Информационные процессы, Том 22, № 4, 2022, стр. 308–318

О разбиении графа на основе клик

Марк Ш. Левин

Институт проблем передачи информации, Российская академия наук,
Москва, Россия
email: mslevin@acm.org

Поступила в редколлегию 29.11.2022

Аннотация—Данная статья посвящена задаче разбиения графа на основе клик. Рассматриваются основные типы постановок задачи: (а) задача с максимизацией числа ребер (или суммы весов ребер) в полученных в разбиении исходного графа кликах, (б) задача с минимизацией числа ребер (или суммы весов ребер) между полученными в разбиении исходного графа кликами, (в) задача разбиения исходного графа с ограничением на число клик. Указанные задачи представляют собой специальный класс задач комбинаторной кластеризации. Дополнительно предлагаются новые многокритериальные постановки на основе использования векторных весов. Приведены краткие обзоры методов выделения клик в графах и методов решения задачи разбиения графа на основе клик. Проиллюстрирована задача построения траектории клики на основе динамического графа. Численные примеры иллюстрируют рассмотренные задачи.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: разбиение графа, кластеризация, клика, комбинаторная оптимизация, комбинаторная кластеризация

DOI: 10.53921/18195822_2022_22_4_308

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи комбинаторной кластеризации активно исследуются в последние годы [23, 25, 26, 32, 37]. В данной статье рассматривается задача разбиения графа на основе клик (с точки зрения комбинаторной оптимизации). Задача заключается в разбиении вершин исходного графа на непересекающиеся кластеры где каждый кластер представляет собой клику. При этом проводится оптимизация некой целевой функции (или функций). Следующие основные задачи исследуются рассматриваются: (а) задача с максимизацией числа ребер (или суммы весов ребер) в полученных в разбиении исходного графа кликах, (б) задача с минимизацией числа ребер (или суммы весов ребер) между полученными в разбиении исходного графа кликами, (в) задача разбиения исходного графа с ограничением на число клик.

Также описаны новые многокритериальные постановки на основе использования векторных весов. Краткие обзоры задач выделения клик в графах и методов решения задачи разбиения графа на основе клик представлены в виде таблиц. Приведена иллюстрация задачи построения траектории клики на основе динамического графа. Приведены численные иллюстративные примеры для рассмотренных задач. Данная статья основана на препринте [33].

2. ВЫДЕЛЕНИЕ КЛИК И РАЗБИЕНИЕ НА ОСНОВЕ КЛИК

Таблица 1 содержит список некоторых базовых задач и исследований в области выделения клик в графах. Представляется важным указать специальные структуры типа модификации клик: (1) квази-клика [45, 46, 53, 57, 63]; (2) топ-k максимальная квази-клика (top-k maximal quasi-clique) [53]; (3) квази-клика в массивном графе (например, α-квази-клика) [1]; (4) насыщеный (dense) k-подграф [16]; (5) псевдо-клика [20, 59]; (6) структуры в виде k-клубов (k-clubs) [4, 38]; (7) $k - CT$ компоненты [51]; (8) k-дольные клики в k-дольных графах (или морфологические клики) [27, 28, 30, 36, 49]. Такие структуры стали использоваться в задачах комбинаторной кластеризации, например: (а) кластеризация страниц в интернете с использованием поиска псевдо-клик [20], (б) кластеризация на основе $k - CT$ компонентов [51].

Таблица 1. Выделение клик в графах

Ном.	Задача/исследоавание	Источник
1.	Задачи выделения клик:	
1.1.	Задачи выделения максимальных клик (постановки, методы, литература)	[3, 10, 17, 18, 41, 43]
1.2.	Параллельный подход к перечислению максимальных клик в графах	[62]
1.3.	Задачи выделения клики в графе с отметками (maximum labelled clique)	[7]
1.4.	Выделение клики в массивном графе	[47]
1.5.	Выделение максимальной квази-клики	[48, 50, 65]
1.6.	Выделение квази-клики в массивном графе	[1]
1.7.	Поиск k-клик в графах	[2]
1.8.	Задача морфологической клики	[27, 28, 30]
2.	Динамические (многостадийные) задачи:	
2.1.	Выделение максимальных клик в динамических графах	[12, 54, 56]
2.2.	Выделение максимальных клик в временных (temporal) графах	[21]
2.3.	Кластеризация на основе клик в онлайн (online) режиме	[9, 15]
2.4.	Интеграция на основе клик для потоков графов	[29, 30]
2.5.	Многостадийная задача построения морфологической клики	[30]

Некоторые важные исследования в области задач разбиения графов на основе клик приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Исследования в области задач разбиения на основе клик

