

О моделях кластеризации на основе раскраски ребер графа

Марк Ш. Левин

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия
email: mslevin@acm.org*

Поступила в редколлегию 27.06.2022

Аннотация—В статье рассматривается комбинаторная задача кластеризации на основе раскраски ребер графа. Представлен краткий обзор задач раскраски графов и их применения в сетях связи и компьютерных системах. Описана основная математическая постановка задачи кластеризации на основе раскраски ребер графа. Предложена многокритериальная постановка задачи. Приведены иллюстративные численные примеры для рассмотренных задач.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: комбинаторная оптимизация, кластеризация, раскраска графа, системы связи

DOI: 10.53921/18195822_2022_22_2_119

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние года задачи комбинаторной кластеризации привлекают внимание исследователей [43]. Данная статья посвящена задаче кластеризации на основе раскраски ребер графа. Эта задача может быть отнесена к классу задач комбинаторной кластеризации. В работе описаны основная известная задача кластеризации на основе раскраски ребер графа и предложена ее многокритериальная версия. Приведен краткий структурированный обзор (в виде таблицы) задач раскраски графов и областей их применения. Особое внимание уделяется приложениям в области систем связи. Для иллюстрации рассматриваемых задач приведены численные примеры. Данная статья основана на препринте [44].

2. РАСКРАСКА ГРАФА И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ РАСКРАСКИ РЕБЕР

Задачи раскраски графов [15,26,34,35] играют важную роль в компьютерных науках, технике и управлении, например: (а) размещение вычислительных ресурсов [18,26], (б) управление частотами, планирование расписаний в системах связи (e.g., [15,22,36,51,65]), (в) составление специальных расписаний (timetabling) [33,46,64].

Рис. 1–3 иллюстрируют базовые задачи раскраски графа для исходного неориентированного графа. Исходный граф $G = (A, B)$ представлен на Рис. 1:

(1) множество вершин: $A = \{a_1, \dots, a_9\}$,

(2) множество ребер: $B = \{ b_1 = (a_1, a_2), b_2 = (a_1, a_5), b_3 = (a_2, a_3), b_4 = (a_2, a_6), b_5 = (a_3, a_4), b_6 = (a_3, a_6), b_7 = (a_3, a_7), b_8 = (a_4, a_8), b_9 = (a_4, a_9), b_{10} = (a_5, a_7), b_{11} = (a_6, a_7), b_{12} = (a_7, a_8), b_{13} = (a_8, a_9) \}$.

Рассматривается набор (множество) цветов: $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Два раскрашенных графа представлены:

(а) раскраска вершин (Рис. 2), соседние вершины (связанные ребром) имеют разные цвета, использованы три цвета;

(б) раскраска ребер (Рис. 3), использованы четыре цвета.

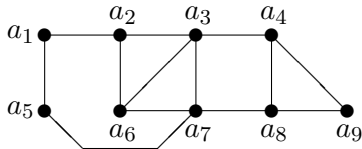


Рис. 1. Исходный граф

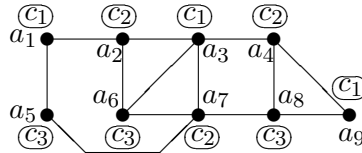


Рис. 2. Раскраска вершин

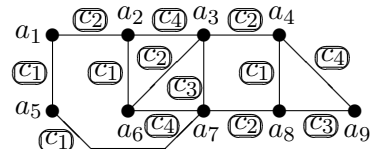


Рис. 3. Раскраска ребер

В данной работе рассматривается специальная задача кластеризации на основе раскраски ребер (*k*-edge colored clustering problem). В рассматриваемой задаче задан граф с раскрашенными ребрами $G = (A, B)$; $A = \{a_1, \dots, a_j, \dots, a_n\}$ - множество вершин, $B = \{b_1, \dots, b_i, \dots, b_m\}$ - множество ребер. Имеется множество целых чисел (цветов) $C = \{c_1, \dots, c_\mu, \dots, c_k\}$. Для каждой вершины $b \in B$ назначен цвет $c_\mu(b)$ и вес w_b . Основная задача кластеризации на основе раскраски ребер (basic Max *k*-Edge Colored Clustering problem - MAX-*k*-EC) имеет вид [2, 4, 6, 7]:

Назначить цвет из множества $C = \{c_1, \dots, c_\mu, \dots, c_k\}$ для каждой вершины графа так чтобы получить как максимум *k* кластеров. Каждый кластер соответствует подграфу с вершинами одного цвета. В раскраске вершин графа дуга называется соответствующей (или стабильной - stable) если ее цвет совпадает с цветом составляющих ее вершин. Целевой функцией задачи является максимизация общего веса стабильных ребер графа.

