

Вероятность бездефолтного состояния пакета токенов из независимых кредитов

В.А. Давыдов*, С.А. Круглик**, Ю.А. Янович**,**

* Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

** Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

*** Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия

Поступила в редколлегию 05.12.2021

Аннотация—Рассмотрен процесс токенизации кредитов в модели равноправного кредитования. Риск инвестора сформулирован в терминах теории надежности. Это позволило записать ограничения на параметры пакета токенов, обеспечивающие заданный риск и доходность при известных параметрах кредитного портфеля.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: равноправное кредитование, токенизация, риск-модель

DOI: 10.53921/18195822_2021_21_4_281

1. ВВЕДЕНИЕ

Кредитный риск относится к одному из основных рисков банковской деятельности. Традиционная модель банковского бизнеса предполагает, что вкладчики, размещающие свои средства в различные банковские продукты, фактически не должны нести каких-либо заранее объявленных рисков. Другими словами, модель предусматривает, что Банк в любой ситуации должен безусловно выполнить все свои обязательства по привлеченным средствам. Дефолт банка в течение года допускается с вероятностью 0,1%. При этом сам банк, выдающий полученные средства в кредиты, перекрывает возникающий риск дефолта заемщиков за счёт собственных средств, а также создаваемых резервов под обесценение ссуд [1].

Как показывает российская практика банковской деятельности, описанная модель работает далеко не всегда. В результате вкладчики сталкиваются с дефолтом самого кредитного учреждения, в котором они разместили свои средства. Для выплаты таким вкладчикам-физическим лицам в РФ создана система страхования вкладов. Однако сумма выплаты одному физическому лицу в рамках данной системы ограничена фиксированной суммой, а на юридических лиц действие система страхования вкладов не распространяется [2, 3]. Каждый случай дефолта кредитной организации имеет свою специфику и обусловлен своими причинами, в числе которых присутствуют и дефолты заемщиков банка, потери по которым не удалось перекрыть за счёт созданных резервов и Собственных средств банка. Как правило, такие причины играют не основную роль в дефолте кредитной организации. В отчетах ЦБ РФ по результатам проверок saniруемых банков указывается о выявленных регулятором фактах рискованной кредитной политики, нарушении банком принципов оценки кредитных рисков, кредитовании зависимых с банком заемщиков и даже о выводе средств менеджментом банка [4, 5]. Все перечисленные риски связаны с самим банком, как звеном в цепи взаимодействия между вкладчиками и заемщиками. Таким образом, риск вкладчика при вложении средств в кредитную организацию не может оцениваться только в соответствии с риск-моделью, описанной в Базель-3, где рассматриваются риски кредитного портфеля банка [6]. Кроме указанных рисков необходимо также учитывать риск того, что менеджмент банка вольно или невольно

будет отклоняться от жёстких требований регулятора, а сами эти отклонения будут выявлены регулятором тогда, когда риск дефолта банка будет практически реализовавшимся.

Практика громких дефолтов последних лет используется ЦБ РФ для доработки системы контроля за деятельностью кредитных организаций и внесения изменений в механизмы регулирования банковской деятельности. Однако, для вкладчиков обанкротившихся банков, эти меры запоздали, т.к. риск дефолта их банка уже реализован [7]. Несомненно, необходимо и дальше дорабатывать систему мониторинга коммерческих банков, делать ее более оперативной и прозрачной. Но при сохранении существующей роли банка, как организации управляющей риском кредитования и страхующей своих вкладчиков от подобных рисков, всегда будет оставаться риск, привносимый в систему взаимодействия вкладчик-заёмщик самим банком. Минимизировать данный риск, а в перспективе и вовсе его устранить, можно при условии перехода на новую модель кредитования, в которой кредитные риски несёт сам вкладчик, становясь инвестором, а управление данными рисками и их минимизация возложена на независимую публичную систему. Основа для такой модели уже существует на финансовом рынке в форме краудлендинга или, так называемого равноправного (P2P) кредитования. Модель P2P кредитования заёмщиков инвестором получила достаточно широкое распространение в последнее десятилетие в целом ряде стран. Лидерами в данной области финансовых услуг являются США, Китай и Великобритания. Несмотря на то, что объёмы такого кредитования пока существенно меньше объёмов выданных банковских кредитов, темпы роста позволяют говорить, что в ближайшем будущем данный сегмент может составить достойную конкуренцию банковскому бизнесу [8, 9].

Основным недостатком системы P2P кредитования является повышенный кредитный риск размещения средств инвестора в одного или нескольких заёмщиков. Инвестор, как правило, не является специалистом в оценке финансового состояния заёмщика, а также может не иметь полного объема ретроспективных данных по заемщику. В результате инвестор вынужден принимать решения в условиях повышенной неопределенности и риска. Это приводит к тому, что процентные ставки по кредитам, выданным в сегменте P2P кредитования, значительно превосходят процентные ставки по банковским займам. Череда дефолтов платформ P2P в Китае в 2018 году подтверждает недостаточную надёжность данного вида финансового инструмента и необходимость его доработки [10].

