Информационные процессы, Том 20, № 3, 2020, стр. 297–316

Заметка о задачах доминирущего множества

Марк Ш. Левин

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
email: mslevin@acm.org

Поступила в редколлегию 22.09.2020

Аннотация—В статье рассматриваются задачи доминирующих множеств на сети: основные оптимизационные постановки задач, многокритериальные постановки задач и постановки с оценками в виде мультимножеств. Приводится обзор литературы о задачах и схемах их решения. Числовые примеры иллюстрируют задачи связных доминирующих множеств. Предлагаются новые модели целочисленного программирования для задач доминирующих множеств (многокритериальные постановки, постановки с оценками в виде мультимножеств).

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: комбинаторная оптимизация, связные доминирующие множества, многокритериальная оптимизация, схемы решения, сети, мультимножество

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы важность задач поиска доминирующих множеств (dominating sets DS) и связных доминирующих множеств (connected dominating sets CDS) на графах/сетях существенно возросла [43, 60, 62, 66, 123, 147]. Эти задачи заключаются в поиске доминирующего множества или связного доминирующего множества минимального размера для исходного графа/сети [43, 60, 62, 66]. Основные приложения задач этого типа указаны в таблице 1. Следует отметить, что указанные задачи в основном применялись в сетях связи (проектирование и управление). Сейчас задачи данного типа стали использоваться и в других областях, например: информационные системы, системы мониторинга, социальные сети.

Таблица 1. Области применения задачи доминирующего множества

Ном.	Прикладная область	Источники
1.	Коммуникационные сети: построение опорной сети (backbone) и др.	[16, 30, 43, 48, 68, 107] [115, 120, 140, 147]
2.	Проектирование топологии сетевых энергетических систем, управление, мониторинг	[31, 41, 67, 92]
3.	Задача размещения в оптических сетях	[43]
4.	Размещение устройств для мониторинга (например: камеры, устройства фиксирования загораний)	[70]
5.	Социальные сети (позитивное влияние элементов доминирующих множеств)	[39, 96, 132]
6.	Информационный поиск (интеграция документов)	[111]

В данной статье представлен следующий материал:

1. Приведен литературный обзор публикаций об указанных задачах (т.е., задача DS и задача CDS) и схемах их решения.

2. Приведены комбинаторные оптимизационные модели для указанных задач, включая новые оптимизационные модели для задач в случае многих критериев (целевых функций) и использования оценок в виде мультимножеств.

Связь рассматриваемых задач и некоторых других известных задач комбинаторной оптимизации приведена на Рис. 1. На Рис. 2 приведена иллюстрация для задачи построения доминирующего множества (построение остовной сети в системе связи). Данная статья основана на препринте [88].

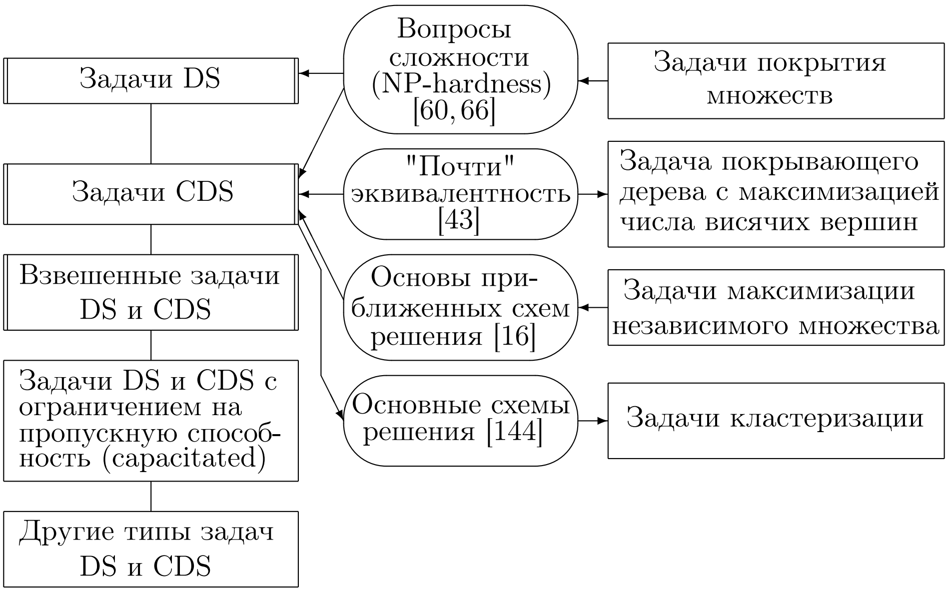

Рис. 1. Связь между комбинаторными задачами

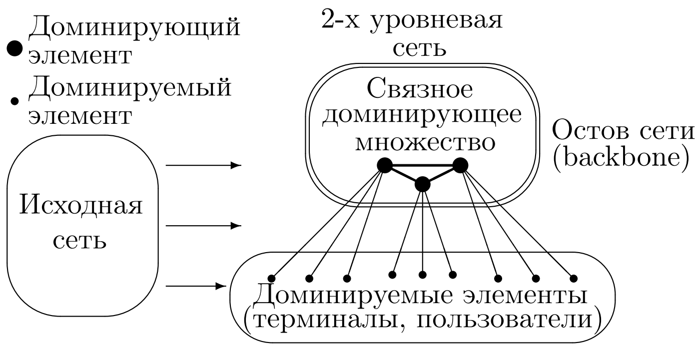

Рис. 2. Иллюстрация сетевой задачи связи

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

Имеется связный ненаправленный граф $G = (A, R)$, где A - множество вершин/узлов, R - множество ребер. Подмножество вершин $B \subseteq A$ является *доминирующим множеством* (DS) если каждая вершина не из B имеет соседа из B (т.е., соединена ребром с вершиной из B). Вершины из множества B называются доминирующими элементами. Если граф на основе вершин из B является связным, то B называется *связным доминирующим множеством* (CDS). Рассматриваются два специальных индекса:

(а) *число доминирования*: $\gamma(B)$ (минимальная мощность B);

(б) *число связного доминирования*: $\gamma_c(B)$ (минимальная мощность связного B).

Очевидно, что $\gamma_c(B) \geq \gamma(B)$.

Базовая задача доминирующего множества (DS) представляет собой следующую модель комбинаторной оптимизации:

Найти доминирующее множество B минимального размера (т.е., $\min \gamma(B)$) для исходного графа $G = (A, R)$.

Базовая модель комбинаторной оптимизации для задачи CDS имеет вид:

Найти связное доминирующее множество B минимального размера (т.е.., $\min \gamma_c(B)$) для исходного графа $G = (A, R)$.

Доказано, что указанные оптимизационные модели относятся к классу NP-трудных (NP-hard) [43,60,66]. В указанных задачах рассматриваются следующие основные требования (т.е., целевые функции, ограничения, свойства) [43, 60, 62, 66, 123, 147]: (i) минимизация мощности доминирующего множества, (ii) связность доминируемого множества, (iii) специальные свойства связности и доминирования (например, k-связность, m-доминирование).

Некоторые примеры k-связных доминирующих множеств проиллюстрированы на рисунках:

(1) пример 3-связного доминирующего множества (3-связное доминирующее множество соответствует клике, Рис. 3);

(2) пример 1-связного доминирующего множества (1-связное доминирующее множество соответствует дереву, Рис. 4);

(3) пример 2-связного доминирующего множества (2-связное доминирующее множество соответствует кольцу, Рис. 5);

(4) пример 2-связного 3-доминирующего множества (т.е., $(2, 3)$-CDS задача, 2-связное доминирующее множество соответствует кольцу, Рис. 6).