Модель данной задачи описана в [4, 6, 7]. Рассматриваются два множества переменных: (i) $z_b, b \in B$ и (ii) $x_{ac_\mu}, a \in A, c_\mu \in C (\mu = \overline{1, k})$; где $z_b = 1$ если обе вершины для ребра b имеют тот же цвет как и b и $z_b = 0$ в ином случае и $x_{ac_\mu} = 1$ если вершина a имеет цвет c_μ и $x_{ac_\mu} = 0$ в ином случае. Модель имеет вид (здесь $c(b)$ соответствует цвету c_μ , который был назначен ребру $b \in B$):

$$\max \sum_{b \in B} w_b z_b \quad s.t. \quad \sum_{\mu=1}^k x_{ac_\mu} = 1, \quad \forall a \in A;$$

$$z_b \leq \min\{x_{a_1 c(b)}, x_{a_2 c(b)}\} \quad \forall b = (a_1, a_2) \in B; \quad x_{ac_\mu}, z_b \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, c_\mu \in C, b \in B.$$

Данная модель относится к классу NP-трудных. Для этой задачи были предложены методы решения в виде эвристик, полиномиальных приближенных схем (PTAS) [2, 4, 6, 7].

Иллюстративный пример задачи имеет следующий вид. Информация по исходному графу представлена в таблице 1 и на Рис. 4а (цвета: $C = \{c_1, \dots, c_4\}$).

Получены кластеры (решения кластеризации):

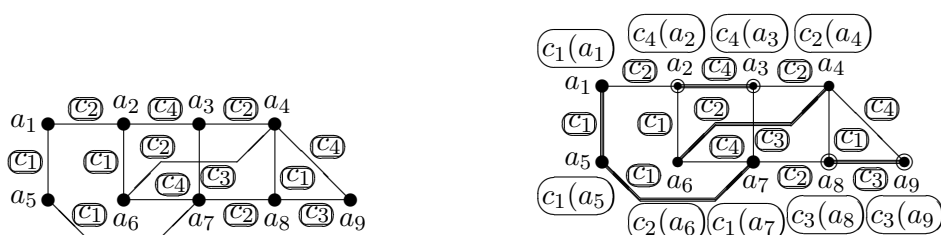
$$\tilde{X} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\} \quad (X_\mu \subseteq A \quad \forall \mu = \overline{1, 4}, \text{ здесь } |X_{\mu_1} \cup X_{\mu_2}| = 0 \quad \forall \mu_1 \neq \mu_2)$$

(Рис. 4б, таблица 1, таблица 2):

- (i) $X_1 = \{a_1, a_5, a_7\}$, цвет c_1 ;
- (ii) $X_2 = \{a_2, a_3\}$, цвет c_4 ;
- (iii) $X_3 = \{a_4, a_6\}$, цвет c_2 ;
- (iv) $X_4 = \{a_8, a_9\}$, цвет c_3 .

Таблица 1. Ребра графа $G = (A, B)$

Ном.	Ребро $b \in B$	Вес w_b	Цвет ребра $c(b)$	Бинарная переменная (выбор) $z(b)$
1.	$b_1 = (a_1, a_2)$	$w_{b_1} = 0.5$	c_1	0
2.	$b_2 = (a_1, a_5)$	$w_{b_2} = 0.9$	c_1	1
3.	$b_3 = (a_2, a_3)$	$w_{b_3} = 1.2$	c_4	1
4.	$b_4 = (a_2, a_6)$	$w_{b_4} = 0.4$	c_1	0
5.	$b_5 = (a_3, a_4)$	$w_{b_5} = 0.6$	c_2	0
6.	$b_6 = (a_3, a_7)$	$w_{b_6} = 0.3$	c_3	0
7.	$b_7 = (a_4, a_6)$	$w_{b_7} = 0.9$	c_2	1
8.	$b_8 = (a_4, a_8)$	$w_{b_8} = 0.5$	c_1	0
9.	$b_9 = (a_4, a_9)$	$w_{b_9} = 0.4$	c_4	0
10.	$b_{10} = (a_5, a_7)$	$w_{b_{10}} = 1.0$	c_1	1
11.	$b_{11} = (a_6, a_7)$	$w_{b_{11}} = 0.2$	c_4	0
12.	$b_{12} = (a_7, a_8)$	$w_{b_{12}} = 0.5$	c_2	0
13.	$b_{13} = (a_8, a_9)$	$w_{b_{13}} = 1.1$	c_3	1



(а) исходная раскраска ребер (б) раскраска вершин и кластеры

Рис. 4. Пример задачи кластеризации на основе раскраски ребер

Таблица 2. Вершины графа $G = (A, B)$ (решение)