Ном.	Исследование	Источник
1.	Постановки задачи:	
1.1.	Задача разбиения графа на основ клик	[22, 34]
1.2.	Кластеризация на основе клик	[9, 15, 39]
1.3.	Максимизация числа ребер в полученных в разбиении графа клик	[52, 55]
1.4.	Задача разбиения на основе клик для сети	[40]
1.5.	Максимизация числа ребер в полученных в разбиении графа клик и минимизация числа ребер между полученными в разбиении графа кликами	[14]
1.6.	Разбиение взвешенного графа с максимизацией суммы весов ребер в полученных в разбиении исходного графа клик	[8]
1.7.	Разбиение графа на основе максимальной клики	[58]
1.8.	Разбиение интервального графа на основе клик	[19]
1.9.	Задача разбиения исходного графа с ограничением на число клик	[11]
2.	Вопросы сложности:	
2.1.	Вопросы сложности для задачи с максимизацией числа ребер в полученных в разбиении графа клик (с учетом числа клик)	[55]
2.2.	Вопросы построения аппроксимационных решений в задаче с максимизацией числа ребер в полученных в разбиении графа клик	[14, 52]
3.	Специальные исследования:	
3.1.	Клики и кластеризация (комбинаторный подход)	[35]
3.2.	Разбиение графов на основе клик и квази-клик (вопросы вычислений)	[44]
3.3.	Кластеризация генетических данных на основе использования клик при разбиении графов	[24]
3.4.	Асимптотические значения числа клик при разбиении графов на основе клик	[60]
3.5.	Задачи групповой технологии (производственные системы) на основе разбиения графов с использованием клик	[61]

3. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЯ НА ОСНОВЕ КЛИК

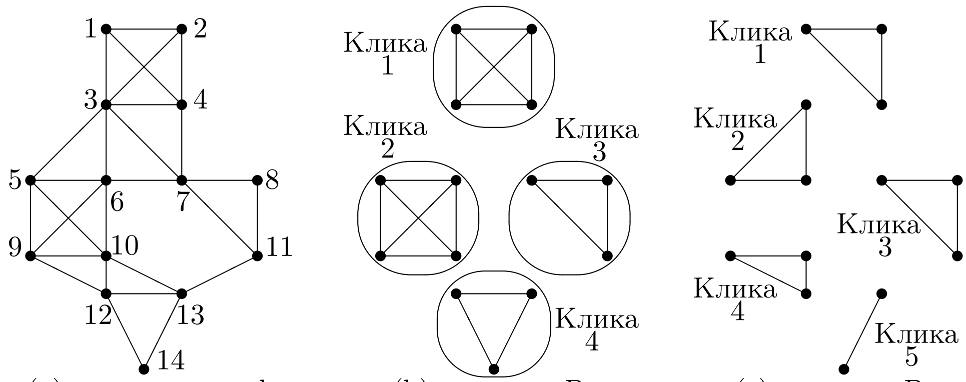
3.1. Описание и иллюстрация задачи разбиения на основе клик

Задача разбиения графа на основе клик иногда рассматривается как специальная версия корреляционной кластеризации [22, 24, 34, 42, 55, 64]. Описание задачи имеет следующий вид. Рассматривается исходный ненаправленный граф $G = (A, R)$, где A - множество вершин (элементов) и R - множество ребер. Пусть $P = \{A_1, .., A_i, ..., A_k\}$ - разбиение вершин графа A (на непересекаюшиеся подмножества) (т.е., $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, $|A_{i_1} \& A_{i_2}| = 0$, $\forall i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, ..., i, ..., k\}$). В результате получаются множество подграфов: $\{G_1 = (A_1, R_1), ..., G_i = (A_i, R_i), ..., G_k = (A_k, R_k)\}$. Разбиение P называют разбиением на основе клик (как кластеров), если $G_i = (A_i, R_i)$ - клика в графе G $(\forall i = \overline{1, k})$. Кроме того, $R^{-}(P) \subseteq R$ называют множеством ребер между кликами (кластерами) в разбиении P.

Иллюстративный численный пример для задачи представлен на Рис. 1 (указаны два решения). Здесь используется следующий исходный граф $G = (A, R)$:

(а) множество вершин $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$,

(б) множество ребер $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 7), (5, 6), (5, 9), (5, 10), (6, 7), (7, 8), (7, 11), (8, 11), (9, 10), (9, 12), (10, 12), (10, 13), (11, 13), (12, 13), (12, 14), (13, 14)\}$.