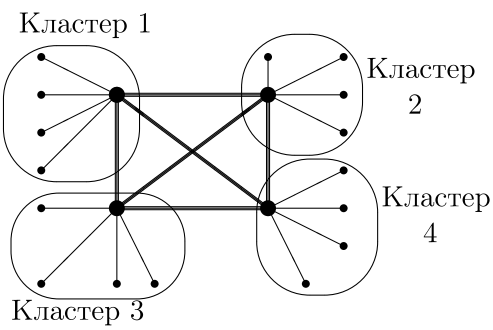

Рис. 3. 3-связное доминирующее множество

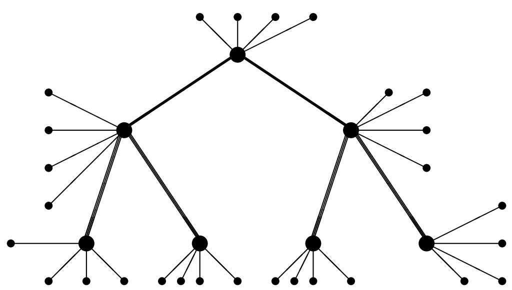

Рис. 4. 1-связное доминирующее множество

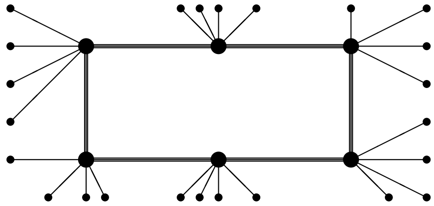

Рис. 5. 2-связное доминирующее множество

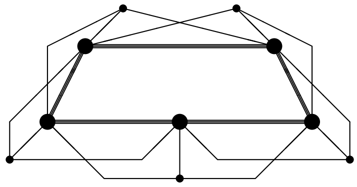

Рис. 6. 2-связное 3-доминирующее множество

В таблице 2 приведены дополнительные специальные требования, которые могут использоваться в указанных задачах.

Таблица 2. Дополнительные специальные требования/ограничения

Ном.	Требования/ограничния	Источники
1.	Ограниченный диаметр связного доминирующего множества	[22]
2.	Многоточечный переприем (multipoint relays)	[2, 115, 136]
3.	Ограничение на стоимость маршрутизации в сетях	[44, 45, 47]
4.	Ограничения по потреблению электроэнергии (demand constraints)	[82]
5.	Ограничения по пропускной способности (capacity constraints)	[82]
6.	Нечувствительность к отказам (устойчивая работоспособность) связного доминирующего множества	[151]

Представляется полезным указать две известные задачи комбинаторной оптимизации, которые близки к рассматриваемым задачам:

Задача 1. Задача максимального независимого множества [12, 13, 15, 16, 60, 101, 124, 138]:

Найти максимальное подмножество вершин исходного графа (как независимое и стабильное множество) такое, что нет ребер между любыми двумя вершинами этого подмножества.

Эта задача часто используется как предварительная в двух-этапном приближенном методе построения минимального связного множества [16,58,100,131]: (1) сконструировать максимальное независимое множество для исходной сети; (2) связать вершины построенного множества.

Задача 2. Задача покрывающего дерева с максимизацией числа весячих вершин [10, 24, 54, 60, 83]:

Найти покрывающее дерево для исходного графа так, что число висячих вершин построенного дерева является максимальным.

Эта задача эквивалентна вычислению $\gamma_c(G)$, так как подмножество вершин является *связным доминирующим множеством* тогда и только тогда, когда его дополнение является (содержится в) множеством висячих вершин покрывающего дерева [24].

Указанные две близкие оптимизационные задачи также относятся к классу NP-трудных задач [60, 66]. Обычно следующие подходы используются для решения рассматриваемых задач (т.е., задача минимального DS, задача минимального CDS, задача максимального независимого множества, задача покрывающего дерева с максимизацией числа висячих вершин): (1) точные переборные методы (например, метод ветвей и границ) [43, 54, 122]; (2) приближенные (аппроксимационные) эвристики [23, 62, 117, 152]; (3) метаэвристики и гибридные методы [9, 16, 111].

Для ряда специальных (упрощенных) случаев этих задач предложены полиномиальные схемы решения: (а) полиномиальные алгоритмы [74, 86, 108, 112, 113], (б) полиномиальные по времени схемы решения (т.е., полиномиальные схемы с гарантированной относительной погрешностью: polynomial time approximate schemes PTAS) [30, 59, 82, 104, 148].

Типы задач доминирующих множеств приведены в таблице 3 [43, 60, 62, 66, 123, 147].

Таблица 3. Задачи доминирующего множества и связного доминирующего множества, часть 1

Ном.	Тип задачи	Источники
1.	Основные обзоры по задачам и приложениям:	
1.1.	Связное доминирующее множество: теория и приложения	[43]
1.2.	Связные доминирующие множества в децентрализованных (Ad Hoc) сетях и в сенсорных сетях	[147]
1.3.	Связные доминирующие множества в сенсорных сетях и MANETs	[21]
1.4.	Связное доминирующее множество в беспроводных сетях	[46]
2.	Основные задачи:	
2.1.	Задача доминирующего множества, задача минимального доминирующего множества	[43, 60, 77]
2.2.	Независимые доминирующие множества в графах минимальное независимое доминирующее множество	[61, 79, 97, 114]
2.3.	Независимые доминирующие множества в планарных графах	[50]
2.4.	Задачи связного доминирующего множества (т.е., минимизация мощности связного доминирующего множества)	[16, 21, 22, 43, 46, 60, 62, 94] [101, 102, 107, 117, 118, 120] [122, 124, 135, 138]
2.5.	CDS задачи на графах единичных кругов (unit disk graphs)	[43, 56, 121, 152]
2.6.	Задача планарного связного доминирующего множества (т.е., на плоскости)	[98]
3.	DS задачи с специальными типами связности/доминирования:	
3.1.	Слабо-связные доминирующие множества минимального размера	[3, 13, 28, 29, 43, 146]
3.2.	Сильно-связные доминирующие множества в сетях с ненаправленными связями	[42, 43]
3.3.	Задачи тотальных доминирующих множеств	[7, 27, 33, 70–72, 118]
3.4.	Задачи тотального k-доминирования в графах	[19, 20]
3.5.	Задача почти-тотального (semitotal) доминирования в графах	[73]
3.6.	Задача двойного (double) доминирования в графах	[63–65]
3.7.	Задача смешанного (mixed) доминирования в графах	[85]
3.8.	Задача k-связного m-доминирующего множества ((k,m)-CDS задача)	[38, 56, 89, 119, 127]
3.9.	Задача k-связного m-доминирующего множества ((k,m)-CDS задача) с весам вершин	[56, 106, 121]

Таблица 3. Задачи доминирующего множества и связного доминирующего множества, часть 2

Ном.	Тип задачи	Источники
4.	Задачи взвешенного доминирующего множества:	
4.1.	CDS задача с весами вершин (например: с важностью вершин)	[9, 27, 43, 62, 95, 111] [129, 134, 152]
4.2.	(k, m)-CDS задача с минимальным весом	[56, 106, 121]
4.3.	Взвешенная CDS задача с ограничением на степени вершин (формирование остовной сети - backbone)	[5]
4.4.	Взвешенная CDS задача на графе единичных кругов (unit disk graphs)	[43]
4.5.	Задача минимального веса частично связного покрывающего множества	[91]
5.	Задачи доминирования с ограничением на пропускную способность:	
5.1.	Основные DS задачи	[40, 93]
5.2.	DS задача с ограничением на пропускную способность (на минимум)	[110]
5.3.	Специальная DS задача с ограничением на пропускную способность (минимизация числа элеметов в DS с учетом ограничений по пропускной способности и по потреблению электроэнергии)	[82]
5.4.	Специальная DS задача с ограничением на пропускную способность и с b-реберным доминированием	[17]
6.	Задачи доминирующего множества на основе ребер графа:	
6.1.	Основные задачи доминирующего множества на основе ребер графа	[32, 52, 60, 78, 142]
6.2.	Задача доминирующего множества на основе ребер графа с 2-реберной связностью	[90]
6.3.	Задача доминирующего множества на основе ребер графа с b-реберной связностью	[55]
6.4.	DS задача с b-реберным доминированием и ограничением на пропускную способность	[17]
6.5.	Задачи с тотальным реберным доминированием	[150]
6.6.	DS задача с весами ребер	[26, 53]
6.7.	CDS задача с весами ребер	[62]
7.	DS задачи при много-шаговой (multi-hop) передаче информации:	
7.1.	Много-шаговое доминирование в графах (k-шаговые доминирующие множества)	[75, 84]
7.2.	CDS задачи с k-шаговым доминированием	[34, 59, 103, 105] [139, 143]
7.3.	Задачи CDS с многоточечным переприемом (multipoint relays)	[2, 115, 136]
7.4.	Построение эффективного по энергии доминирующего дерева для много-шаговой (multi-hop) беспроводной сети	[145]
7.5.	CDS задача для много-шаговой (multi-hop) беспроводной сети	[125]
8.	Взвешенные доминирующие множества на деревьях Штейнера:	
8.1.	Задача связного доминирующего множества на дереве Штейнера	[6, 62, 100, 137]
8.2.	Задача связного доминирующего множества на дереве Штейнера с взвешенными вершинами	[4, 62]
9.	Специальные типы задач:	
9.1.	k-справедливое (k-fair) доминирование в графах	[25]
9.2.	Стабильное CDS с эффективностью по энергии	[115]
9.3.	CDS задача (на минимум) для циркулятивных сетей	[109]
9.4.	CDS задачи с ограничением на стоимость маршрутизации	[47]
9.5.	Задачи высоко-связных много-доминирующих множеств	[56]
9.6.	CDS задача с балансом нагрузки (беспроводная сенсорная сеть - WSN)	[68]
9.7.	Доминирующие множеств и связные доминирующие множества в динамических графах	[76]
9.8.	Реконфигурация доминирующих множеств	[126]

Таблица 4 содержит список основных схем решения.