Ном.	Вершина $a_j \in A$	Назначенный вес вершины c_{a_j}	Кластер $X(\mu)$ (Рис. 4)
1.	a_1	c_1	X_1
2.	a_2	c_4	X_2
3.	a_3	c_4	X_2
4.	a_4	c_2	X_3
5.	a_5	c_1	X_1
6.	a_6	c_2	X_3
7.	a_7	c_1	X_1
8.	a_8	c_3	X_4
9.	a_9	c_3	X_4

Можно указать следующие основные типы задач кластеризации на основе раскраски вершин графа: (1) компактная раскраска вершин (compact k -edge-coloring) [5]; (2) циклическая компактная раскраска вершин (cyclic compact k -edge-colorings) [59]; (3) максимизация раскраски вершин графа (Max Edge-Coloring problem) [49, 50]; (4) максимизация раскраски вершин графа с ограничением (bounded max-vertex-coloring problem) [12]; (5) кластеризация на графе с раскрашенными ребрами (clustering on k -edge-colored graphs) [6]; (6) максимальная кластеризация на графе с раскрашенными ребрами (maximum k -edge colored clustering: MAX-K-EC) [2, 4]; (7) альтернативный путь и раскрашенная кластеризация (alternating path and colored clustering) [19]; (8) задача раскраски вершин и разбиения ребер графа (vertex coloring edge partitions) [1]. Дополнительно, можно указать связь базовой задачи кластеризации на основе раскраски ребер графа (MAX-K-EC) и близких задач [4]: (1) обобщение задачи максимального взвешенного соответствия (Maximum Weight Matching) [26]; (2) расширение модели распределения информации в социальных сетях (ребра не раскрашены) [37]; (3) специальный случай комбинаторной задачи назначения [24].

3. ЗАДАЧИ РАСКРАСКИ ГРАФА И ПРИЛОЖЕНИЙ

В таблице 3 приведены основные типы задач раскраски графов и приложения.

Таблица 3. Основные типы задач раскраски графов и приложения

Ном.	Тип задачи	Приложение	Источник
1.	Обзоры, общие задачи:		
1.1.	Общие обзоры	Размещение выч. ресурсов, планирование, назначение частот, построение групп	[26, 34, 46]
1.2.	Раскраска графа	Управление воздушным движением	[13]
1.3.	Модели и алгоритмы для раскраска вершин/ребер с весами	Сети, планирование (timetabling), назначение каналов связи	[16, 54, 55] [66]
1.4.	Раскраска древовидных графов	Связь в иерархических сетях	[32]
1.5.	Сравнение эффективных алгоритмов раскраски графов	Размещение ресурсов, планирование (timetabling), назначение частот	[45, 46]
2.	Основные задачи раскраски графов:		
2.1.	Раскраска вершин	Назначение частот	[15, 26, 34]
2.2.	Максимальная раскраска вершин	Размещение буферов в сетях	[28, 62, 63]
2.3.	Распределенная раскраска графов	Маршрутизация без коллизий в сенсорных сетях (WSNs)	[60]
2.4.	Параллельная раскраска графа	Распределенная память компьютера	[18]
2.5.	Оптимальная раскраска графа	Интеграция данных в древовидных сенсорных сетях (WSNs)	[48]
2.6.	Задачи максимальной раскраски	Расписания с конфликтами	[22, 25]
2.7.	Построение точек пересечения в раскрашенных графах	Выделение покрывающих под-регионов в сенсорных сетях (WSNs)	[30]
2.8.	k -раскраска графов	Назначение частот в радиостанциях	[51, 61, 65]
2.9.	Раскраска вершин с весами:		
2.9.1.	Взвешенная раскраска	Передача сообщений (реальное время), размещение слотов, назначение каналов	[11, 16, 21] [23, 29, 56] [57]
2.9.2.	Раскраска на деревьях/лесах с весами	Маршрутизация в оптических сетях	[9, 10, 14]
2.9.3.	Минимальная взвешенная раскраска	Связь терминалов в сетях	[8]
2.9.4.	Раскраска с весами (ограничения на расстояния, несколько цветов для каждой вершины)	Назначение частот	[42, 53]
3.	Раскраска ребер графа:		
3.1.	Раскраска в графах:		
3.1.1.	Раскраска ребер	Спортивные расписаний	[33]
3.1.2.	Раскраска ребер	Сети связи, радиовещание (gossiping, broadcasting)	[27, 31, 41] [47]
3.1.3.	Раскраска в двудольных графах	Размещение в системах доставки	[67]
3.1.4.	Раскраска с весами	Сети связи	[66]
3.1.5.	Максимальная раскраска	Оптическая связь, системы с переключением	[17, 36, 49] [50]
3.1.6.	Раскраска в размытых графах	Планирование трафика	[52]
3.2.	Раскраска на деревьях:		
3.2.1.	Раскраска на деревьях	Сети связи	[3, 58]
3.2.2.	Раскраска на биномиальных деревьях	Расписания	[40]
4.	Раскраска ребер с k цветами (k -edge-coloring of graph):		
4.1.	Раскраска ребер с k цветами	Назначение каналов, расписания	[26, 38]
4.2.	Компактная k -раскраска	Циклические расписания	[5]
4.3.	Циклическая компактная k -раскраска	Много-процессорные расписания	[39, 59]

4. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ РАСКРАСКИ РЕБЕР

Основная задача (МАХ-k-ЕС) расширяется за счет использования векторной оценки для весов ребер: $\bar{w}_b = (w_b^1, \dots, w_b^\xi, \dots, w_b^\lambda) \forall b \in B$. Получается многокритериальная модель:

$$\max F^1 = \sum_{b \in B} w_b^1 z_b, \dots, \max F^\xi = \sum_{b \in B} w_b^\xi z_b, \dots, \max F^\lambda = \sum_{b \in B} w_b^\lambda z_b,$$

$$s.t. \sum_{\mu=1}^k x_{ac_\mu} = 1, \quad \forall a \in A;$$

$$z_b \leq \min\{x_{a_1c(b)}, x_{a_2c(b)}\} \quad \forall b = (a_1, a_2) \in B; \quad x_{ac_\mu}, z_b \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A, c_\mu \in C, b \in B.$$

Векторная целевая функция имеет вид: $\bar{F} = (F^1, \dots, F^\xi, \dots, F^\lambda)$. Очевидно, что здесь следует осуществлять поиск Парето-эффективных решений по данной целевой функции. В упрощенном случае можно использовать следующую целевую функцию:

$$\max F^{sum} = \sum_{b \in B} \sum_{\xi=1}^{\lambda} w_b^\xi z_b \quad \forall \xi = \bar{1}, \bar{\lambda}.$$

Информация для иллюстративного численного примера представлена в таблицах и на рисунках: таблица 4, таблица 5, таблица 6, Рис. 4а, Рис. 5, Рис. 6). Используется исходный граф с раскрашенными ребрами из Рис. 4а. Цвета ребер и двух-компонентные веса ребер приведены в таблице 4. Два Парето-эффективных решения (два варианта раскраски вершин) и их описания приведены в таблице 4, таблице 5, таблице 6 и на Рис. 7:

Решение 1: Решение задачи кластеризации имеет вид $\tilde{X}^1 = \{X_1^1, X_2^1, X_3^1, X_4^1\}$ ($X_\mu^1 \subseteq A \forall \mu = \bar{1}, \bar{4}, |X_{\mu_1} \cup X_{\mu_2}| = 0 \quad \forall \mu_1 \neq \mu_2$ (Рис. 5, таблица 4, таблица 5):

- (i) $X_1^1 = \{a_1, a_5, a_7\}$, цвет c_1 ;
- (ii) $X_2^1 = \{a_2, a_3\}$, цвет c_4 ;
- (iii) $X_3^1 = \{a_4, a_6\}$, цвет c_2 ;
- (iv) $X_4^1 = \{a_8, a_9\}$, цвет c_3 .

Целевая функция имеет вид: $\bar{F}(\tilde{X}^1) = (5.1, 3.1)$.

Решение 2: Решение задачи кластеризации имеет вид $\tilde{X}^2 = \{X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2\}$ ($X_\mu^2 \subseteq A \forall \mu = \bar{1}, \bar{4}, |X_{\mu_1} \cup X_{\mu_2}| = 0 \quad \forall \mu_1 \neq \mu_2$ (Рис. 6, таблица 4, таблица 6):

- (i) $X_1^2 = \{a_1, a_5, a_7\}$, цвет c_1 ;
- (ii) $X_2^2 = \{a_3, a_4, a_6\}$, цвет c_2 ;
- (iii) $X_3^2 = \{a_8, a_9\}$, цвет c_3 .
- (iv) $X_4^2 = \{a_2\}$, цвет c_4 .

Целевая функция имеет вид: $\bar{F}(\tilde{X}^2) = (4.5, 4.1)$.