(a) исходный граф (b) решение P_1 (c) решение P_2

Рис. 1. Численный пример для задачи разбиения графа на основе клик

3.2. Две основные задачи разбиения на основе клик

Основные задачи разбиения на основе клик имеют следующий вид [42, 52, 55].

Задача 1. Максимизацией числа ребер в полученных в разбиении исходного графа кликах (Max-ECP) имеет вид:

Найти разбиение вершин на клики P с максимизацией числа ребер в кликах

$$\max_{\{P\}} f_1(P) = \max_{\{P\}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{r \in R_i} |\{r\}|.$$

Эта задача относится к классу NP-рудных задач (для числа клик ≥ 3) [52, 55].

Задача 2. Минимизация числа ребер между полученными в разбиении исходного графа кликами $\{G_1, ..., G_i ..., G_t\}$ (Min-ECP) имеет вид:

Найти разбиение вершин P на клики с минимизацией числа ребер между кликами

$$\min_{\{P\}} f_2(P) = \min_{\{P\}} \sum_{r \in R^-(P)} |\{r\}|.$$

Два иллюстративных решения представлены на Рис. 1:

(i) решение P_1: клика 1 содержит вершины $\{1, 2, 3, 4\}$, клика 2 содержит вершины $\{5, 6, 9, 10\}$, клика 3 содержит вершины $\{7, 8, 11\}$, клика 4 содержит вершины $\{12, 13, 14\}$; получены следующие значения целевых функций: $f_1(P_1) = 18$, $f_2(P_1) = 9$;

(ii) решение P_2: клика 1 содержит вершины $\{1, 2, 4\}$, клика 2 содержит вершины $\{3, 5, 6\}$, клика 3 содержит вершины $\{7, 8, 11\}$, клика 4 содержит вершины $\{9, 10, 12\}$, клика 5 содержит вершины $\{13, 14\}$; получены следующие значения целевых функций: $f_1(P_2) = 14$, $f_2(P_2) = 13$.

3.3. Задача разбиения с ограничением на число клик

Эта задача исследована в [11]. Задача является обобщением классической задачи разбиения графа [18]. Задача формулируется как поиск разбиения графа на независимые множества (или раскраску) с ограничением на число клик и минимальной общей стоимостью раскраски.

3.4. Разбиение на основе клик для взвешенного графа

Очевидным обобщением являются задачи разбиения взвешенного графа на основе клик [8]. Здесь используются неотрицательные веса ребер графа w_r ($\forall r \in R$). В результате получаются следующие задачи:

Задача 3. Максимизация общего веса ребер в кликах получаемого разбиения графа P:

Найти разбиение взвешенного графа на основе клик с максимизацией суммы весов ребер в кликах

$$\max_{\{P\}} f_{w1}(P) = \max_{\{P\}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{r \in R_i} w(r).$$

Задача 4. Минимизация общего веса ребер между кликами разбиении взвешенного графа P:

Найти разбиение взвешенного графа на основе клик с минимизацией суммы весов ребер между кликами

$$\min_{\{P\}} f_{w2}(P) = \min_{\{P\}} \sum_{r \in R^-(P)} w(r).$$

4. НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

4.1. Задача разбиения графа с двумя критериями

Здесь рассматриваются две версии задачи:

Задача 5. Найти разбиение на основе клик P такое, что: (i) максимизируется число ребер в полученных кликах, (ii) минимизируется число ребер между кликами. Формальная модель имеет вид:

$$\max_{\{P\}} f_1 = \max_{\{P\}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{r \in R_i} |\{r\}|, \quad \min_{\{P\}} f_2 = \min_{\{P\}} \sum_{r \in R^-} |\{r\}|.$$

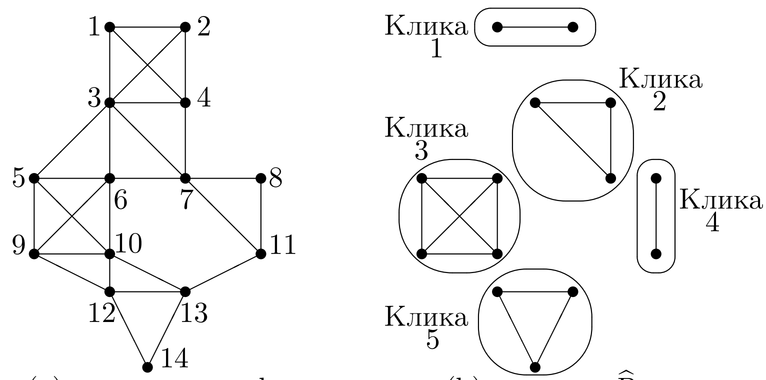
Задача 6. Найти разбиение на основе клик P такое, что: (i) максимизируется общий вес (сумма весов) ребер в кликах, (ii) минимизируется общий вес (сумма весов) ребер между кликами: Формальная модель имеет вид:

$$\max_{\{P\}} f_{w1} = \max_{\{P\}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{r \in R_i} w(r), \quad \min_{\{P\}} f_{w2} = \min_{\{P\}} \sum_{r \in R^-} w(r).$$