Таблица 4. Основные схемы решения, часть 1

Ном.	Схема решения	Источники
1.	Основные обзоры:	
1.1.	Обзоры о проблемах и схемах решения	[43]
1.2.	Классификация и сравнение алгоритмов для CDS	[147]
2.	Точные методы:	
2.1.	Алгоритм ветвей и границ для CDS задачи (на минимум)	[122]
2.2.	Полиномиальные алгоритмы (полиномиальное время) для минимального парного (minimum paired-dominating) DS (специальные графы: дерево, выпуклый двух-дольный граф, строго-упорядочиваемый граф, граф перестановок)	[74, 86, 108] [112, 113]
2.3.	Переборные алгоритмы для DS задач	[35]
2.4.	Точные алгоритмы для DS (алгоритмы экспоненциального времени, алгоритмы типа ветвей и границ)	[49, 93, 116]
2.5.	Точные алгоритмы для связного "красно-голубого"(red-blue) доминирующего множества	[1]
3.	Эвристики, приближенные (аппроксимационные) алгоритмы:	
3.1.	Эвристики для задачи связного доминирующего множества в децентрализованной (Ad Hoc) беспроводной сети	[23]
3.2.	Расширенный локальный алгоритм для формирования связного доминирующего множества в децентрализованной (Ad Hoc) беспроводной сети	[37]
3.3.	Приближенный алгоритм для слабо-связного доминирующего множества минимального размера	[28]
3.4.	Эффективные алгоритмы для CDS задачи на графе типа трапеции	[128]
3.5.	"Жадная"аппроксимация для минимальных связных доминирующих множеств	[117]
3.6.	Аппроксимации для доминирующих множеств минимального веса, связных доминирующих множеств минимального веса	[152]
3.7.	Аппроксимация для слабо-связных доминирующих множеств минимального размера	[28]
3.8.	Приближенные алгоритмы для задач 1-m-CDS и k-k-CDS	[127]
3.9.	Аппроксимационные алгоритмы для задач высоко-связных много-доминирующих множеств	[56]
3.10.	Аппроксимация с константой для CDS задачи с минимизацией веса	[14]
3.11.	Аппроксимация для CDS задачи с k-шаговой (k-hop) передачей информации	[34]
3.12.	Двух-этапные приближенные алгоритмы для CDS задач	[131]
3.13.	Приближенный алгоритм с гарантией для k-связного m-кратного DS	[149]
3.14.	Приближенный централизованный алгоритм для CDS задачи (построение виртуального остова в беспроводной сенсорной сети WSN)	[99]
3.15.	Приближенный распределенный алгоритм для CDS задачи (на графе единичных кругов - unit disk graphs)	[58]
3.16.	Упрощенная эвристика для минимального связного доминирующего множества на графах (аппроксимационный алгоритм)	[130]
3.17.	Приближенные алгоритмы в виде распределенного построения CDS на графах единичных кругов (unit disk graphs)	[81]
3.18.	Эффективный рандомизированный распределенный "жадный"алгоритм для построения малого (small) DS (аппроксимация)	[80]
3.19.	Улучшенные приближенные алгоритмы для (k, m)-CDS задач	[106]

Таблица 4. Основные схемы решения, часть 2

Ном.	Схема решения	Источники
4.	Метаэвристики:	
4.1.	Эффективные мета-эвристики для задачи доминирующего множества с минимальным весом	[9]
4.2.	Гибридные метаэвристики для минимального взвешенного доминирующего множества	[111]
4.3.	Улучшенная метаэвристика (Ant Colony) для DS задачи (на минимум)	[77]
4.4.	Эффективный двух-этапный централизованный алгоритм для CDS задачи (для беспроводных сетей)	[51]
5.	Эволюционные методы:	
5.1.	Гибридные генетические алгоритмы (GA) для задачи минимального доминирующего множества	[69]
5.2.	Гибридный GA для задачи связного доминирующего множества с минимальным весом	[36]
5.3.	Эффективный гибридный алгоритм (memetic) для DS задачи с минимизацией веса	[95]
5.4.	Эволюционный алгоритм (memetic) для поиска позитивного доминирующего множества влияния в социальных сетях	[96]
6.	Алгоритмы с линейным временем выполнения:	
6.1.	Алгоритм линейного времени для DS задачи с k-этапной (k-hop) передачей информации (для дерева, для двух-дольного перестановочного графа)	[75, 84]
6.2.	Алгоритмы линейного времени для DS задачи с фиксированной мощностью множества в вырожденном графе	[11]
6.3.	Точный алгоритм для дерева с линейным временем выполнения	[39]
6.4.	Алгоритмы линейного времени для обобщенной DS задачи на ребрах	[18]
6.5.	Алгоритм линейного времени для задачи доминирования с k-степенью на взвешенном дереве	[31]
7.	Аппроксимацинные схемы с линейным временем выполнения (PTAS):	
7.1.	PTAS для CDS задачи на децентрализованной (Ad Hoc) беспроводной сети	[30]
7.2.	PTAS для CDS задачи на 3D беспроводной сенсорной сети (WSN)	[148]
7.3.	PTAS для CDS задачи с d-этапной (d-hop) передачей информации на графах роста с ограничением (in growth bounded graphs)	[59]
7.4.	PTAS для CDS задачи на графе единичных кругов (unit disk graphs)	[104]
7.5.	PTAS для CDS задачи с ограничением на стоимость маршрутизации в беспроводной сенсорной сети (WSN)	[44, 45]
7.6.	PTAS для CDS задачи с ограничением на стоимость маршрутизации на графах роста с ограничением (in growth bounded graphs)	[141]
7.7.	PTAS для DS задачи на деревьях с ограничением по пропускной способности	[82]
7.8.	PTAS для DS задачи с минимизацией веса на графах роста с ограничением (growth bounded graphs)	[133]
8.	Специальные схемы решения:	
8.1.	Метод на основе поискового дерева для DS задачи на планарном графе	[8]
8.2.	Распределенный алгоритм для CDS задачи с k-этапной (k-hop) передачей информации	[143]
8.3.	Метод на основе распределенного обучаемого автомата для слабо связного доминирующего множества	[3]
8.4.	Адаптивные алгоритмы для связных доминирующих множеств	[57]

3. ФОРМУЛИРОВКИ В ВИДЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Базовые модели

Базовая задача заключается в поиске минимального доминирующего множества $B \subseteq A$ в графе $G = (A, R)$, где $A = \{a_1, ..., a_i, ..., a_n\}$, $R = \{r_1, ..., r_j, ..., r_q\}$. Используются следующие бинарные переменные x_i ($i = \overline{1, n}$): $\forall a_i \in A$ $x_i = 1$ если вершинаa выбирается для B (i.e.,

$a \in B$) и $x_i = 0$ - в противном случае. Решение задачи можно определить как бинарный вектор $\overline{x} = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$. Рассматриваются следующие оптимизационные модели:

Модель 1. Формулировка базовой задачи минимизации доминирующего множества в виде целочисленного программирования:

$$\min \gamma(b) = \min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B \ (i.e.,\ x_{a_{\zeta_2}} = 1) \ \ such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

Модель 2. Формулировка базовой задачи минимизации связного доминирующего множества в виде целочисленного программирования (здесь $B_c \subseteq A$ - связное доминирующее множество):

$$\min \gamma_c(b) = \min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c \ \ \exists \ \ path \ \ l(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >,$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B_c \ (i.e.,\ x_{a_{\zeta_2}} = 1) \ \ such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

В задачах могут также использоваться веса вершин: $w(a_i) > 0$ ($\forall a_i \in A$).