Для снижения описанного риска инвестора на рынке P2P должны быть выполнены два условия. Во-первых, для каждого Заемщика должна быть дана адекватная оценка вероятности его дефолта и потерь в результате дефолта. Во-вторых, каждый инвестор должен иметь возможность диверсификации своих вложений как можно в большее число независимых заёмщиков. В идеале инвестор может разместить свои средства во всех заёмщиков на рынке P2P, с учетом уровней их доходности, риска, а также суммы каждого кредита. Данная постановка не что иное, как задача составления оптимального по выбранному критерию инвестиционного портфеля с заданными ограничениями. Наиболее известной постановкой задачи нахождения оптимального портфеля является портфель минимального риска Марковца. Модификация данного портфеля с учетом ограничений на максимальную сумму вложения в один актив и дополнительного условия по объёму размещаемых средств, была рассмотрена в работе [11].

Реализация первого условия возможна в перспективе при наличии публичной, открытой системы оценки рисков, куда каждый заёмщик, желающий привлечь средства на P2P рынке, будет предоставлять свою информацию. В данной системе такая информация будет накапливаться, обобщаться, классифицироваться по типам заёмщиков и использоваться для оценки риска дефолта заёмщика, а также уровня потерь при дефолта. Очевидно, что разработка подобной системы оценки рисков, верификация системы и накопление в ней достаточного для требуемой точности оценки исторических данных по большому числу заёмщиков – задача не

одного года. Это не означает, что сегодня адекватная оценка риска заёмщика невозможна. По сути, любой крупный банк, обладает собственной риск-моделью и базой данных по своим заёмщикам. Использование данных такой модели, а также компетенций банковского персонала по обработке заявки на кредит, позволяет с одной стороны адекватно оценить кредитные риски заёмщика, а с другой – предложить банку новую функцию, которую банк будет выполнять в системе P2P кредитования. Реализация второго условия возможна в случае автоматического распределения по определённому алгоритму средств инвестора среди максимального числа независимых заёмщиков. При таком распределении все инвесторы находятся в одинаковом положении, поскольку решение о том куда вложить средства им предлагается системой. В результате вложения всех инвесторов имеют одинаковые параметры по сроку, доходности и риску. Различаются только объёмы вложений, которые регулируются числом единиц приобретаемого инструмента. Это делает возможным организацию ликвидного вторичного рынка такого инструмента в виде торговой площадки.

Для защиты вложений инвесторов, а также для подтверждения прав при перепродаже нового финансового инструмента на вторичном рынке, данные о том, какая сумма была вложена инвестором и в какого заёмщика, должны быть публичны и надёжно защищены. Такую функцию хорошо выполняет технология распределённого реестра. С учетом принятия в третьем чтении закон закона о ЦФА, в РФ разрешено использование токенов, как цифровых активов, которые подтверждают права владельца на определенную часть задолженности определённого заёмщика. В результате принятия указанного закона реализация предложенного финансового инструмента стала возможной [12, 13].

Роль банка в предлагаемом финансовом инструменте по сравнению с работой по классической схеме существенно меняется. Как отмечалось ранее, банк становится посредником, который анализирует приступившие заявки, присваивает потенциальным заёмщикам в соответствии с требованиями Базель-3 определённые параметры вероятности дефолта PD , а также доли потерь при дефолте LGD , и выдаёт кредит. Далее, в отличие от классической модели банковского кредитования, банк не ждёт возврата заёмщиком полученного кредита и гашения процентов, а сразу после выдачи дробит каждый из выданных кредитов на множество одинаковых частей – токенов, формирует из полученных токенов по определённому правилу пакеты и продаёт такие пакеты на торговой площадке первичным инвесторам.

Для банка предложенный инструмент представляет интерес в том случае, если при продаже выданного портфеля инвесторам в виде пакетов токенов, на банке не остаётся каких-либо рисков по данным кредитам и, соответственно, не формируется резервов под обеспечение ссуд. Тогда за свою подготовку кредитного портфеля для первичных инвесторов, банк зарабатывает при определенных условиях комиссию на перепродаже портфеля и может тиражировать данную операцию только исходя из ограничения загрузки своих сотрудников, занимающихся анализом заёмщиков, выдачей кредитов их возвратом. Фактически, если рассматривать процесс работы с кредитами, технология работы банка не меняется, но риски по выданному портфелю несут инвесторы.

В результате вложения средств инвестора, например, во все кредиты, выданные банком, пропорционально сумме таких кредитов получаем, что инвестор имеет свой миниатюрный портфель, зеркально отражающий риски банка по всему банковскому портфелю. Таким образом, инвестор принимает на себя определенную долю фактического риска кредитного портфеля, но не несёт рисков, связанных с самим банком, сформировавшим данный портфель.

Далее более подробно будет рассмотрен процесс токенизации кредитов и формирования из них пакетов токенов, а также ограничения, налагаемые на параметры пакета токенов, которые обеспечивают инвестору заданный риск и доходность при известных параметрах кредитного портфеля. При этом будет показано, что весь риск банка по токенизируемому кредитному

портфелю переносится на инвестора. Часть портфеля в результате такой процедуры может остаться на банке и по-прежнему приносить банку доход, но уже без риска, который был передан инвесторам.

2. РИСК-МОДЕЛЬ БЛОКА ТОКЕНИЗАЦИИ

Будем рассматривать процедуру деления на одинаковые части (токены) каждого кредита, входящего в кредитный портфель Банка и последующую процедуру формирования пакетов из полученных токенов. Назовем такие процедуры токенизацией, а кредитный портфель – токенизируемым портфелем. Предположим, что все кредиты, входящие в токенизируемый портфель, принадлежат различным, не связанным друг с другом заемщикам. Если данное условие не выполняется, то всегда можно рассматривать кредиты группы заемщиков, как один большой кредит и в результате такого рассмотрения снова получить портфель не связанных заемщиков, но уже с меньшим числом кредитов. Таким образом, вероятность дефолта любого из токенов, образующих пакет, можно рассматривать, как событие, независимое от дефолта других токенов.