Пример 2. Рассматривается иллюстративный пример для задачи 6 (Таблица 3, Рис. 2). Исходный граф соответствует Рис. 1 (Рис. 2a). Таблица 3 содержит веса ребер исходного графа. Решение $\widehat{P}$ представлено на Рис. 2b: (i) клика 1 содержит вершины $\{1, 2\}$, (ii) клика 2 содержит вершины $\{3, 4, 7\}$, (iii) клика 3 содержит вершины $\{5, 6, 9, 10\}$, (iv) клика 4 содержит вершины $\{8, 11\}$, and (v) клика 5 содержит вершины $\{12, 13, 14\}$. Получены следующие значения целевых функций: $f_{w1}(\widehat{P}) = 36.7.0$, $f_{w2}(\widehat{P}) = 3.3$.

Таблица 3. Веса ребер $w(r) = w(i_1, i_2)$ $(i_1, i_2 \in A)$

$i_1 \setminus i_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3.1	0.2	0.3										
2		0.1	0.1										
3			4.1	0.1	0.3	4.0							
4						3.5							
5					2.8			3.0	3.3				
6						0.3		3.3	4.2				
7							0.2			0.5			
8										3.8			
9									3.9		1.0		
10											0.4	0.3	
11												0.2	
12												3.3	2.4
13													3.2



(a) исходный граф (b) решение $\widehat{P}$

Рис. 2. Численный пример для задачи 6

4.2. Многокритериальные задачи разбиения графа

Многокритериальные постановки задач разбиения могут основываться на использовании векторного веса ребер графа: $\overline{w}(r) = (w^1(r), ..., w^j(r), ...w^t(r))$ $(\forall r \in R)$. В общем случае для многокритериальной задачи применяется поиск Парето-эффективных решений. Можно рассмотреть следующие три модели:

Задача 7. Максимизация общего векторного веса вершин в кликах разбиения вершин графа на основе клик P:

$$\max_{\{P\}} f^1_{w1} = \max_{\{P\}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{r \in R_i} w^1(r), ..., \max_{\{P\}} f^j_{w1} = \max_{\{P\}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{r \in R_i} w^j(r), ..., \max_{\{P\}} f^t_{w1} = \max_{\{P\}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{r \in R_i} w^t(r).$$

Очевидно, что можно максимизировать сумму критериев:

$$\max_{\{P\}} f^{sum}_{w1} = \max_{\{P\}} \sum_{j=1}^{t} f^j_{w1} = \max_{\{P\}} \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{k} \sum_{r \in R_i} w^j(r).$$

Задача 8. Минимизация общего векторного веса вершин между кликами разбиения вершин графа на основе клик P:

$$\min_{\{P\}} f^1_{w2} = \min_{\{P\}} \sum_{r \in R^-} w^1(r), ..., \min_{\{P\}} f^j_{w2} = \min_{\{P\}} \sum_{r \in R^-} w^j(r), ..., \min_{\{P\}} f^t_{w2} = \min_{\{P\}} \sum_{r \in R^-} w^t(r).$$

Очевидно, что можно минимизировать сумму критериев:

$$\min_{\{P\}} f^{sum}_{w2} = \min_{\{P\}} \sum_{j=1}^{t} f^j_{w2} = \min_{\{P\}} \sum_{j=1}^{t} \sum_{r \in R^-} w^j(r).$$

Задача 9. Можно рассматривать интегрированную задачи с максимизицией общего веса ребер в кликах и минимизацией общего веса ребер между кликами:

$$(\max_{\{P\}} f^{sum}_{w1}, \min_{\{P\}} f^{sum}_{w2}).$$

5. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Для некоторых упрощенных версий рассматриваемой задачи могут использоваться специальные приближенные алгоритмы (с гарантированной относительной ошибкой решения - PTAS.) В общем случае следует использовать мета-эвристики или комбинированные (составные) схемы решения. В Таблице 4 представлены основные подходы к решению задачи разбиения графа на основе клик.