Таблица 4. Данные для ребер графа $G = (A, B)$

Ном.	Ребро $b \in B$	Вес $\bar{w}_b = (w_b^1, w_b^2)$	Исходный цвет ребра $c(b)$ для \tilde{X}^1 и \tilde{X}^2	Бинарная переменная $z(b)$ для \tilde{X}^1	Бинарная переменная $z(b)$ для \tilde{X}^2
1.	$b_1 = (a_1, a_2)$	$\bar{w}_{b_1} = (0.5, 0.5)$	c_1	0	0
2.	$b_2 = (a_1, a_5)$	$\bar{w}_{b_2} = (0.9, 0.8)$	c_1	1	1
3.	$b_3 = (a_2, a_3)$	$\bar{w}_{b_3} = (1.2, 0.5)$	c_4	1	0
4.	$b_4 = (a_2, a_6)$	$\bar{w}_{b_4} = (0.4, 0.5)$	c_1	0	0
5.	$b_5 = (a_3, a_4)$	$\bar{w}_{b_5} = (0.6, 1.5)$	c_2	0	1
6.	$b_6 = (a_3, a_7)$	$\bar{w}_{b_6} = (0.3, 0.5)$	c_3	0	0
7.	$b_7 = (a_4, a_6)$	$\bar{w}_{b_7} = (0.9, 0.8)$	c_2	1	1
8.	$b_8 = (a_4, a_8)$	$\bar{w}_{b_8} = (0.5, 0.5)$	c_1	0	0
9.	$b_9 = (a_4, a_9)$	$\bar{w}_{b_9} = (0.4, 0.5)$	c_4	0	0
10.	$b_{10} = (a_5, a_7)$	$\bar{w}_{b_{10}} = (1.0, 0.5)$	c_1	1	1
11.	$b_{11} = (a_6, a_7)$	$\bar{w}_{b_{11}} = (0.2, 0.5)$	c_4	0	0
12.	$b_{12} = (a_7, a_8)$	$\bar{w}_{b_{12}} = (0.5, 0.5)$	c_2	0	0
13.	$b_{13} = (a_8, a_9)$	$\bar{w}_{b_{13}} = (1.1, 0.5)$	c_3	1	1

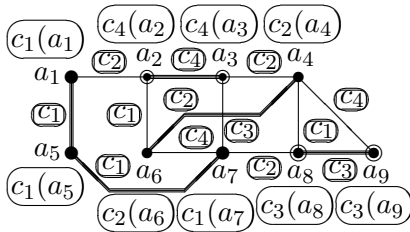


Рис. 5. Решение по Парето \tilde{X}^1

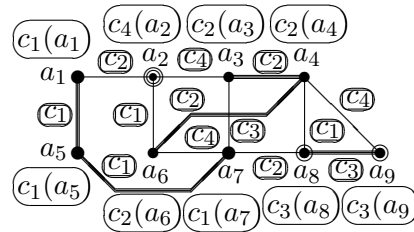


Рис. 6. Решение по Парето \tilde{X}^2

Таблица 5. Вершины графа $G = (A, B)$ (решение \tilde{X}^1)

Ном.	Вершина $a_j \in A$	Назначенный цвет вершины c_{a_j}	Кластер $X^1(\mu)$ (Рис. 5)
1.	a_1	c_1	X_1^1
2.	a_2	c_4	X_2^1
3.	a_3	c_4	X_2^1
4.	a_4	c_2	X_3^1
5.	a_5	c_1	X_1^1
6.	a_6	c_2	X_3^1
7.	a_7	c_1	X_1^1
8.	a_8	c_3	X_4^1
9.	a_9	c_3	X_4^1

Таблица 6. Вершины графа $G = (A, B)$ (решение \tilde{X}^2)

Ном.	Вершина $a_j \in A$	Назначенный цвет вершины c_{a_j}	Кластер $X^2(\mu)$ (Рис. 6)
1.	a_1	c_1	X_1^1
2.	a_2	c_4	X_4^1
3.	a_3	c_4	X_2^1
4.	a_4	c_2	X_2^1
5.	a_5	c_1	X_1^1
6.	a_6	c_2	X_2^1
7.	a_7	c_1	X_1^1
8.	a_8	c_3	X_3^1
9.	a_9	c_3	X_3^1