Введем ряд обозначений. Пусть n – число токенов в одном пакете, N – число однотипных кредитов в кредитном портфеле, I – сумма в рублях, за которую реализуется один токен любого из кредитов при первичном размещении, DI – доходность в % годовых, которую планирует получить первичный инвестор на вложенную сумму I при первичном размещении, T – срок в днях, на который инвестор вкладывает средства при первичном размещении.

Каждый кредит с номером $1 \leq i \leq N$ из токенизируемого портфеля описывается, согласно терминологии Базель-3, параметрами: PD_i – вероятность дефолта кредита i в течение срока T , LGD_i – уровень потерь при дефолте кредита i в течение срока T , E_i – сумма задолженности по кредиту i в момент токенизации, D_i – ставка дохода в процентах годовых кредита i в течение срока T , $EAD_i = E_i(1 + D_i)$ – сумма, подверженная риску дефолта в течении срока T , p_i – сумма кредита с номером $1 \leq i \leq N$, соответствующая одному токенту.

Сумма, получаемая банком по кредиту от заемщика, складывается из двух вариантов события. В случае успешной реализации кредитной стратегии в течение срока T с вероятностью $1 - PD_i$ банк получает сумму $E_i(1 + D_i \frac{T}{365})$. В случае реализации дефолта с вероятностью PD_i банк получает сумму $E_i(1 + D_i \frac{T}{365})(1 - LGD_i)$. Таким образом, математическое ожидание $M[D_i]$ доходности в процентах годовых удовлетворяет следующим тождествам:

$$\begin{aligned} M[D_i] \frac{T}{365} &= \frac{(1 - PD_i) \cdot E_i \cdot (1 + D_i \frac{T}{365}) + PD_i \cdot E_i \cdot (1 + D_i \frac{T}{365})(1 - LGD_i) - E_i}{E_i} \\ &= D_i - (\frac{365}{T} + D_i)PD_iLGD_i. \end{aligned}$$

Дефолтом для пакета токенов будем называть событие, когда пакет имеет в момент завершения интервала T отрицательную доходность. Другими словами, дефолт – это событие, когда инвестору не удалось вернуть в полном объеме средства, вложенные при первичном размещении в пакет. Рассмотрим разницу вклада Δ_i в итоговую стоимость пакета токенов, которую дает один токен с параметрами PD_i, D_i, LGD_i, p_i кредита номером $1 \leq i \leq N$ из токенизируемого портфеля

$$\Delta_i = p_i \left(1 + D_i \frac{T}{365}\right) - p_i \left(1 + D_i \frac{T}{365}\right) (1 - LGD_i) = p_i \left(1 + D_i \frac{T}{365}\right) LGD_i.$$

Будем так выбирать p_i , чтобы величина Δ_i была равна Δ для всех кредитов с номерами $1 \leq i \leq N$ из токенизируемого портфеля. Тогда справедлива формула

$$p_i = \frac{\Delta}{\left(1 + D_i \frac{T}{365}\right) LGD_i}.$$

Будем считать, что максимальное число допустимых дефолтных токенов в пакете равно l . Тогда для выполнения условия дефолта пакета должно выполняться равенство

$$n \cdot DI \frac{T}{365} \cdot I \geq l \cdot \Delta.$$

Тогда для величины p_i выполняется условие

$$p_i \leq \frac{n \cdot DI \frac{T}{365} \cdot I}{l \cdot \left(1 + D_i \frac{T}{365}\right) \cdot LGD_i}.$$

Полученная в результате сумма кредита p_i , соответствующая одному токену, дает при покупке токена за сумму I различную максимальную стоимость в случае отсутствия дефолта по кредиту. Расчет такой максимальной стоимости удовлетворяет условию

$$p_i \left(1 + D_i \frac{T}{365}\right) \leq \frac{n \cdot DI \frac{T}{365} \cdot I}{l \cdot LGD_i}.$$

Для того, чтобы риск, передаваемый от Банка Инвестору, был полностью компенсирован вкладом инвестора, необходимо, чтобы потери на одном токене не превышали стоимость токена не в дефолте. Другими словами, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} I \cdot \left(1 + DI \frac{T}{365}\right) \geq \Delta \\ \frac{n}{l} \cdot DI \frac{T}{365} \cdot I \geq \Delta, \end{cases}$$

$$I \cdot \left(1 + DI \frac{T}{365}\right) \geq \frac{n}{l} \cdot DI \frac{T}{365} \cdot I.$$

Из данного неравенства получаем ограничение на минимальное значение доли допустимых дефолтных токенов в пакете l/n

$$\frac{l}{n} \geq \left(1 + \frac{365}{T \cdot DI}\right)^{-1}. \tag{1}$$

Чтобы инвестор, приобретающий в пакете из n токенов, токен за сумму I , получил в результате отсутствия дефолта соответствующего кредита заявленную доходность DI , необходимо в конце периода T часть дохода b_i от суммы кредита отдать банку

$$p_i \left(1 + D_i \frac{T}{365}\right) - b_i = I \cdot \left(1 + DI \frac{T}{365}\right),$$

$$b_i = I \cdot \left(\frac{n \cdot DI \frac{T}{365}}{l \cdot LGD_i} - \left(1 + DI \frac{T}{365}\right)\right).$$