Модель 3. Формулировка задачи доминирующего множества с минимизацией весов вершин в виде целочисленного программирования:

$$\min \gamma^w(b) = \min \sum_{i=1}^{n} w(a_i) \ x_i$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B \ (i.e.,\ x_{a_{\zeta_2}} = 1) \ \ such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

Модель 4. Формулировка задачи связного доминирующего множества с минимизацией весов вершин в виде целочисленного программирования: (здесь $B_c \subseteq A$ - связное доминирующее множество):

$$\min \gamma^w_c(b) = \min \sum_{i=1}^{n} w(a_i) \ x_i$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c \ \ \exists \ \ path \ \ l(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >,$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B_c \ (i.e.,\ x_{a_{\zeta_2}} = 1) \ \ such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

3.2. Основные многокритериальные модели

Можно использовать векторный вес вершин исходного графа:
$\overline{w}(a_i) = (w(a_i^1), ..., w^{\kappa}(a_i), ..., w^{\mu}(a_i))$ $(w^{\kappa}(a_i) > 0 \ \forall \kappa = \overline{1, \mu}, \ \forall a_i \in A)$.

Таким образом, можно рассматривать многокритериальные модели (здесь осуществляется поиск Парето-эффективных решений).

Модель 5. Формулировка многокритериальной задачи доминирующего множества с векторными весами вершин в виде целочисленного программирования:

$$\min \sum_{i=1}^{n} w^1(a_i)\ x_i, ..., \min \sum_{i=1}^{n} w^{\kappa}(a_i)\ x_i, ..., \min \sum_{i=1}^{n} w^{\mu}(a_i)\ x_i,$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B\ (i.e.,\ x_{a_{\zeta_2}} = 1)\ \ such\ \ that\ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

Модель 6. Формулировка многокритериальной задачи связного доминирующего множества с векторными весами вершин в виде целочисленного программирования:

$$\min \sum_{i=1}^{n} w^1(a_i)\ x_i, ..., \min \sum_{i=1}^{n} w^{\kappa}(a_i)\ x_i, ..., \min \sum_{i=1}^{n} w^{\mu}(a_i)\ x_i,$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c\ \ \exists\ \ path\ \ l(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >,$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B_c\ (i.e.,\ x_{a_{\zeta_2}} = 1)\ \ such\ \ that\ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

3.3. Модели для k-связных доминирующих множеств

В случае k-связного доминирующего множества необходимо использовать дополнительное ограничение для k-связности доминирующего множества.

Модель 7. Формулировка базовой задачи минимизации связного доминирующего множества с условием k-связности доминирующего множества в виде целочисленного программирования (здесь $B_c \subseteq A$ - k-связное доминирующее множество):

$$\min \gamma_c(b) = \min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c\ \ \exists\ \ k\ \ vertex\ \ disjoint\ \ paths$$

$$l^1(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >, ...,\ l^k(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >;$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B_c\ (i.e.,\ x_{a_{\zeta_2}} = 1)\ \ such\ \ that\ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

Модель 8. Формулировка задачи доминирующего множества с минимизацией весов вершин с условием k-связности доминирующего множества в виде целочисленного программирования (здесь $B_c \subseteq A$ - k-связное доминирующее множество):

$$\min \gamma_c^w(b) = \min \sum_{i=1}^{n} w(a_i)\ x_i$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c\ \ \exists\ \ k\ \ vertex\ \ disjoint\ \ paths$$

$$l^1(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >, ...,\ l^k(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >;$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B_c\ (i.e.,\ x_{a_{\zeta_2}} = 1)\ \ such\ \ that\ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

Модель 9. Формулировка многокритериальной задачи доминирующего множества с минимизацией весов вершин с условием k-связности доминирующего множества в виде целочисленного программирования:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \ w^1(a_i)\ x_i, ..., \min \sum_{i=1}^{n} \ w^{\kappa}(a_i)\ x_i, ..., \min \sum_{i=1}^{n} \ w^{\mu}(a_i)\ x_i,$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta'} \in B_c \ \ \exists \ \ k \ \ vertex \ \ disjoint \ \ paths$$

$$l^1(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta'} >, ..., \ l^k(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta'} >;$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B_c \ (i.e., \ x_{a_{\zeta_2}} = 1) \ \ such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

3.4. Модели для k-связных m-доминирующих множеств

В случае k-связности и m-доминирования в доминирующем множестве модели дополняются ограничениями для k-связности и m-доминирования.

Модель 10. Формулировка задачи минимизации связного доминирующего множества с условиями k-связности и m-доминирования доминирующего множества в виде целочисленного программирования (здесь $B_c \subseteq A$ - k-связное доминирующее множество):

$$\min \gamma_c(b) = \min \sum_{i=1}^{n} \ x_i$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c \ \ \exists \ \ k \ \ vertex \ \ disjoint \ \ paths$$

$$l^1(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >, ..., \ l^k(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >;$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists \, m \ \ vertices \ \ a^1_{\zeta_1}, ..., a^m_{\zeta_1} \in B_c \ (i.e., \ x_{a^1_{\zeta_1}} = 1, ..., x_{a^m_{\zeta_1}} = 1)$$

$$such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a^1_{\zeta_1}) \in R, ..., (a_{\zeta_1}, a^m_{\zeta_1}) \in R.$$

Модель 11. Формулировка задачи минимизации связного доминирующего множества с условиями k-связности и m-доминирования доминирующего множества с весами вершин в виде целочисленного программирования (здесь $B_c \subseteq A$ - k-связное доминирующее множество):

$$\min \gamma^w_c(b) = \min \sum_{i=1}^{n} \ w(a_i)\ x_i$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c \ \ \exists \ \ k \ \ vertex \ \ disjoint \ \ paths$$

$$l^1(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >, ..., \ l^k(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >;$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists \, m \ \ vertices \ \ a^1_{\zeta_1}, ..., a^m_{\zeta_1} \in B_c \ (i.e., \ x_{a^1_{\zeta_1}} = 1, ..., x_{a^m_{\zeta_1}} = 1)$$

$$such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a^1_{\zeta_1}) \in R, ..., (a_{\zeta_1}, a^m_{\zeta_1}) \in R.$$

Модель 12. Формулировка многокритериальной задачи минимизации связного доминирующего множества с условиями k-связности и m-доминирования доминирующего множества с весами вершин в виде целочисленного программирования:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \ w^1(a_i)\ x_i, ..., \min \sum_{i=1}^{n} \ w^{\kappa}(a_i)\ x_i, ..., \min \sum_{i=1}^{n} \ w^{\mu}(a_i)\ x_i,$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c \ \exists \ k \ \ vertex \ \ disjoint \ \ paths$$

$$l^1(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >, ..., \ l^k(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >;$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists \, m \ \ vertices \ \ a^1_{\zeta_1}, ..., a^m_{\zeta_1} \in B_c \ (i.e., \ x_{a^1_{\zeta_1}} = 1, ..., x_{a^m_{\zeta_1}} = 1)$$

$$such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a^1_{\zeta_1}) \in R, ..., (a_{\zeta_1}, a^m_{\zeta_1}) \in R.$$

3.5. Задачи с оценками в виде мультимножеств

Здесь испольэуются интервальные оценки на основе мультимножеств, соответствующие операции и оптимизационные модели, введенные в [87]. В данном случае взвешенные векторы вершин $\overline{w}(a_i) = (w(a_i^1), ..., w^\kappa(a_i), ..., w^\mu(a_i))$ $(w^\kappa(a_i) > 0 \ \forall \kappa = \overline{1, \mu}, \ \forall a_i \in A)$ трансформируются ("сжимаются") в оценку в виде муьтимножества $e(a_i)$.