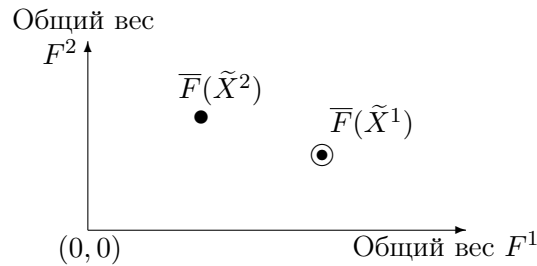


Рис. 7. Иллюстрация для решений по Парето

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья содержит описание задачи кластеризации на основе раскраски k -ребер графа включая многоритериальную модель задачи. Приложения задач раскраски графов и рассмотренной задачи структурно представлены в виде таблицы. Внимание уделено приложениям в компьютерных системах и сетях связи. Можно указать следующие перспективные направления исследований: (1) исследование эвристических методов решения различных версий задачи кластеризации на основе раскраски k -ребер графа; (2) исследование реальных приложений данной задачи в компьютерных системах и сетях связи; (3) описание новых перспективных постановок данной задачи (например: учет неопределенности, учет совместимости цветов, раскраска с назначением нескольких цветов для каждой вершины); (4) использование данной задачи при обучении студентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Addario-Berry L., Aldred R.E.L., Dalal K., Reed B.A., Vertex coloring edge partitions. *J. Combin. Theory Ser. B*, 2005, vol. 94, no. 2, pp. 237–244.
2. Ageev A., Kononov A., Improved approximation for the max k -colored clustering problem. In: *Int. Workshop on Approximation and Online Algorithms WAOA 2014*, LNCS 8952, Springer, 2015, pp. 1–10.
3. Albacea E.A., A parallel algorithm for edge-coloring of graphs with edge-disjoint cycles. *Inform. Process. Lett.*, 1992, vol. 43, no. 6, pp. 309–314.
4. Alhamdan Y.M., Kononov A., Approximability and inapproximability for maximum k -edge-colored clustering problem. In: *14th Int. Conf. CSR-2019*, Springer, 2019, pp. 1–13.
5. Altinakar S., Caporossi G., Hertz A., On compact k -edge-coloring: a polynomial time reduction from linear to cycle. *Discr. Optim.*, 2011, vol. 8, no. 3, pp. 502–512.
6. Angel E., Vampis E., Kononov A., D. Paparas, E. Pountourakis, V. Zissimopoulos, Clustering on k -edge-colored graphs. In: K. Chatterjee, J. Sgall (eds), *MFCS 2013*, LNCS 8087, Springer, 2013, pp. 50–61.
7. Angel E., Vampis E., Kononov A.V., Paparas D., Pountourakis E., Zissimopoulos V., Clustering on k -edge-colored graphs. *Discr. Appl. Math.*, 2016, vol. 211, pp. 15–22.
8. de Aragao M.P., Uchoa E., The γ -connected assignment problem. *Eur. J. Oper. Res.*, 1999, vol. 118, no. 1, pp. 127–138.
9. Araujo J., Nisse N., Perennes S., Weighted coloring in trees. *SIAM J. Discrete Math.*, 2014, vol. 28, no. 4, pp. 2029–2041.
10. Araujo J., Baste J., Sau I., Ruling out FPT algorithms for weighted coloring on forests. *Theor. Comput. Sci.*, 2018, vol. 729, pp. 11–19.
11. Araujo J., Campos V.A., Lima C.V.G.C., dos Santos V.F., Sau I., Silva A., Dual parameterization of weighted coloring. *Algorithmica*, 2020, vol. 82, no. 8, pp. 2316–2336.