Для того, чтобы инвестор мог отдать банку сумму b_i в конце периода, необходимо, чтобы в начале периода банк предоставил инвестору заем со ставкой D_i в размере

$$z_i = \frac{b_i}{1 + D_i \frac{T}{365}}.$$

Таким образом, инвестор в начале периода выкупает у банка задолженность по кредиту p_i , соответствующую одному токену за сумму $I + z_i$. В результате доля привлечения средств от суммы портфеля составляет

$$\frac{I}{p_i} = \frac{l \cdot (1 + D_i \frac{T}{365}) \cdot LGD_i}{n \cdot DI \frac{T}{365}},$$

а заработок банка d_i от продажи одного токена вычисляется по формуле

$$d_i = I + z_i - p_i = I + \frac{b_i}{1 + D_i \frac{T}{365}} - \frac{n \cdot DI \frac{T}{365} \cdot I}{l \cdot (1 + D_i \frac{T}{365}) \cdot LGD_i} = I \left(\frac{1 - \frac{DI}{D_i}}{\frac{365}{TD_i} + 1} \right).$$

То есть, заработок банка d_i при продаже токена зависит от соотношения DI и D_i . При условии выполнения неравенства $D_i > DI$ заработок положительный. В случае $D_i < DI$ заработок отрицательный. Доля заработка Банка при размещении пакетов токенов от объема привлекаемых средств составляет

$$\frac{d_i}{I} = \frac{1 - \frac{DI}{D_i}}{\frac{365}{TD_i} + 1}.$$

Кроме дохода при гашении токена, банк также получает доход по займу, предоставленному инвестору на покупку токена. Сумма дохода рассчитывается по формуле

$$v_i = z_i D_i \frac{T}{365} = \frac{b_i D_i}{1 + D_i \frac{T}{365}} \frac{T}{365} = \frac{b_i}{\frac{365}{TD_i} + 1}.$$

Итоговая сумма дохода банка рассчитывается по формуле

$$d_i + v_i = I \left(\frac{1 - \frac{DI}{D_i}}{\frac{365}{TD_i} + 1} \right) + \frac{b_i}{\frac{365}{TD_i} + 1} = \frac{I \cdot DI}{\frac{365}{TD_i} + 1} \left(\frac{n \cdot \frac{T}{365}}{l \cdot LGD_i} - \frac{T}{365} - \frac{1}{D_i} \right).$$

Процентная ставка без рискового дохода банка NR_i при токенизации кредита с номером $1 \leq i \leq N$ вычисляется по формуле

$$NR_i = \frac{d_i + v_i}{p_i} \cdot \frac{365}{T} = D_i - \frac{l \cdot LGD_i}{n} \left(\frac{365}{T} + D_i \right).$$

Сравнивая полученную доходности NR_i с формулой для математического ожидания доходности кредита

$$M[D_i] = D_i - \left(\frac{365}{T} + D_i \right) PD_i LGD_i,$$

получаем, что данные величины совпадают при условии выполнения равенства

$$PD_i = \frac{l}{n}.$$

Если выполняется неравенство

$$PD_i \geq \frac{l}{n}, \quad (2)$$

доходность банка по токенизируемому кредиту будет больше или равна величины математического ожидания дохода по данному кредиту. В случае обратного неравенства – доходность по токенизируемому кредиту будет ниже математического ожидания доходности по данному кредиту.

Рассмотрим границы (1) и (2) на долю дефолтных токенов в пакете. В результате получим неравенство, увязывающее величины PD_i, T и DI

$$PD_i \geq \frac{l}{n} \geq \left(1 + \frac{365}{T \cdot DI}\right)^{-1},$$

$$\frac{365}{T} \left(\frac{PD_i}{1 - PD_i}\right) \geq DI.$$

В случае дефолта кредита получаем, что инвестор будет иметь на купленном токене результат

$$p_i \left(1 + D_i \frac{T}{365}\right) (1 - LGD_i) - b_i = I \cdot \left(1 + DI \frac{T}{365}\right) - \Delta.$$

Таким образом, мы получили результат вложения в инвестора в токен который равен $I \left(1 + DI \frac{T}{365}\right)$ в случае отсутствия дефолта, и $I \left(1 + DI \frac{T}{365}\right) - \Delta$ в случае дефолта. Другими словами, вклады всех токенов в итоговый результат пакета одинаковы.

Поскольку снижение стоимости одного токена в случае дефолта по сравнению со случаем отсутствия дефолта для всех кредитов портфеля одинаково и равно Δ , получаем, что все риски кредитного портфеля перешли на пакеты токенов, при условии, что любой токен любого кредита из кредитного портфеля входит в один из пакетов токенов. В следующем разделе будет показано, как можно ограничить риск инвестора, приобретающего пакет токенов, используя результаты теории надежности.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ РИСКА ДЕФОЛТА ПАКЕТА

Теория надежности широко применяется для расчета показателей безаварийной работы технических устройств. Традиционно в данной теории рассматриваются, так называемые, невосстанавливаемые объекты. Наиболее важные показатели надежности невосстанавливаемых объектов – показатели безотказности, к которым относятся: вероятность безотказной работы (ВБР), плотность распределения отказов (ПРО), интенсивность отказов (ИО), средняя наработка до отказа (СНО) [14, 15].

