivanov, A.A. Kreshchuk

In this paper, we consider a vector disjunctive channel in which users transmit some binary vectors of length L . We estimate the capacity of this channel and derive a lower bound on this value. In addition, the lower bound is calculated both for the case of the Bernoulli distribution and for an arbitrary distribution for the case when $L = 2$. It is shown numerically that for $L = 2$ and the multiplicity of the collision $t = 1$, the Bernoulli distribution is optimal, i.e., it maximizes the throughput of the vector disjunctive channel.

KEYWORDS: vector disjunctive channel, channel capacity, discrete random variable