12. Bampis E., Kononov A., Lucarelli G., Milis I., Bounded max-colorings of graphs. *J. of Discrete Algorithms*, 2014, vol. 26, pp. 56–68.
13. Barnier N., Brisset P., Graph coloring for air traffic flow management. *Ann. of Oper. Res.*, 2004, vol. 130, pp. 163–178.
14. Beauquier B., Perennes S., Toth D., All-to-all routing and coloring in weighted tree of rings. In: *Proc. of the Eleventh Ann. ACM Symp. on Parallel Algorithms and Architectures SPAA'99*, 1999, pp. 185–190.
15. Benjamin A., Chartrand G., Zhang P., *The Fascinating World of Graph Theory*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2015.
16. Benkoczi R., Dahan R., Gaur D.R., Exact algorithms for weighted coloring in special classes of tree and cactus graphs. In: Makinen V., Puglisi S.J., Salmela L. (eds), *Proc. 27th Int. Workshop on Combinatorial Algorithms IWOCA 2016*, Springer, LNCS 9843, 2016, pp. 347–358.
17. Bongiovanni G., Coppersmith D., Wong C.K., An optimum time slot assignment algorithm for an SS/TDMA system with variable number of transponders. *IEEE Trans. on Commun.*, 1981, vol. 29, pp. 721–726.
18. Bozdag D., Gebremedhin A.H., Manne F., Boman E.G., Catalyurek U., A framework for scalable greedy coloring on distributed memory parallel computers. *J. Parallel and Distributed Computing*, 2008, vol. 68, no. 4, pp. 515–535.
19. Cai L., Leung O.-Y., Alternating path and colored clustering. *Electr. prepr.*, 15 p., Jul. 27, 2018. <http://arxiv.org/abs/1807.10531> [cs.DS]
20. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., *Introduction to Algorithms*. 3rd ed., MIT Press and McGraw-Hill, 2009.
21. de Werra, D. Demange M., Escoffier B., Monnot J., Paschos V.T., Weighted coloring on planar, bipartite and split graphs: complexity and approximation. *Discr. Appl. Math.*, 2009, vol. 157, no. 4, pp. 819–832.
22. Demange M., de Werra D., Monnot J., Paschos V.Th., Time slot scheduling of compatible jobs. *J. of Scheduling*, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 111–127.
23. Escoffier B., Monnot J., Paschos V.T., Weighted coloring: further complexity and approximability results. *Inf. Proc. Lett.*, 2006, vol. 97, no. 3, pp. 98–103.
24. Feige U., Vondrak J., Approximation algorithm for allocation problem improving the factor $1 - 1/e$. In: *47 Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science FOCS 2006*, 2006, pp. 667–676.
25. Finke G., Jost V., Queyranne M., Sebo A., Batch processing with interval graph compatibilities between tasks. *Discr. Appl. Math.*, 2008, vol. 156, no. 5, pp. 556–568.
26. Garey M.R., Johnson D.S., *Computers and Intractability. The Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
27. Gibbons A., Rytter W., Optimally edge-coloring outerplanar graphs is IN NC. *Theor. Comp. Sci.*, 1990, vol. 71, pp. 401–411.
28. Govindarajan R., Rengarajan S., Buffer allocation in regular dataflow networks: an approach based on coloring circular-arc graphs. In: *Proc. of 3rd Int. Conf. on High Performance Computing (HiPC)*, IEEE, 1996, pp. 419–424.
29. Guan D.J., Zhu X., A coloring problem for weighted graphs. *Inf. Proc. Lett.*, 1997, vol. 61, no. 2, pp. 77–81.
30. Hawbani A., Wang X., Kuhlani H., Ghannami A., Farooq M.U., Al-sharabi Y., Extracting overlapped sub-regions in wireless sensor networks. *Wireless Networks*, 2019, vol. 25, no. 8, pp. 4705–4726.
31. Hedetniemi T.M., Hedetniemi S.T., Liestman A.L., A survey of gossiping and broadcasting in communication networks. *Networks*, 1988, vol. 18, pp. 319–349.
32. Jansen K., Scheffler P., Generalized coloring for tree-like graphs. *Discr. Appl. Math.*, 1995, vol. 75, no. 2, pp. 135–155.

33. Januario T., Urrutia S., Ribeiro C.C., de Werra D., Edge coloring: a natural model for sport scheduling. *Eur. J. Oper. Res.*, 2016, vol. 254, no. 1, pp. 1–8.
34. Jensen T.R., Toft B., *Graph Coloring Problems*. Wiley, New York, 1995.
35. Johnson D.S., Trick M.A. (eds), *Cliques, Coloring, and Satisfiability*. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 26, AMS, Providence, 1996.
36. Kesselman A., Kogan K., Nonpreemptive scheduling of optical switches. *IEEE Trans. on Commun.*, 2007, vol. 55, pp. 1212–1219.
37. Kleinberg J.M., Ligett K., Information-sharing and privacy in social networks. *Games and Economic Behavior*, 2013, vol. 82, pp. 702–716.
38. Kovalyov C.T., Ng M.Y., Cheng T.C.E., Fixed interval scheduling: models, applications, computational complexity and algorithms. *Eur. J. Oper. Res.*, 2007, vol. 178, no. 2, pp. 331–342.
39. Kubale M., The complexity of scheduling independent two-processor tasks on dedicated processors. *Inform. Proc. Lett.*, 1987, vol. 24, no. 3, pp. 141–147.
40. Kubale M., Piwakowski K., A linear time algorithm for edge coloring of binomial trees. *Discr. Math.*, 1996, vol. 150, pp. 247–256.
41. Labahn R., Hedetniemi S.T., Laskar R., Periodic gossiping on trees. *Discr. Appl. Math.*, 1994, vol. 53, pp. 235–245.
42. Lai X., Lu Z., Multistart iterated tabu search for bandwidth coloring problem. *Comp. & Oper. Res.*, 2013, vol. 40, pp. 1401–1409.
43. Levin M.S., On combinatorial clustering: literature review, methods, examples. *J. of Commun. Technol. and Electronics*, 2015, vol. 60, no. 12, pp. 1403–1428.
44. Levin M.S., Note on k-edge colored clustering (preliminary version) Preprint, 9 p., 2022. DOI: 10.13140/RG.2.2.12933.22248
45. Lewis R., Thompson J., Mumford C., Gillard J., A wide-ranging computational comparison of high-performance graph colouring algorithms. *Comp. and Oper. Res.*, 2012, vol. 39, no. 9, pp. 1933–1955.
46. Lewis R.M.R., *A Guide to Graph Coloring: Algorithms and Applications*. Springer, 2016.
47. Liesman A.L., Richards D., Network communication in edge-colored graphs: gossiping. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Systems*, 1993, Vol. 4, pp. 438–445.
48. Lo S.-M., Lin W.-H., Chen C., Tseng Y.-C., Optimal coloring for data collection in tree-based wireless sensor networks. *Theor. Comput. Sci.*, 2017, vol. 700, pp. 23–36.
49. Lucarelli G., Milis I., Paschos V.Th., Maximum edge coloring of trees. *Electr. prepr.*, 5 p., Jan. 26, 2009. <http://arxiv.org/abs/0901.4002> [cs.DS]
50. Lucarelli G., Mills I., Improved approximation algorithms for the Max Edge-Coloring problem. *Inform. Proc. Lett.*, 2011, vol. 111, no. 16, pp. 819–823.
51. Mahapatra R., Samanta S., Allahviranloo T., Pal M., Radio fuzzy graphs and assignment of frequency in radio stations. *Comput. and Appl. Math.*, 2019, vol. 38, no. 3, art. 117, pp. 1–20.
52. Mahapatra R., Samanta S., Pal M., Applications of edge colouring of fuzzy graphs. *Informatica*, 2020, vol. 31, no. 2, pp. 313–330.
53. Malaguti E., Toth P., An evolutionary approach for bandwidth multicoloring problems. *Eur. J. Oper. Res.*, 2008, vol. 189, no. 3, pp. 638–651.
54. Malaguti E., Monaci M., Toth P., Models and heuristic algorithms for a weighted vertex coloring problem. *J. Heuristics*, 2009, vol. 15, no. 5, pp. 503–526.
55. Malaguti E., Toth P., A survey on vertex coloring problems. *Int. Trans. in Oper. Res.*, 2010, vol. 17, no. 1, pp. 1–34.