6. О ТРАЕКТОРИИ КЛИКИ

Задача построения траектории клики (квази-клики) (т.е., многостадийная задача построения клики или квази-клики) рассмотрена в [29, 30]. В [31] предложена задача реструктуризации для задач комбинаторной оптимизации. В данном подходе исследуется траектория решения задачи комбинаторной оптимизации (например: рюкзак, назначение, кластеризация) с учетом качества решения на каждой стадии и стоимости трасформации решения между стадиями.

Таблица 4. Основные подходы к решения задач разбиения на основе клик

Ном.	Подход/исследование	Источник
1.	Итеративный подход с запретами (iterated tabu search)	[42]
2.	Метод на основе использования шума	[8]
3.	Эвристики на основе поиска в окрестности (neighborhood search heuristics)	[6]
4.	Подход к решению как в задаче максимального разнообразия (maximally diverse grouping problem)	[5]
5.	Методы "отжига" (simulated annealing) и поиска с запретом (tabu search)	[13]
6.	Приближенные алгоритмы	[14]
7.	Двух-фазный жадный (greedy) алгоритм	[52]
8.	Трех-фазный метод локального поиска (эвристика, поиск с запретом, метод ограниченной окрестности)	[64]
9.	Мета-эвристика для задачи разбиения графа на основе клик	[61]
10.	Метод ветвей-цен-разрезов (branch-and-price-and-cut) для задачи разбиения	[34]

Процесс реструктуризации иллюстрируется на Рис. 3 и на Рис. 4 для трех-стадийной траектории решения разбиения исходного графа G (из Рис. 1):

Стадия 1: разбиение исходного графа на основе клик P_1;

Стадия 2: трансформация разбиения на основе клик P_1 в разбиение на основе клик P_2;

Стадия 3: трансформация разбиения на основе клик P_2 в разбиение на основе клик P_{23}.

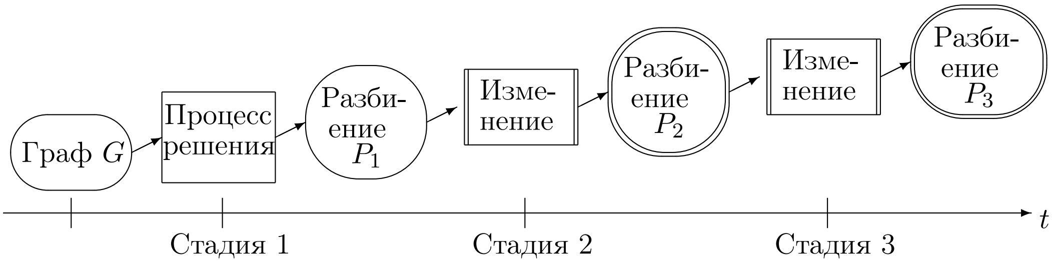


Рис. 3. Иллюстрация многостадийной траектории разбиения на основе клик

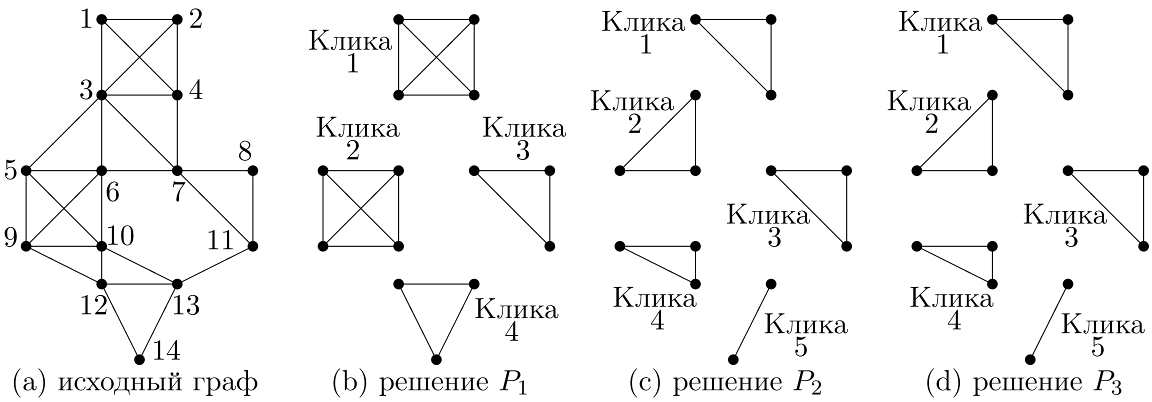


Рис. 4. Иллюстрация реструктуризации разбиения графа на основе клик

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья описывает задачу разбиения графа на основе клик включая краткий обзор литературы (задачи, методы решения). Приведенены основные типы данной задачи и предложены некоторые новые многокритериальные постановки.