Модель 13. Формулировка задачи доминирующего множества с минимизацией весов вершин при оценках весов как мультимножеств в виде целочисленного программирования (целевая функция основана на “обобщенной медиане” M^g):

$$\min \ M^g = \arg \min_{M \in \overline{E}} \sum_{\kappa=1}^{n} |\delta(M, e_\kappa)|;$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B \ (i.e., \ x_{a_{\zeta_2}} = 1) \ \ such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

Модель 14. Формулировка задачи связного доминирующего множества с минимизацией весов вершин при оценках весов как мультимножеств в виде целочисленного программирования (целевая функция основана на “обобщенной медиане” M^g):

$$\min \ M^g = \arg \min_{M \in \overline{E}} \sum_{\kappa=1}^{n} |\delta(M, e_\kappa)|;$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c \ \exists \ path \ \ l(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >,$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B_c \ (i.e., \ x_{a_{\zeta_2}} = 1) \ \ such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

Модель 15. Формулировка многокритериальной задачи доминирующего множества с минимизацией весов вершин при оценках весов как мультимножеств и при условии k-связности доминирующего множества в виде целочисленного программирования (целевая функция основана на “обобщенной медиане” M^g):

$$\min \ M^g = \arg \min_{M \in \overline{E}} \sum_{\kappa=1}^{n} |\delta(M, e_\kappa)|;$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta'} \in B_c \ \exists \ k \ \ vertex \ \ disjoint \ \ paths$$

$$l^1(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta'} >, ..., \ l^k(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta'} >;$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists a_{\zeta_2} \in B_c \ (i.e., \ x_{a_{\zeta_2}} = 1) \ \ such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a_{\zeta_2}) \in R.$$

Модель 16. Формулировка многокритериальной задачи доминирующего множества с минимизацией весов вершин при оценках весов как мультимножеств и при условиях k-связности и

m-доминирования доминирующего множества в виде целочисленного программирования (целевая функция основана на “обобщенной медиане” M^g):

$$\min \ M^g = \arg\min_{M \in \overline{E}} \sum_{\kappa=1}^{n} |\delta(M, e_\kappa)|;$$

$$s.t. \quad \forall a_{\zeta'}, a_{\zeta''} \in B_c \ \ \exists \ \ k \ \ vertex \ \ disjoint \ \ paths$$

$$l^1(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >, ..., \ l^k(a_{\zeta'}, a_{\zeta''}) =< a_{\zeta'}, ..., a_{\zeta''} >;$$

$$\forall a_{\zeta_1} \in (A \backslash B_c) \quad \exists \ m \ \ vertices \ \ a^1_{\zeta_1}, ..., a^m_{\zeta_1} \in B_c \ (i.e., \ x_{a^1_{\zeta_1}} = 1, ..., x_{a^m_{\zeta_1}} = 1)$$

$$such \ \ that \ \ (a_{\zeta_1}, a^1_{\zeta_1}) \in R, ..., (a_{\zeta_1}, a^m_{\zeta_1}) \in R.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрены задачи доминирующего множества. Приведен литературный обзор основных типов задач и схем их решения. Предложены новые формулировки моделей комбинаторной оптимизации для ряда задач доминирующего множества с учетом многокритериальности и использования оценок в виде мультимножеств. Представляется целесообразным указать некоторые перспективные направления исследований: (1) рассмотрение различных новых областей применения описанных задач; (2) исследование многостадийных стратегий решения; (3) дальнейшее исследований задач при условиях k-связности и m-доминирования доминирующего множества: (4) исследование задач на специальных структурах (например, на древовидных структурах); (5) исследование задач в сетях связи при много-этапной передаче информации; (6) проектирование программного обеспечения для рассмотренного класса задач; (7) включение описанных задач в учебные программы (например: в виде студенческих проектов). Автор декларирует, что нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abu-Khzam F.N., Mouawad A.E., Liedloff M., An exact algorithm for connected red-blue dominating set. J. of Discr. Alg., 2011, vol. 9, pp. 252–262.
2. Adjih C., Jacquet P., Viennot L., Computing connected dominating sets with multipoint relays. Ad Hoc & Sensor Wir. Netw., 2005, Mar., pp. 27–39.
3. Akbari Torkestani J., Meybodi M.R., Clustering the wireless Ad Hoc networks: distributed learning automata approach. J. of Parallel and Distr. Comput., 2010, vol. 70, no. 4, pp. 394–405.
4. Akbari Torkestani J., Meybodi M.R., Weighted Steiner connected dominating set and its application to multicast routing in wireless MANETs. Wir. Pers. Commun., 2011, vol. 60, no. 2, pp. 145–169.
5. Akbari Torkestani J., An adaptive backbone formation algorithm for wireless sensor networks. Comp. Commun., 2012, vol. 35, no. 11, pp. 1333–1344.
6. Akbari Torkestani J., Algorithms for Steiner connected dominating set problem based on learning automata theory. Int. J. of Foundations of Comp. Sci., 2015, vol. 26, no. 06, pp. 769–801.
7. Allan R.B., Laskar R., Hedetniemi S.T., A note on total domination. Discr. Math., 1984, vol. 49, no. 1, pp. 7–13.
8. Alber J., Fan H., Fellows M.R., Niedereier R., Rosamond F.A., Stege U., A refined search tree technique for dominating set on planar graphs. J. Comput. Syst. Sci., 2005, vol. 71, no. 4, pp. 385–405.
9. Albuquerque M., Vidal T., An efficient mathheuristic for the minimum-weight dominating set problem. Electr. prepr., 24 p., Aug. 28, 2018. http://arxiv.org/abs/1808.09809 [cs.AI]

10. Alon N., Fomin F., Gutin G., Krivelevich M., Saurabh S., Spanning directed trees with many leaves. SIAM J. Discr. Math., 2009, vol. 23, no 1, pp. 466–476.

11. Alon N., Gutner S., Linear time algorithms for finding a dominating set of fixed size in degenerated graphs. Algorithmica, 2009, vol. 54, no. 4, pp. 544–556.

12. Alvarado J.D., Dantas S., Mohr E., Rautenbach D., On the maximum number of minimum dominating sets in forests. Discr. Math., 2019, vol. 342, no. 4, pp. 934–942.

13. Alzoubi K.M., Wan P.-J., Frieder O., Maximal independent set, weakly connected dominating set, and induced spanners for mobile ad-hoc networks. Int. J. of Foundations of Comp. Sci., 2003, vol. 14, no. 2, pp. 287–303.

14. Ambuhl C., Erlebach T., Mihalak M., Nunkesser M., Constant-factor approximation for minimum-weight (connected) dominating sets in unit disk graphs. In: APPROX-RANDOM 2006, LNCS 4110, Springer, pp. 3–14, 2006.

15. Andrade D.V., Resende M.G.C., Werneck R.F., Fast local search for the maximum independent set problem. J. of Heur., 2012, vol. 18, pp. 525–547.

16. Bai X., Zhao D., Bai S., Wang Q., Li W., Mu D., Minimum connected dominating sets in heterogeneous 3D wireless Ad Hoc networks. Ad Hoc Netw., 2020, vol. 97, art. 102023.

17. Berger A., Fukunaga T., Nagamochi H., Parekh O., Approximability of the capacitated b-edge dominating set problem. Theor. Comp. Sci., 2007, vol. 385, no. 1–3, pp. 202–213.

18. Berger A., Parekh O., Linear time algorithms for generalized edge dominating set problems. Algorithmica, 2008, vol. 59, no. 2, pp. 244–254.

19. Bermudo S., Hernandez-Gomez J.C., Sigarreta J.M., Total k-domination in strong product graphs. Discr. Appl. Math., 2019, vol. 263, pp. 51–58.

20. Bermudo S., Martinez A.C., Hernandez Mira F.A., Sigarreta J.M., On the global total k-domination number of graphs. Discr. Appl. Math., 2019, vol. 263, pp. 42–50.

21. Blum J., Ding M., Thaeler A., Cheng X., Connected dominating set in sensor networks and MANETs. In: Du D.-Z., Pardalos P.M. (eds), Handbook of Combinatorial Optimization, Springer, pp. 329–369, 2005.

22. Buchanan A., Sung J.S., Boginski V., Butenko S., On connected dominating set of restricted diameter. EJOR, 2014, vol. 236, no. 2, pp. 410–418.

23. Butenko S., Cheng X., Oliveira C.A.S., Pardalos P.M., A new heuristic for the minimum connected dominating set problem on ad hoc wireless networks. In: Recent Developments in Cooperative Control and Optimization, Springer, pp. 61–73, 2004.

24. Caro Y., West D.B., Yuster R., Connected domination and spanning trees with many leaves. SIAM J. Discr. Math., 2000, vol. 13, no. 2, pp. 202–211.

25. Caro Y., Hansberg A., Henning M., Fair domination in graphs. Discr. Math., 2012, vol. 312, pp. 2905–2914.

26. Carr R., Fujito T., Konjevod G., Parekh O., A $2\frac{1}{10}$-approximation algorithm for a generalization of the weighted edge-dominating set problem. J. of Comb. Optim., 2001, vol. 5, pp. 317–326.