56. McDiarmid C., Reed B., Channel assignment and weighted coloring. *Networks*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 114–117.
57. Mishra A., Banerjee S., Arbaugh W., Weighted coloring based channel assignment for WLANs. *SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, 2005, vol. 9, no. 3, pp. 19–31.
58. Mitchell S., Hedetniemi S., Linear algorithms for edge coloring trees and unicyclic graphs. *Inform. Process. Lett.*, 1979, vol. 9, pp. 110–112.
59. Nadolski A., Compact cyclic edge-colorings of graphs. *Discr. Math.*, 2008, vol. 308, no. 12, pp. 2407–2417.
60. Navarra A., Pinotti C.M., Formisano A., Distributed colorings for collision-free routing in sink-centric sensor networks. *J. of Discrete Algorithms*, 2012, vol. 14, pp. 232–247.
61. Panigrahi P., A survey on radio k -colorings of graphs. *AKSE Int. J. of Graphs and Combinatorics*, 2009, vol. 6, no. 1, pp. 161–169.
62. Pemmaraju S.V., Raman R., Varadarajan K.R., Buffer minimization using max-coloring. In: 15th Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA'04), 2004, pp. 562–571.
63. Pemmaraju S.V., Raman R., Approximation algorithms for the max-coloring problem. In: 32nd Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALPT05), LNCS 3580, Springer, 2005, pp. 1064–1075.
64. Sabar N.R., Ayob M., Qu R., Kendall G., A graph coloring constructive hyper-heuristic for examination timetabling problems. *Appl. Intell.*, 2012, vol. 37, no. 1, pp. 1–11.
65. Saha L., Panigrahi P., A lower bound for radio k -chromatic number. *Discr. Appl. Math.*, 2015, vol. 192, pp. 87–100.
66. Sannyasi D., Improved approximation algorithms for weighted edge coloring of graphs. *Electr. prepr.*, 12 p., Dec. 30, 2021. <http://arxiv.org/abs/2012.15056> [cs.DS]
67. Yan Q., Tang X., Chen Q., Cheng M., Placement delivery array design through strong edge coloring of bipartite graphs. *IEEE Commun. Lett.*, 2018, vol. 22, no. 2, pp. 236–239.

On models of clustering based on edge colored in graph

Levin M.Sh.

The paper addresses combinatorial problem of edge colored clustering in graph. A brief structured survey on the problems and their applications in communication networks and computer systems is presented. Basic mathematical formulation of the problem of edge colored clustering in graph is described. A multicriteria problem statement is suggested. Numerical examples illustrate the considered problems.

KEYWORDS: combinatorial optimization, clustering, graph coloring, communications