Будем рассматривать каждый токен, входящий в пакет, в качестве одного из n объектов устройства, а сам пакет – устройством, состоящим из n объектов. Отказ объекта в нашем случае будет означать дефолт токена. При условии формирования токенов в соответствии с правилами, изложенными в предыдущем разделе, получаем, что все токены (объекты) составляющие пакет (устройство) дают одинаковый вклад в итоговую стоимость пакета, как для случая дефолта токена, так и при отсутствии дефолта.

Для некоторых систем условия работы таковы, что для работоспособности системы необходимо, чтобы по меньшей мере $n - t = r$ элементов из n были работоспособны. В случае пакета токенов и определения дефолта пакета, как одновременного дефолта более чем t токенов в пакете, получаем для описания риск-модели аналоги показателей надежности токенов и пакета: вероятность без дефолтного состояния (ВБС), плотность распределения дефолтов (ПРД), интенсивность дефолтов (ИД), средняя время до наступления дефолта (СВД).

Показатели надежности представляются в двух формах: статистической (выборочные оценки) и вероятностной. Выборочные оценки показателей получаются по результатам наблюдений за кредитами на наступление дефолта.

Допустим, что в ходе наблюдений какого-то числа однотипных независимых кредитов получено конечное число параметра: время до наступления дефолта. Взятый набор кредитов

представляют собой выборку некоего объема из общей генеральной совокупности, имеющей неограниченный объем данных о времени до наступления дефолта.

Количественные показатели, определенные для генеральной совокупности, являются истинными (вероятностными) показателями, поскольку объективно характеризуют случайную величину – время до наступления дефолта. Показатели, определенные для выборки, и, позволяющие сделать какие-то выводы о случайной величине, являются выборочными (статистическими) оценками. При достаточно большом числе кредитов (большой выборке) оценки приближаются к вероятностным показателям. Для обозначения статистических оценок будем использовать знак $\hat{\cdot}$. Рассмотрим следующую схему испытаний для оценки дефолта. Пусть банком выданы N одинаковых (т.е. относящихся к одному типу кредитного продукта) независимых кредитов. Наблюдение за каждым кредитом проводится до его дефолта или до момента полного гашения.

Введем следующие обозначения: $\{t_1, t_2, \dots, t_O\}$ – случайная величина времени до дефолта или момента полного гашения; $N(t)$ – число кредитов, не перешедших в дефолт к моменту времени t ; $n(t)$ – число кредитов, перешедших в дефолт к моменту времени t ; $\Delta n(t, t + \Delta t)$ – число кредитов, перешедших в дефолт в интервале времени $[t, t + \Delta t]$; Δt – длительность интервала, в котором анализируется событие наступления дефолта.

3.1. Вероятность бездефолтного состояния (ВБС)

Статистическая оценка ВБС (эмпирическая функция) определяется отношением числа $N(t)$ кредитов, не перешедших в дефолт к моменту времени t , к общему числу кредитов в момент $t=0$ их единовременной выдачи: $\hat{P}(t) = \frac{N(t)}{N}$. Оценку ВБС можно рассматривать как показатель доли не перешедших в дефолт кредитов к моменту времени t . Поскольку $N(t) = N - n(t)$, то $\hat{P}(t) = 1 - \frac{n(t)}{N} = 1 - \hat{Q}(t)$, где $\hat{Q}(t) = n(t)/N$ – оценка вероятности дефолта (ВД). В статистическом определении оценка ВД представляет эмпирическую функцию распределения дефолтов. Поскольку события, заключающиеся в наступлении или не наступлении дефолта к моменту времени t , являются противоположными, то

$$\hat{P}(t) + \hat{Q}(t) = 1.$$

Вероятностное определение ВБС $P(t) = P\{F \geq t\}$. Таким образом, ВБС есть вероятность того, что случайная величина F – интервала без дефолтного состояния кредита, окажется не меньше некоторой заданной величины t .

ВД является функцией распределения случайной величины F и представляет из себя вероятность того, что F окажется меньше некоторой заданной величины t

$$Q(t) = P\{F < t\}.$$

С ростом числа N (увеличение выборки независимых кредитов) $\hat{P}(t)$ и $\hat{Q}(t)$ сходятся по вероятности (приближаются по значениям) к $P(t)$ и $Q(t)$

$$P \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \hat{P}(t) - P(t) \right| = 0 \right\} = 1.$$

Практический интерес представляет определение ВБС в интервале времени $[t, t + \Delta t]$, при условии, что кредит не находился в состоянии дефолта в момент t . Определим эту вероятность, используя теорему умножения вероятностей, и выделив следующие события:

$A = \{\text{без дефолтное состояние кредита до момента времени } t\}$;

$B = \{\text{отсутствие дефолта кредита в интервале времени } [t, t + \Delta t]\}$;

$C = A \cap B = \{\text{без дефолтное состояние кредита до момента времени } t + \Delta t\}$.