Можно указать следующие перспективные направления исследования: (1) исследование описанных задач в условиях неопределенности (например, с использованием размытых множеств); (2) рассмотрение задачи разбиения графа на основе клик с использованием порядковых оценок и оценок в виде мультимножеств; (3) рассмотрение задачи разбиения графа на основе квази-клик; (4) рассмотрение динамических задач разбиения графа; (5) построение новых составных схем решения для рассмотренных задач; (6) исследование приложений многокритериальной задачи разбиения графа на основе клик (в частности, для сетевых систем); (7) использование данной задачи при обучении студентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abello J., Resende M.G.C., Sudarsky S., Massive quasi-clique detection. In: Rajsbaum S. (ed), Proc. of 5th Latin American Symp. Theoretical Informatics LATIN 2002, LNCS 2286, Springer, 2002, pp. 598–612.
2. Altshuler Y., Matsliah A., Felner A., On the complexity of physical problems and a swarm algorithm for k-clique search in physical graphs. In: Eur. Conf. on Complex Systems (ECCS-05), 2005, pp. 1–27.
3. Bomze I.M., Budinich M., Pardalos P.M., Pelillo M., The maximum clique problem. In: Du D.-Z., Pardalos P.M. (eds), Handbook of Combinatorial Optimization. Springer, 1999, pp. 1–74.
4. J. M. Bourjolly, G. Laporte, and G. Pesant, Heuristics for finding k-clubs in an undirected graph. Comput. Oper. Res., 2000, vol. 27, no. 6, pp. 559–569.
5. Brimberg J., Janicijevic S., Mladenovic N., Urosevic D., Solving the clique partitioning problem as a maximally diverse grouping problem. Optim. Letters, 2015, vol. 11, pp. 1123–1135.
6. Brusco M.J., Kohn H.F., Clustering quantitative data based on binary equivalence relations: neighborhood search heuristics for the clique partitioning problem. Psychometrica, 2009, vol. 74, no. 4, pp. 685–703.
7. Carrabs F., Cerulli R., Dell'Olmo P., A mathematical programming approach for the maximum labeled clique problem. Procedia - Soc. and Behav. Sci., 2014, vol. 108, pp. 69–78.
8. Charon I., Hundry O., Noising methods for a clique partitioning problem. Discr. Appl. Math., 2006, vol. 154, no. 5, pp. 754–769.
9. Chrobak M., Durr C., Fabijan A., Nilsson B.J., Online clique clustering. Algorithmica, 2020, vol. 82, pp. 938–965.
10. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Introduction to Algorithms. 3rd ed., MIT Press and McGraw-Hill, 2009.
11. Correa J.R., Megow N., Clique partitioning with value-monotone submodular cost. Discr. Optim., 2015, vol. 15, pp. 26–36.
12. Das A., Svendsen M., Tirthapura S., Incremental maintenance of maximal cliques in a dynamic graph. The VLDB J., 2019, vol. 28, no. 3, pp. 351–375.
13. De Amorim S.G., Barthщlemy J.-P., Ribeiro C.C., Clustering and clique partitioning: simulated annealing and tabu search approaches. J. Classif., 1992, vol. 9, pp. 17–42.
14. Dessmark A., Jansson J., Lingas A., On the approximability of maximum and minimum edge clique partition problems. Int. J. Found Comput. Sci., 2007, vol. 18, pp. 217–226.
15. Fabijan A., Nilsson B.J., Persson M., Competitive online clique clustering. In: Proc. of the 8th Int. Conf. on Algorithms and Complexity (CIACT13), 2013, pp. 221–233.
16. Feige U., Peleg D., Kortsarz G., The dense k-subgraph problem. Algorithmica, 2001, vol. 29, pp. 410–421.
17. Feige U., Approximating maximum clique by removing subgraphs. SIAM J. Discr. Math., 2004, vol. 18, no. 2, pp. 219–225.