27. Chang M.-S., Weighted domination of cocomparability graphs. Discr. Appl. Math., 1997, vol. 80, pp. 135–148.

28. Chen Y.P., Liestman A.L., Approximating minimum size weakly-connected dominating sets for clustering mobile ad hoc networks. In: MobiHoc'02, pp. 165–172, 2002.

29. Chen Y.P., Liestman A.L., Maintaining weakly connected dominating sets for clustering Ad-Hoc networks. Ad Hoc Netw., 2005, vol. 3, pp. 629–642.

30. Cheng X., Huang X., Li D., Wu W., Du D.-Z., A polynomial-time approximation scheme for minimum connected dominating set in ad hoc wireless networks. Networks, 2003, vol. 42, no. 4, pp. 202–208.

31. Cheng C.J., Lu C., Zhou Y., The k-power domination problem in weighted trees. In: AAIM 2018, LNCS 11343, Springer, pp. 149–160, 2018.

32. Chlebik M., Chlebikova J., Approximation hardness of edge dominating set problems. J. of Comb. Optim., 2006, vol. 11, no. 3, pp. 279–290.

33. Cockayne E.J., Dawes R., Hedetniemi S.T., Total domination in graphs. Networks, 1980, vol. 10, pp. 211–215.

34. Coelho R.S., Moura P.F.S., Wakabayashi Y., The k-hop connected dominating set problem: approximation and hardness. J. of Comb. Optim., 2017, vol. 34, no. 4, pp. 1060–1083.

35. Couturier J.-F., Heggernes P., van 't Hof P., Kratsch D., Minimal dominating sets in graph classes: Combinatorial bounds and enumeration. Theor. Comp. Sci., 2013, vol. 487, pp. 82–94.

36. Dagdeviren Z.A., Aydin D., Cinsdikici M., Two population-based optimization algorithms for minimum weight connected dominating set problem. Appl. Soft Comput., 2017, vol. 59, pp. 644–658.

37. Dai F., Wu J., An extended localized algorithm for connected dominating set formation in Ad Hoc wireless networks. IEEE Trans. on Parallel and Distrib. Syst., 2004, vol. 15, no. 10, pp. 908–920.

38. Dai F., Wu J., On constructing k-connected k-dominating set in wireless ad hoc and sensor networks. J. of Parallel and Distr. Comput., 2006, vol. 66, no. 7, pp. 947–958.

39. Dinh T.N., Shen Y., Nguyen D.T., Thai M.T., On the approximability of positive influence dominating set in social networks. J. of Com. Optim., 2014, vol. 27, no. 3, pp. 487–503.

40. Dom M., Lokshtanov D., Saurabh S., Villanger Y., Capacitated domination and covering: a parameterized perspective. In: Proc. 3rd IWPEC, LNCS 5018, Springer, pp. 78–90, 2008.

41. Dorfling M., Henning M.A., A note on power domination in grid graphs. Discr. Appl. Math., 2006, vol. 154, pp. 1023–1027.

42. Du D.-Z., Thai M.T., Li Y., Liu D., Zhu S., Strongly connected dominating sets in wireless sensor networks with unidirectional links. In: APWeb 2006, LNCS 3841, Springer, pp. 13–24, 2006.

43. Du D.-Z., Wan P.-J., Connected Dominating Set: Theory and Applications. Springer, 2013.

44. Du H., Ye Q., Zhong J., Wang Y., Lee W., Park H., PTAS for minimum connected dominating set with routing cost constraint in wireless sensor networks. In: COCOA 2010, Part 1, LNCS 6508, Springer, pp. 252–259, 2020.

45. Du H., Ye Q., Zhong J., Wang Y., Lee W., Park H., Polynomial-time approximation scheme for minimum connected dominating set under routing cost constraint in wireless sensor networks. Theor. Comp. Sci., 2012, vol. 447, pp. 38–43.

46. Du H., Ding L., Wu W., Kim D., Pardalos P.M., Willson J., Connected dominating set in wireless networks. In: Pardalos P.M., Graham R.L., Du D.-Z. (eds), Handbook of Combinatorial Optimization. 2nd ed., Springer, pp. 783–834, 2013.

47. Du H., Luo H., Routing-cost constrained connected dominating set. In: M.Y. Kao (ed), Encyclopedia of Algorithms, Springer, pp. 1879–1883, 2016.

48. Erciyes K., Dagdeviren O., Cokeslu D., Ozsoyeller D., Graph theoretic clustering algorithms in mobile ad hoc networks and wireless sensor networks - survey. Appl. Comput. Math., 2007, vol. 6, no. 2, pp. 162–180.

49. Fomin F.V., Kratsch D., Woeginger G.J., Exact (exponential) algorithms for the dominating set problem. In: Hromkovic J., Nagl M., Westfechtel B. (eds), LNCS 3353, Springer, pp. 245–256, 2004.

50. Fomin F.V., Thilikos D.M., Dominating sets in planar graphs: branch-width and exponential speed-up. SIAM J. Comput., 2006, vol. 36, no. 2, pp. 281–309.

51. Fu D., Han L., Liu L., Gao Q., Feng Z., An efficient centralized algorithm for connected dominating set on wireless networks. Procedia CS, 2015, vol. 56, pp. 162–167.

52. Fujito T., Approximability of the independent/connected edge dominating set problems. Inform. Proc. Lett., 2001, vol. 79, pp. 261–266.
53. Fujito T., Nagamochi H., A 2-approximation algorithm for the minimum weight edge dominating set problem. Discr. Appl. Math., 2002, vol. 118, no. 3, pp. 199–207.
54. Fujie T., An exact algorithm for the maximum leaf spanning tree problem. Comp. and Oper. Res., 2003, vol. 30, pp. 1931–1944.
55. Fukunaga T., Nagamochi H., Approximation algorithm for the b-edge dominating set problem and its related problems. In: COCOON 2005, LNCS 3595, Springer, pp. 747–756, 2005.
56. Fukunaga T., Approximation algorithms for highly connected multi-dominating sets in unit disk graphs. Algorithmica, 2018, vol. 80, no. 11, pp. 3270–3292.
57. Fukunaga T., Adaptive algorithms for finding connected dominating sets in uncertain graphs. Electr. prepr., 19 p., Dec 29, 2019. http://arxiv.org/abs/1912.12665 [cs.DS]
58. Funke S., Kesselman A., Meyer U., Segal M., A simple improved distributed algorithm for minimum CDS in unit disk graphs. ACM Trans. on Sensor Netw., 2006, vol. 2, no. 3, pp. 444–453.
59. Gao X., Wag W., Zhang Z., Zhu S., Wu W., A PTAS for minimum d-hop connected dominating set in growth-bounded graphs. Optim. Lett., 2010, vol. 4, no. 3, pp. 321–333.
60. Garey M.R., Johnson D.S., Computers and intractability. The Guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1979.
61. Goddard W., Lyle J., Independent dominating sets in triangle-free graphs. J. of Comb. Optim., 2012, vol. 23, no. 1, pp. 9–20.
62. Guha S., Khuller S., Approximation algorithms for connected dominating sets. Algorithmica, 1998, vol. 20, no. 4, pp. 374–387.
63. Hajian M., Rad N.J., A new lower bound on the double domination number of a graph. Discr. Appl. Math., 2019, vol. 254, pp. 280–282.
64. Harant J., Henning M.A., On double dominating in graphs. Discussiones Mathematicae, 2005, vol. 25, pp. 29–34.
65. Harary F., Haynes T.W., Double domination in graphs. Ars Combin., 2000, vol. 55, pp. 201–213.
66. Haynes T.W., Hedetniemi S.T., Slater P.J., Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker Inc., 1998.
67. Haynes T.W., Hedetniemi S.M., Hedetniemi S.T., Henning M.A., Domination in graphs applied to electrical power networks. SIAM J. on Discr. Math., 2002, vol. 15, no. 4, pp. 519–529.
68. He J., Ji S., Fan P., Pan Y., Li Y., Constructing a load-balanced virtual backbone in wireless sensor networks. In: 2012 Int. Conf. on Computing, Networking and Communication (ICNC), pp. 959–963, 2012.
69. Hedar A.-R., Ismail R., Hybrid genetic algorithm for minimum dominating set problem. In: ICCSA 2010, pp. 457–467, 2010.
70. Henning M.A., Rad N.J., Locating-total domination in graphs. Discr. Appl. Math., 2012, vol. 160, pp. 1986–1993.
71. Henning M.A., Rad N.J., Bounds on neighborhood total domination in graphs. Discr. Appl. Math., 2013, vol. 161, pp. 2460–2466.
72. Henning M.A., Yeo A., Total Domination in Graphs. Springer, 2013.
73. Henning M.A., Marcon A.J., On matching and semitotal domination in graphs. Discr. Math., 2014, vol. 324, pp. 13–18.
74. Henning M.A., Pradhan D., Algorithmic aspects of upper paired-domination in graphs. Theor. Comp. Sci., 2020, vol. 804, pp. 98–114.