События A и B являются зависимыми. Поэтому

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A).$$

Условная вероятность $P(B | A)$ представляет ВБС $P(t, t + \Delta t)$ в интервале времени $[t, t + \Delta t]$, поэтому

$$P(B | A) = P(t, t + \Delta t) = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{P(t + \Delta t)}{P(t)}.$$

Тогда ВД в интервале времени $[t, t + \Delta t]$ равна:

$$Q(t, t + \Delta t) = 1 - P(t, t + \Delta t) = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{P(t)}.$$

3.2. Плотность распределения дефолтов (ПРД)

Статистическая оценка ПРД определяется отношением числа кредитов $\Delta n(t, t + \Delta t)$, перешедших в дефолт в интервале времени $[t, t + \Delta t]$, к произведению общего числа кредитов N на длительность интервала Δt

$$\hat{f}(t) = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N \cdot \Delta t}.$$

Поскольку $\Delta n(t, t + \Delta t) = n(t, t + \Delta t) - n(t, t)$ где $n(t, t + \Delta t)$ – число кредитов, перешедших в дефолт к моменту времени $t + \Delta t$, то оценку ПРД можно представить:

$$\hat{f}(t) = \frac{n(t, t + \Delta t) - n(t, t)}{N \cdot \Delta t} = \frac{\hat{Q}(t + \Delta t) - \hat{Q}(t)}{\Delta t} = \frac{\hat{Q}(t, t + \Delta t)}{\Delta t},$$

где $\hat{Q}(t, t + \Delta t)$ – оценка приращения ВД в интервале времени $[t, t + \Delta t]$.

Оценка ПРД представляет «частоту» дефолтов, т. е. число дефолтов за единицу времени, отнесенное к первоначальному числу кредитов.

Вероятностное определение ПРД следует из полученного выражения при стремлении длительности интервала Δt к нулю и увеличения объема выборки кредитов $N \rightarrow \infty$

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\hat{Q}(t + \Delta t) - \hat{Q}(t)}{\Delta t} = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d[1 - P(t)]}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}.$$

ПРД по существу является плотностью распределения (плотностью вероятности) случайной величины F – интервала без дефолтного состояния кредита. Поскольку $Q(t)$ является неубывающей функцией своего аргумента, то $f(t) \geq 0$. $Q(t)$ представляет собой площадь под кривой $f(t)$ слева от t , а $P(t)$ – площадь под кривой $f(t)$ справа от t .

$$\int_0^\infty f(t) dt = \int_0^t f(t) dt + \int_t^\infty f(t) dt = Q(t) + P(t) = 1.$$

3.3. Интенсивность дефолтов (ИД)

Статистическая оценка ИД определяется

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta n(t, t + \Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t}$$

отношением числа кредитов $\Delta n(t, t+\Delta t)$, перешедших в дефолт в интервале времени $[t, t+\Delta t]$ к произведению числа $N(t)$ не дефолтных кредитов в момент t на длительность интервала Δt .

Вероятностное определение ИД получим, умножив и поделив правую часть полученного выражения на N

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta n(t, t+\Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t} \cdot \frac{N}{N} = \frac{\Delta n(t, t+\Delta t)}{N \cdot \Delta t} \cdot \frac{N}{N(t)} = \frac{\hat{Q}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\hat{P}(t)}.$$

При стремлении $\Delta t \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ получаем

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{Q}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\hat{P}(t)} = \frac{Q(t)}{dt} \cdot \frac{1}{P(t)} = \frac{f(t)}{P(t)}.$$

3.4. Уравнение связи показателей надежности

Выразим ВБС $P(t)$ через ИД $\lambda(t)$, используя выражение для интенсивности отказов

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = -\frac{f(t)}{P(t)} \cdot dt = -\lambda(t) \cdot dt.$$

Интегрируя от 0 до t и принимая во внимание, что при $t=0$ ВБС кредита $P(0) = 1$, получаем

$$\int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = \ln P(t) \Big|_0^t = \ln P(t) = \int_0^t \lambda(t) dt.$$

Тогда уравнение связи основных показателей надежности имеет вид:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}.$$

Величина $\lambda(t)dt$ – вероятность того, что кредит, не попавший в дефолт в интервале $[0, t]$, окажется в дефолте в интервале $[t, t+\Delta t]$. Уравнение связи показывает, что все показатели надежности $P(t)$, $Q(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ равноправны в том смысле, что зная один из них, можно определить другие.

3.5. Экспоненциальное распределение

Время до дефолта для кредитов, не меняющих своих характеристик на анализируемом временном интервале $[t, t+\Delta t]$: $\lambda(t) = \lambda = const$ имеет экспоненциальное распределение. То есть, ПРД описывается выражением

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t},$$

где λ – параметр распределения, который по результатам испытаний принимается равным $\lambda = \frac{1}{\hat{T}_0}$, где \hat{T}_0 – оценка среднего времени до наступления дефолта. Остальные показатели при известной $f(t)$, определяются следующим образом.

1. Вероятность бездефолтного состояния (ВБС): $P(t) = e^{-\lambda t}$.
2. Вероятность дефолта (ВД): $Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
3. Интенсивность дефолта (ИД): $\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$.