18. Garey M.R., Johnson D.S., Computers and Intractability. The Guide to the Theory of NP-Completeness. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
19. Gijswijt D., Jost V., Queyranne M., Clique partitioning of interval graphs with submodular costs on the cliques. RAIRO Oper. Res., 2007, vol. 41, pp. 275–287.
20. Haraguchi M., Okubo Y., A method for clustering of web pages with pseudo-clique search. In: LNCS 3847, Springer, 2006, pp. 59–78.
21. Himmel A.-S., Molter H., Niedermeier R., Sorge M., Adapting the Bron-Kerbosch algorithm for enumerating maximal cliques in temporal graphs. Electr. prepr., 33 p., May 2, 2017. http://arxiv.org/abs/1605.03871 [cs.DS]
22. Jaehn F., Pesch E., New bounds and constraint propagation techniques for the the clique partitioning problem. Discr. Appl. Math., 2013, vol. 161, no. 13, pp. 2025–2037.
23. Kim J., Lee W., Song J.J., Lee S.B., Optimized combinatorial clustering for stochastic processes. Cluster Computing, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 1135–1148.
24. Kochenberger G., Glover F., Alidaee B., Wang H., Clustering of microarray data via clique partitioning. J. of Combin. Optim., 2005, vol. 10, no. 1, pp. 77–92.
25. Kumagai M., Komatsu K., Takano F., Araki T., Sato M., Kobayashi H., An external definition of the one-hot constraint and fast QUBO generation for high-performance combinatorial clustering. Int. J. of Networking and Computing, 2021, vol. 11, no. 2, pp. 463–491.
26. Kumar V., Bass G., Tomlin C., Dulny J., Quantum annealing for combinatorial clustering. Quantum Inform. Proc., 2018, vol. 17, pp. 1–14.
27. Levin M.S., Combinatorial Engineering of Decomposable Systems. Springer, 1998.
28. Levin M.S., Composite Systems Decisions. Springer, 2006.
29. Levin M.S., Clique-based fusion of graph streams in multi-function system testing. Informatica, 2012, vol. 23, no. 3, pp. 391–404.
30. Levin M.S., Modular System Design and Evaluation. Springer, 2015.
31. Levin M.S., Towards integrated glance to restructuring in combinatorial optimization. Electr. prepr., 31 p., Dec. 20, 2015. http://arxiv.org/abs/1512.06427 [cs.AI]
32. Levin M.S., On combinatorial clustering: literature review, methods, examples. J. of Commun. Technol. and Electronics, 2015, vol. 60, no. 12, pp. 1403–1428.
33. Levin M.S., Towards clique partitioning problem. Preprint, 10 p., Nov. 2022. DOI: 10.13140/RG.2.2.35252.12169
34. Li X., Mitchell J.E., Branch-and-price-and-cut on the clique partitioning problem with minimum clique size requirement. Discr. Optim., 2007, vol. 4, no. 1, pp. 87–102.
35. Mehrotra A., Trick M., Cliques and clustering: a combinatorial approach. Oper. Res. Lett., 1998, vol. 22, pp. 1–12.
36. Mirghorbani M., Krokhmal P., On finding k-cliques in k-partite graphs. Optim. Lett., 2013, vol. 7, pp. 1155–1165.
37. Mirkin B., Muchnik I., Combinatorial optimization in clustering. In: Du D.-Z., Pardalos P.M. (eds), Handbook of Combinatorial Optimization. vol. 2, Springer, 1999, pp. 261–329.
38. Mokken R., Cliques, clubs and clans. Quality and Quantity, 1979, vol. 13, pp. 161–173.
39. Nonner T., Clique-clustering yields PTAS for max-coloring interval graphs. In: Proc. of the 38th Int. Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2011), LNCS 6755, Springer, 2011, pp. 183–194.
40. Oosten M., Rutten J.H.G.C., Spieksma F.C.R., The clique partitioning problem: facets and patching facets. Networks, 2001, vol. 38, no. 4, pp. 209–226.

41. Ostergard P.R.J., A fast algorithm for the maximum clique problem. Discr. Appl. Math., 2002, vol. 120, no. 1–3, pp. 197–207.

42. Palubeckis G., Ostyreika A., Tomkevicius A., An iterated tabu search approach for the clique partitioning problem. The Scientific World J., 2014, art. ID 353101, pp. 1–10.

43. Pardalos P.M., Xue J., The maximum clique problem. J. of Global Optim., 1994, vol. 4, no. 3, pp. 301–328.

44. Pardalos P.M., Rebennack S., Computational challenges with cliques, quasi-cliques and clique partitions in graphs. In: P. Festa (ed), Experimental Algorithms SEA 2010, LNCS 6049, Springer, 2010, pp. 12–22.

45. Pastukhov G., Veremyev A., Boginski V., Prokopyev O.A., On maximum degree-based-quasi-clique problem: Complexity and exact approaches. Networks, 2018, vol. 71, no. 2, pp. 136–152.

46. Pattillo J., Veremyev A., Butenko S., Boginski V., On the maximum quasi-clique problem. Discr. Appl. Math., 2013, vol. 161, no. 1–2, pp. 244–257.