75. Henning M.A., Pal S., Pradhan D., Algorithm and hardness results on hop domination in graphs. Inform. Proc. Lett., 2020, vol. 153, 105872.

76. Hjuler N., Italiano G.F., Parotsidis N., Saulpic D., Dominating sets and connected dominating sets in dynamic graphs. In: STACS 2019, pp. 35:1–35:17, 2019.

77. Ho C.K., Singh Y.P., Ewe H.T., An enhanced ant colony optimization metaheuristic for the minimum dominating set problem. Appl. Artif. Intell., 2006, vol. 20, no. 10, pp. 881–903.

78. Horton J., Kilakos K., Minimum edge dominating sets. SIAM J. Discr. Math., 1993, vol. 6, no. 3, pp. 375–387.

79. Irving R.W., On approximating the minimum independent dominating set. Inform. Proc.. Lett., 1991, vol. 37, no. 4, pp. 197–200.

80. Jia L., Rajaraman R., Suel T., An efficient distributed algorithm for constructing small dominating sets. Distrib. Comput., 2002, vol. 15, no. 4, pp. 193–205.

81. Jullu R.K., Prasad P.R., Das G.K., Distributed construciton of connected dominating set in unit disk graphs. J. of Parallel and Distr. Comput., 2017, vol. 104, pp. 159–166.

82. Kao M.J., Liao C.S., Lee D.T., Capacitated domination problem. Algorithmica, 2011, vol. 60, no. 2, pp. 274–300.

83. Kleitman D.J., West D.B., Spanning trees with many leaves. SIAM J. on Discr. Math., 1991, vol. 4, no. 1, pp. 99–106.

84. Kundu S., Majumder S., A linear time algorithm for optimal k-hop dominating set of a tree. Inf. Process. Lett., 2016, vol. 116, no. 2, pp. 197–202.

85. Lan J.K., Chang G.J., On the mixed domination problem in graphs. Theor. Comp. Sci., 2013, vol. 476, pp. 84–93.

86. Lappas E., Nikolopoulos S.D., Palios L., An $O(n)$-time algorithm for paired-domination on permutation graphs. Eur. J. Combin., 2013, vol. 34, no. 3, pp. 593–608.

87. Levin M.Sh., Modular System Design and Evaluation. Sprigner, 2015.

88. Levin M.Sh., On combinatorial optimization for dominating sets (literature survey, new models). Preprint (ResearchGate)), Sep. 4, 2020 DOI: 10.13140/RG.2.2.34919.68006. Concurently: arxiv 2009.09288

89. Li Y., Wu Y., Ai C., Beyah F., On the construction of k-connected m-dominating sets in wireless networks. J. of Comb. Optim., 2012, vol. 23, no. 1, pp. 118–139.

90. Li H., Yang Y., Wu B., 2-edge connected dominating sets and 2-connected dominating sets of a graph. J. of Comb. Optim., 2016, vol. 31, no. 2, pp. 713–724.

91. Liang D., Zhang Z., Liu X., Wang W., Jiang Y., Approximation algorithms for minimum weight partial connected set cover problem. J. of Comb. Optim., 2016, vol. 31, no. 2, pp. 696–712.

92. Liao C.-S., Hsieh T.-J., Guo X.-C., Chu C.-C., Hybrid search for the optimal pmu placement problem on a power grid. EJOR, 2015, vol. 243, no. 3, pp. 985–994.

93. Liedloff M., Todinca I., Villanger Y., Solving capacitated dominating set by using covering by subsets and maximum matching. Discr. Appl. Math., 2014, vol. 168, pp. 60–68.

94. Lin Z., Liu H., Chu X., Leung Y.-W., Stojmenovic I., Maximizing lifetime of connected-dominating set in cognitive radio. In: NETWORKING 2012, Part II, LNCS 7290, Springer, pp. 316–330, 2012.

95. Lin G., Zhu W., Ali M.M., An effective hybrid memetic algorithm for the minimum weight dominating set problem. IEEE Trans. on Evolut. Comput., 2016, vol. 20, no. 6, pp. 892–907.

96. Lin G., Guan J., Feng H., An ILP based memetic algorithm for finding positive influence dominating sets in social networks. Physica A, 2018, vol. 500, pp. 199–209.

97. Liu C.-H., Poon S.-H., Lin J.-Y., Independent dominating set problem revised. Theor. Comp. Sci., 2015, vol. 562, pp. 1–22.

98. Lokshtanov D., Mnich M., Saurabh S., A linear kernel for planar connected dominating set. Theor. Comp. Sci., 2011, vol. 412, pp. 2536–2543.

99. Luo C., Chen W., Yu J., Wang Y., Li D., A novel centralized algorithm for constructing virtual backbones in wireless sensor networks. EURASIP J. on Wir. Commun. and Netw., 2018, art. 55.

100. Min M., Du H., Jia X., Huang C.X., Huang S.C.-H., Wu W., Improving construction for connected dominating set with Steiner tree in Wireless Sensor Networks. J. of Glob. Optim., 2006, vol. 35, pp. 111–119.

101. Mohanty J.P., Mandal C., Reade C., Das A., Construction of minimum connected dominating set in wireless sensor networks. Ad Hoc Netw., 2016, vol. 42, pp. 61–73.

102. Mohanty J.P., Mandal C., Reade C., Distributed construction of minimum Connected Dominaitng Set in wireless sensor network using two-hop information. Comp. Netw., 2017, vol. 123, pp. 137–152.

103. Nguen T.N., Huynh D.T., Connected d-hop dominating sets in mobile ad hoc networks. In: Proc. 2005 4th Int. Symp. on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks, vols. 1 and 2, pp. 138–145, 2006.

104. Nieberg T., Hurink J., A PTAS for the minimum dominating set problem in unit disk graphs. In: WAOA 2005, LNCS 3879, Springer, pp. 296–306, 2005.

105. Noccetti F.G., Gonzalez J.S., Stojmenovic I., Connectivity based k-hop clustering in wireless ad hoc networks. Telecom. Syst., 2003, vol. 22, no. 1–4, pp. 205–220.

106. Nutov Z., Improved approximation algorithms for k-connected m-dominating set problems. Electr. prepr., 6 p., Mar. 13, 2017. http://arxiv.org/abs/1703.04230 [cs.DC]

107. Oliveira C.A.S., Pardalos P.M., Ad Hoc networks: optimization problems and solution methods. In: Cheng M.X., Li Y., Du D.-Z. (eds), Combinatorial Optimization in Communication Networks. Springer, pp. 147–170, 2006.

108. Panda B.S., Pradhan D., A linear time algorithm for computing a minimum paired-dominating set of a convex bipartite graph. Discr. Appl. Math., 2013, vol. 161, pp. 1776–1783.

109. Parthiban N., Rajasingh I., Sundara Rajan R., Minimum connected dominating set for certain circulant networks. Procedia CS, 2015, vol. 57, pp. 587–591.

110. Pinacho-Davidson P., Bouamama S., Blum C., Application of CMSA to the minimum capacitated dominating set problem. In: GECCO 2019, pp. 321–328, 2019.

111. Potluri A., Singh A., Hybrid metaheuristic algorithms for minimum weight dominating set. Appl. Soft Comput., 2013, vol. 13, pp. 76–88.

112. Pradhan D., Panda B.S., Computing a minimum paired-dominating set in strongly orderable graphs. Discr. Appl. Math., 2019, vol. 253, pp. 37–50.

113. Qiao H., Kang L., Gardei M., Du D.-Z., Paired-domination of trees. J. Glob. Optim., 2003, vol. 25, no. 1, pp. 43–54.

114. Rad N.J., Volkmann L., A note on the independent domination number in graphs. Discr. Appl. Math., 2013, vol. 161, pp. 3087–3089.

115. Ramalakshmi R., Radhaktishnan S., Energy efficient stable connected dominating set construction in mobile ad hoc networks. In: CCSIT 2012, Part I, LNICST 84, Springer, pp. 64–72, 2012.