Числовые характеристики случайной величины СВД определяются:

1. среднее время до наступления дефолта

$$T_0 = \int_0^\infty P(t) dt = \frac{1}{\lambda}.$$

2. дисперсия среднего времени до наступления дефолта

$$D = \int_0^\infty (t - T_0)^2 f(t) dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.6. Вероятность бездефолтного состояния для пакета токенов, составленного из независимых кредитов

Из условия составления пакета токенов, состоящего из n токенов следует, что дефолт пакета (т.е. отрицательная доходность пакета) возможна только при условии одновременного дефолта более l токенов пакета. Обозначим число токенов пакета не перешедших в дефолт $r = n - l$. По условиям формирования пакета токенов имеем независимость дефолта каждого токена, входящего в пакет. ВБС такой системы определяется с помощью биномиального распределения. Для пакета токенов не дефолтное состояние сохраняется при условии того, что число i не дефолтных токенов в пакете удовлетворяет условию $r \leq i \leq n$. Пусть все токены, входящие в пакет одинаковы и имеют одинаковую вероятность бездефолтного состояния $P(t)$ и одинаковую вероятность дефолта $Q(t) = 1 - P(t)$. Тогда, для вероятности бездефолтного состояния пакета $P_{r|n}(t)$ справедливо тождество

$$P_{r|n}(t) = \sum_{i=r}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} P^i(t) Q^{n-i}(t).$$

Для случая постоянной интенсивности получаем

$$P_{r|n}(t) = \sum_{i=r}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} e^{-\lambda t i} \frac{(1 - e^{-\lambda t})^n}{(1 - e^{-\lambda t})^i}.$$

Пусть токенизируемый портфель банка состоит из $N \geq n$ независимых кредитов с одинаковыми параметрами $PD_i = PD$, $LGD_i = LGD$, $D_i = D$, $1 \leq i \leq N$. Тогда вероятность бездефолтного состояния пакета вычисляется по формуле

$$P_{n-l|n}(t) = 1 - \sum_{i=0}^l \frac{n!}{i!(n-i)!} PD^i (1 - PD)^{n-i}.$$

Далее мы сформулируем утверждение основной теоремы, которая позволяет при достаточно большом значении n полностью переносить кредитный риск банка на покупателей пакета токенов, при заданном уровне риска на пакете. В предыдущем разделе было показано, что при условии выполнения неравенства $PD \geq \frac{l}{n}$, без рискованной доходности банка по токенизируемому кредиту $NR = D - \frac{l}{n} \cdot LGD \cdot (\frac{365}{T} + D)$ будет больше или равна величины математического ожидания дохода по данному кредиту $M[D] = D - PD \cdot LGD \cdot (\frac{365}{T} + D)$. Пусть задана малая неотрицательная величина δ и для выполняется условие $PD = \frac{l}{n} + \delta$.

Теорема 1. Для токенизируемого портфеля, состоящего из независимых кредитов с одинаковыми параметрами $PD_i=PD$, $LGD_i=LGD$, $D_i=D$, $1 \leq i \leq N$ и для любых сколь угодно малых значений $\epsilon \geq 0$ и $\delta \geq 0$ найдется такое значение \hat{n} , при котором для $n \geq \hat{n}$ выполняются условия

$$\left\{ \begin{array}{l} PD \geq \frac{l}{n} + \delta \\ NR \geq M[D] \\ P_{n-l|n}(t) \geq 1 - \epsilon. \end{array} \right.$$

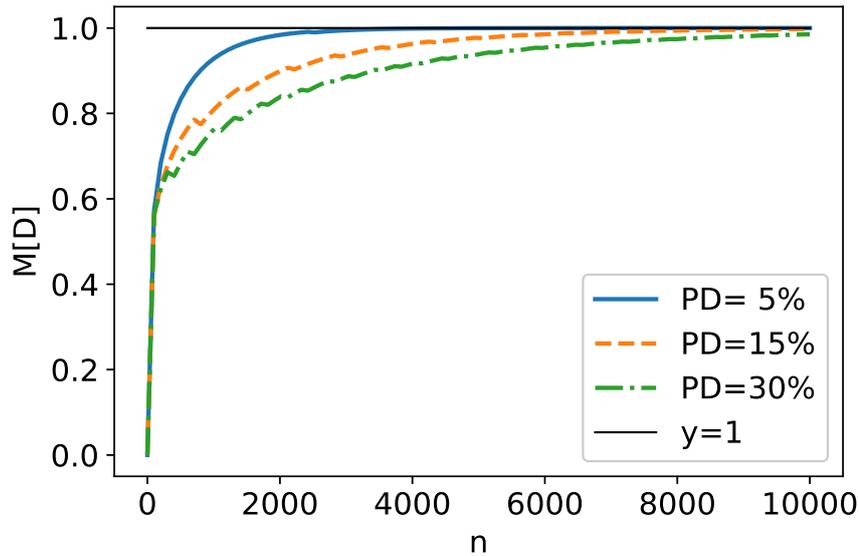


Рис. 1. Иллюстрация теоремы 1 для $\delta = 0,01$

Доказательство. Из определения NR и $M[D]$ следует, что при условии $PD \geq \frac{\delta}{n}$ имеет место неравенство

$$NR \geq M[D].$$

Надо доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-n(PD-\delta)|n}(t) = 1.$$

Что, по теореме Муавра–Лапласа, эквивалентно

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \sum_{i=0}^{n(PD-\delta)} \frac{n!}{i!(n-i)!} PD^i (1-PD)^{n-i} &= 1 - \Phi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(PD-\delta) - nPD}{\sqrt{nPD(1-PD)}} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n\delta}{\sqrt{nPD(1-PD)}} \right) = 1 - \Phi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n\delta}{\sqrt{n\delta(1-\delta)}} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\delta}{1-\delta}} \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n}) \right) = 1 - \Phi(-\infty) = 1, \end{aligned}$$

где Φ – плотность стандартного нормального распределения.