47. Pattabiraman B., Patwary Md.M.A., Gebremedhin A.H., Liao W.-k., Choudhary A., Fast algorithms for the maximum clique problem on massive graphs with applications to overlapping community detection. Electr. prepr., 28 p., Nov. 17, 2014. http://arxiv.org/abs/1411.7460 [cs.DS]

48. Penga B., Wu L., Wang Y., Wu Q., Solving maximum quasi-clique problem by a hybrid artificial bee colony approach. Inform. Sci., 2021, vol. 578, pp. 214–235.

49. Phillips C.A., Wang K., Baker E.J., Bubier J.A., Chesler E.J., Langston M.A., On finding and enumerating maximal and maximum k-partite cliques in k-partite graphs. Algorithms, 2019, vol. 12, no. 1, art. 23, pp. 1–17.

50. Pinto B.Q., Ribeiro C.C., Rosseti I., Plastino A., A biased random-key genetic algorithm for the maximum quasi-clique problem. Eur. J. Oper. Res., 2018, vol. 271, no. 3, pp. 849–865.

51. Prokop P., Snasel V., Drazdilova P., Platos J., Clustering and closure coefficient based on $k - CT$ components. IEEE Access, 2020, vol. 8, pp. 101145–101151.

52. Punnen A.P., Zhang R., Analysis of an approximate greedy algorithm for the maximum edge clique partitioning problem. Discr. Optim., 2012, vol. 9, no. 3, pp. 205–208.

53. Sanei-Mehri S.-V., Das A., Tirthapura S., Enumerating top-k quasi-cliques. Electr. prepr., 10 p., Aug. 28, 2018. http://arxiv.org/abs/1808.0953 [cs.DS]

54. Stix V., Finding all maximal cliques in dynamic graphs. Comput. Optim. and Appl., 2004, vol. 27, no. 2, pp. 173–186.

55. Sukegawa N., Miyauchi A., A note on the complexity of the maximum edge clique partitioning problem with respect to the clique number. Discr. Optim., 2013, vol. 19, no. 4, pp. 331–332.

56. Sun S., Wang Y., Liao W., Wang W., Mining maximal cliques on dynamic graphs efficiently by local strategies. In: 2017 IEEE 33rd Int. Conf. on Data Engineering (ICDE), pp. 115–118, 2017.

57. Tsourakakis C., Bonchi F., Gionis A., Gullo F., Tsiarli M., Denser than the densest subgraph: extracting optimal quasi-cliques with quality guarantees. In: Proc. of the 19th ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining KDD'13, pp. 104–112, 2013.

58. Uiyyasathain C., Maximal-Clique Partitions. PhD thesis, Univ. of Colorado at Denver, 2003.

59. Uno T., An efficient algorithm for solving pseudo clique enumeration problem. Algorithmica, 2010, vol. 56, no. 1, pp. 3–16.

60. Wallis W., Asymptotic values of clique partition numbers. Combinatorica, 1982, vol. 2, no. 1, pp. 99–101.

61. Wang H., Alidaee B., Glover F., Kochenberger G., Solving group technology problems via clique partitioning. Int. J. Flex. Manuf. Syst., 2006, vol. 18, pp. 77–97.

62. Wang Z., Chen Q., Hou B., Suo B., Li Z., Pan W., Ives Z.G., Parallelizing maximal clique and k-plex enumeration over graph data. J. Parallel Distrib. Comput., 2017, vol. 106, pp. 79–91.

63. Zeng Z., Wang J., Zhou L., Karypis G., Out-of-core coherent closed quasi-clique mining from large dense graph databases. ACM Trans. on Database System, 2007, vol. 32, art. 13.

64. Zhou Y., Hao J.K., Goeffon A., A three-phased local search approach for the clique partitioning problem. J. Comb. Optim., 2016, vol. 32, pp. 469–491.

65. Zhou Q., Benlic U., Wu Q., An opposition-based memetic algorithm for the maximum quasi-clique problem. Eur. J. Oper. Res., 2020, vol. 286, no. 1, pp. 63–83.

On graph partitioning based on cliques

Levin M.Sh.

The paper addresses clique based graph partitioning problem. The basic problem types are examined: (a) maximum edge clique partitioning problem, (b) minimum edge clique partitioning problem, (c) clique partitioning problem with bounded cardinality of cliques. The above-mentioned problems correspond to a special class of combinatorial clustering. In addition multicriteria problem formulations based on vector weights are proposed. Brief surveys on methods for clique design in graphs and for clique based graph partitioning problem are presented. A problem as clique trajectory over dynamic graph is briefly illustrated. Numerical examples illustrate the considered problems.

KEYWORDS: graph partitioning, clustering, clique, combinatorial optimization, combinatorial clustering