116. van Rooij J.M.M., Bodlaender H.L., Exact algorithms for dominating set. Discr. Appl. Math., 2011, vol. 159, pp. 2147–2164.

117. Ruan L., Du H., Jia X., Wu W., Li Y., Ko K.-I., A greedy approximation for minimum connected dominating sets. Theor. Comp. Sci., 2004, vol. 329, no. 1–3, pp. 325–330.

118. Schaudt O., Schrader R., The complexity of connected dominating sets and total dominating sets with specified induced subgraphs. Inf. Proc. Lett., 2012, vol. 112, pp. 953–957.

119. Shang W., Yao F., Wan P., Hu X., On minimum m-connected k-dominating set problem in unit disc graph. J. of Comb. Optim., 2008, vol. 16, no. 2, pp. 99–106.

120. Shi T., Cheng S., Cai Z., Li Y., Li J., Exploiting connected dominating sets in energy harvest networks. IEEE/ACM Trans. on Netw., 2017, vol. 25, no. 3, pp. 1803–1817.

121. Shi Y., Zhang Z., Du D.-Z., Approximation algorithm for minimum weight (k, m)-CDS problem in unit disk graph. Electr. prepr., 18 p., Jan. 4, 2019. http://arxiv.org/abs/1508.005515 [cs.DM]

122. Simonetti L., da Cunha A.S., Lucena A., The minimum connected dominating set problem: formulation, valid inequalities and a Branch-and-Bound algorithm. In: INOC 2011, LNCS 6701, Springer, pp. 162–169, 2011.

123. Stojmenovic I., Seddigh M., Zunic J., Dominating sets and neighbor elimination-based broadcasting algorithms in wireless networks. IEEE Trans. on Paral. and Distr. Syst., 2002, vol. 13, no. 1, pp. 14–25.

124. Sun X., Yang Y., Ma M., Minimum connected dominating set algorithms for Ad Hoc networks. Sensors, 2019, vol. 19, no. 8, art. 1919.

125. Surendran S., Vijayan S., Distributed computation of connected dominating set for multi-hop wireless networks. Procedia CS, 2015, vol. 63, pp. 482–487.

126. Suzuki A., Mouawad A.E., Nishimura N., Reconfiguration of dominating sets. J. of Comb. Optim., 2016, vol. 32, no. 4, pp. 1182–1195.

127. Thai M., Zhang N., Tiwari R., Xu X., On approximation algorithms of k-connected m-dominating sets in disk graphs. Theor. Comput. Sci., 2007, vol. 385, no. 1–3, pp. 49–59.

128. Tsai Y.T., Lin Y.L., Hsu F.R., Efficient algorithms for the minimum connected domination on trapezoid graphs. Inform. Sci., 2007, vol. 177, no. 12, pp. 2405–2417.

129. Vazquez-Araujo F.J., Dapena A., Salorio M.J.S., Castro-Castro P.-M., Calculation of the connected dominating set considering vertex importance metrics. Entropy, 2018, vol. 20, no. 2, art. 87.

130. Wan P.-J., Alzoubi K.M., A simple heuristic for minimum connected dominating set in graphs. Int. J. of Foundations of Comp. Sci., 2003, vol. 14, no. 2, pp. 323–333.

131. Wan P.-J., Wang L., Yao F., Two-phase approximation algorithms for minimum CDS in wireless ad hoc networks. In: IEEE ICDCS, pp. 337–344, 2008.

132. Wang F., Camacho E., Xu K., Positive influence dominating set in social networks. Theor. Comp. Sci., 2011, vol. 412, no. 3, pp. 265–269.

133. Wang Z., Wang W., Kim J.-M., Thuraisingham B., Wu W., PTAS for the minimum weighted dominating set in growth bounded graphs. J. of Glob. Optim., 2012, vol. 54, no. 3, pp. 641–648.

134. Wang Y., Wang W., Li X.-Y., Weighted connected dominating set. In: Kao M.-Y. (ed), Encyclopedia of Algorithms, Springer, pp. 2359–2363, 2016.

135. Wu J., Li H., A dominating set based routing scheme in Ad Hoc wireless sensor networks. Telecom. Syst., 2001, vol. 18, no. 1–3, pp. 13–36.

136. Wu J., Lou W., Extended multipoint relays to determine connected dominating sets in MANETs. IEEE Trans. on Comput., 2006, vol. 55, pp. 334–347.

137. Wu Y.-F., Xu Y.-L., Chen G.-L., Approximation algorithms for Steiner connected dominating set. J. of Comp. Sci. and Techn., 2005, vol. 20, no. 5, pp. 713–716.

138. Wu W., Du H., Jia X., Li Y., Huang S.C.-H., Minimum connected dominating sets and maximal independent sets in unit disk graphs. Theor. Comp. Sci., 2006, vol. 352, no. 1–3, pp. 1–7.

139. Wu Y., Li Y., Connecting dominating sets. In: H. Liu, Y.W. Leung, X. Chu (eds), Handbook of Ad Hoc and Sensor Wireless Networks: Architecture, Algorithms and Protocols, pp. 19–39, 2009.

140. Wu Y., Gao X., Li Y., A framework of distributed indexing and data dissemination in large scale wireless sensor networks. Optim. Lett., 2010, vol. 4, no. 3, pp. 335–345.

141. Wu L., Du H., Wu W., Hu Y., Wang A., Lee W., PTAS for routing-cost constrained minimum connected dominating set in growth bounded graphs. J. of Comb. Optim., 2015, vol. 30, no. 1, pp. 18–26.

142. Yannakakis M., Gavril F., Edge dominating sets in graphs. SIAM J. on Appl. Math., 1980, vol. 38, no. 3, pp. 364–372.

143. Yang H.-Y., Lin C.-H., Tsai M.-J., Distributed algorithm for efficient construction and maintenance of connected k-hop dominating set in mobile ad hoc networks. IEEE Trans. on Mob. Comput., 2008, vol. 7, pp. 444–457.

144. Yu J.Y., Chong P.H.J., A survey of clustering schemes for mobile Ad Hoc networks. IEEE Commun. Surv. & Tut., 2005, vol. 7, no. 1, pp. 32–47.

145. Yu R., Wang X., Das S.K., EEDTC: energy-efficient dominating tree construction in multi-hop wireless networks. Pervasive and Mob. Comput., 2009, vol. 5, no. 4, pp. 318–333.

146. Yu J., Wang N., Wang G., Constructing minimum extended weakly-connected dominating sets for clustering in ad hoc networks. J. Parallel Distr. Comput., 2012, vol. 72, no. 1, pp. 35–47.

147. Yu J., Wang N., Wang G., Yu D., Connected dominating sets in wireless ad hoc and sensor networks – a comprehensive survey. Comp. Commun., 2013, vol. 36, no. 2, pp. 121–134.

148. Zhang Z., Gao X., Wu W., Du D.-Z., A PTAS for minimum connected dominating set in 3-dimensional wireless sensor networks. J. Glob. Optim., 2009, vol. 45, pp. 451–458.

149. Zhang Z., Zhou J., Huang X., Du D.-Z., Performance guaranteed approximation algorithm for minimum k-connected m-fold dominating set. Electr. prepr., 14 p., Aug. 27, 2016. http://arxiv.org/abs/1608.07634 [cs.DM]

150. Zhao Y., Liao Z., Miao L., On the algorithmic complexity of edge total domination. Theor. Comp. Sci., 2014, vol. 557, pp. 28–33.

151. Zhou J., Zhang Z., Wu W., Xing K., A greedy algorithm for the fault-tolerant connected dominating set in a general graph. J. of Comb. Optim., 2014, vol. 28, no. 1, pp. 310–319.

152. Zou F., Wang Y., Xu X.-H., Li X., Du H., Wan P., Wu W., New approximations for minimum-weighted dominating sets and minimum-weighted connected dominating sets on unit-disk graphs. Theor. Comp. Sci., 2011, vol. 412, no. 3, pp. 198–208.

Note on dominating set problems

Levin M.Sh.

The paper focuses on connected dominating set problems on network: basic optimization formulations of problems, multicriteria problem formulations, and problem formulation with multiset estimate. A literature survey on problems and solving schemes is presented. Numerical examples illustrate connected dominating set problems. New integer programming formulations of dominating set problems (multicriteria problems, problems with multiset estimates) are suggested.

KEYWORDS: combinatorial optimization, connected dominating sets, multicriteria optimization, solving schemes, networks, multiset