Иллюстрация теоремы для $\delta = 0,01$ приведена на Рисунке 1. Результат теоремы позволяет сформулировать утверждение о том, что математическое ожидание доходности Банка по кредитам может быть доходностью Банка без риска в результате процедуры токенизации кредитов и дальнейшего формирования пакетов с достаточно большим числом токенов в пакете. Кроме того весь риск по кредитам Банка переносится на сформированные пакеты токенов, риск отрицательной доходности которых может быть сделан сколь угодно малым.

По сути это означает, что кредитный риск банковского портфеля «растворился» в риске инвесторов, приобретающих пакеты токенов, который также стремиться к нулю. Разумеется, это не означает полное исчезновение риска. Результат достижения минимального риска инвестора на приобретаемом пакете напрямую связан с ростом числа токенов в пакете, которое не может быть больше числа кредитов в токенизируемом портфеле.

Если предположить, что все кредиты, входящие в портфель банка, обладают не только одинаковыми параметрами $PD_i = PD$, $LGD_i = LGD$, $D_i = D$, $1 \leq i \leq N$, но и одинаковой суммой задолженности $E_i = E$, то можно выбрать $n = N$. Тогда все пакеты токенов будут одинаковы и включать по одному токену из каждого кредита. При достаточно большом значении n , вероятность дефолта любого пакета токенов удовлетворяет условию $P_{n-l|n}(t) \geq 1 - \epsilon$ для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$. В результате риск пакета полностью соответствует риску Банка на всем портфеле до его токенизации.

По банковским правилам резервированию по кредитному риску подлежит не портфель в целом, а каждый входящий в него кредит. Поэтому без токенизации и продажи пакетов токенов, Банк вынужден будет создать резервы под каждый кредит в соответствии с требованиями Базель-3. При передаче кредитного риска инвесторам, приобретающим пакеты, Банк может распустить ранее созданные резервы по кредитному портфелю. Инвестор, приобретающие пакет токенов, теоретически может не получить никакой доходности на вложенные средства в результате реализации рисков, который перешел на пакет, но вероятность такого события заранее известна и может быть сделана величиной, соответствующей надежности банков по правилам Базеля-3.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен процесс токенизации кредитов и формирования из них пакета токенов в модели равноправного кредитования. Риск инвестора сформулирован в терминах теории надежности. Приведены ограничения на параметры пакета токенов, обеспечивающие инвестору заданный риск и доходность при известных параметрах кредитного портфеля. Также показано, что весь риск банка по токенизируемому кредитному портфелю переносится на инвестора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *World Bank, International Finance Corporation. Doing Business 2014: Understanding Regulations for Small and Medium-Size Enterprises: The World Bank. 2013.*
2. *Российская Федерация. Федеральный закон от 23.12.2003 г. №177-ФЗ О страховании вкладов физических лиц в банках Российской Федерации. 2003.*
3. *Российская Федерация. Федеральный закон от 10 июля 2002 г. №86-ФЗ О Центральном банке Российской Федерации (Банке России). 2002.*
4. *Центральный банк Российской Федерации. www.cbr.ru/banking_sector/likvidbase/*
5. *Центральный банк Российской Федерации. www.cbr.ru/banking_sector/PrBankrot/bfo/*
6. *Basel Committee on Banking Supervision. Regulatory Consistency Assessment Programme (RCAP): Assessment of Basel III risk-based capital regulations – Russia: Bank for International Settlements. 2016.*
7. *РБК. АСВ подстраховало ЦБ. www.rbc.ru/newspaper/2017/10/13/59df617a9a7947c6698e1c0e. 2017*
8. *Bachmann A., Becker A., Buerckner D., Hilker M., Kock F., Lehmann M., Tiburtius P., Funk B. Online peer-to-peer lending - A literature review, J. Internet Banking Commerc. 2011. No. 2. V. 16. P. 1–18.*
9. *Lending Club Corporation. Lending Club Reports Fourth Quarter and Full Year 2019 Results. Lending-Club. 2020. P. 1–15.*
10. *Jiefei L., The dramatic rise and fall of online P2P lending in China, Join TechCrunch+ techcrunch.com/2018/08/01/the-dramatic-rise-and-fall-of-online-p2p-lending-in-china/*
11. *Давыдов В.А., Круглик С.А., Янович Ю.А. Сравнение рисков банковского и равноправного кредитования, Автоматика и телемеханика, 2021, номер 12, стр. 138–153.*
12. *Davydov V., Yanovich Y. Optimal Portfolio Sold-Out via Blockchain Tokenization, Proceedings of the 2020 2nd International Electronics Communication Conference. ACM. 2020. P. 129–136.*

13. Davydov V., Yanovich Y. *Financial Instruments Generation via Tokenization into Commodity*, 2nd Conference on Blockchain Research & Applications for Innovative Networks and Services (BRAINS). IEEE. 2020. P. 25–29.
14. Unnikrishnan Nair N., Sankaran P.G., and Balakrishnan N. *Reliability Modelling and Analysis in Discrete Time*, Academic Press, 2018.
15. Шубин Р. А. *Надёжность технических систем и техногенный риск*, Издательство ФГБОУ ВПО ТГТУ, 2012.

Probability of default-free state for token package from independent loans

V.A. Davydov, S.A. Kruglik, Y.A. Yanovich

We consider the process of loans tokenization in the peer-to-peer lending model. Investor risk is formulated in terms of reliability theory. This allows us to write restrictions on the parameters of the token package that provide a given risk and profitability for the known parameters of the loan portfolio.

KEYWORDS: P2P lending, tokenization, risk model