

Динамика параметров в стохастических BMS-моделях для нефтегазовых рынков

А.М. Шашев

Московский физико-технический институт (МФТИ), Москва, Россия

Поступила в редколлегию 15.12.2022

Аннотация—Стохастическая теория управления портфелем активов может быть применена для построения оптимального инвестиционного проекта разработки нефтегазовых месторождений. Используются методы и количественные оценки адаптивных BMS-моделей со стохастическими переключениями, которые позволяют найти минимальный размер начальных инвестиций. В статье приведены графики динамики фундаментальных характеристик BMS-моделей, которые обеспечивают построение достаточно точных (с нормированным квадратичным отклонением не более 9%) стохастических функций на каждом периоде стабильности, на которые может быть разбита вся статистика цен spot daily с 1988 г. по настоящее время. Приводятся графики, которые показывают характер и диапазоны колебаний параметров BMS-моделей, статистические оценки которых на всех стабильных периодах получены по реальным торговым данным

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамические системы, стохастическая теория управления портфелем активов, динамика цен нефтяных рынков, BMS-модели со стохастическими переключениями, адаптивная модель.

DOI: 10.53921/18195822_2022_22_4_384

1. ВВЕДЕНИЕ

Знаменитая работа 1965-го г. [1] нобелевского лауреата по экономике П. Самуэльсона открыла новое, на то время, поле применения стохастических дифференциальных уравнений и теории стохастических динамических систем. Они стали применяться для описания и анализа фондовых рынков, а не только для решения задач моделирования, фильтрации и управления в физике и технике [2–4]. Эти методы привели к созданию целого направления в математике финансов - стохастической теории управления портфелем активов в работах таких выдающихся американских экономистов (и нобелевских лауреатов), как Robert C. Merton, Fischer Black, Myron Scholes, John C. Cox, Stephen A. Ross, Mark Rubinstein [5–7]... В работах этих авторов исследовались спекулятивные портфели активов. Затем задачи теории управления портфелем активов были переформулированы и с 80-х годов применены для решения проблем планирования инвестиций в нефтегазовую отрасль. Применяемая для анализа спекулятивного портфеля активов BMS-модель Блэка–Мертон–Шоулза (BMS-модель) безарбитражна и полна. Для нее справедлива формула Блэка–Шоулза, задающая величину рационального опциона (все детали содержатся в [8]). Для проектов разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений основные доходные статьи определяются ценами на нефть или газ. Динамика цены может быть описана второй компонентой BMS-модели – стохастическим дифференциальным уравнением Ито $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t)$. Формула Блэка–Шоулза для реального инвестиционного проекта разработки месторождения дает минимальный размер начальных инвестиций [9, 10].

2. BMS-МОДЕЛИ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Однако анализ реальной статистики рынка (spot daily Brent, (<http://www.platts.com/>), 08.07.88–21.03.19) показал, что BMS-модель неадекватна реальной динамике цен. В [9] сформулирована гипотеза, что вся статистика цен может быть разбита на «периоды стабильности», где коэффициенты постоянны, но начальная и конечная точки периодов случайны – зависят от S_t . Точнее, μ и σ случайны: $\mu = \mu(\omega, t, S_t)$, $\sigma = \sigma(\omega, t, S_t)$, что приводит к серии BMS-моделей со стохастическими переключениями. К 2020 г. серия разбивается на 18 периодов стабильности [11; 12]: **1**: 08.07.88–17.07.90; **2**: 18.07.90–26.09.90; **3**: 27.09.90–06.02.91; **4**: 07.02.91–19.05.94; **5**: 20.05.94–15.01.97; **6**: 16.01.97–10.12.98; **7**: 11.12.98–26.05.00; **8**: 30.05.000–14.01.02; **9**: 15.01.02–28.07.06; **10**: 31.07.06–11.01.07; **11**: 12.01.07–31.07.08; **12**: 01.08.08–01.12.08; **13**: 02.12.08–24.05.11; **14**: 25.05.11–12.09.14; **15**: 15.09.14–15.01.15; **16**: 16.01.15–20.05.15; **17**: 21.05.15–02.03.16; **18**: 03.03.16–21.03.19 (в 2011 периодов было 13). На графике это разбиение и динамика нефтяных цен spot daily выглядят следующим образом (рис. 1):

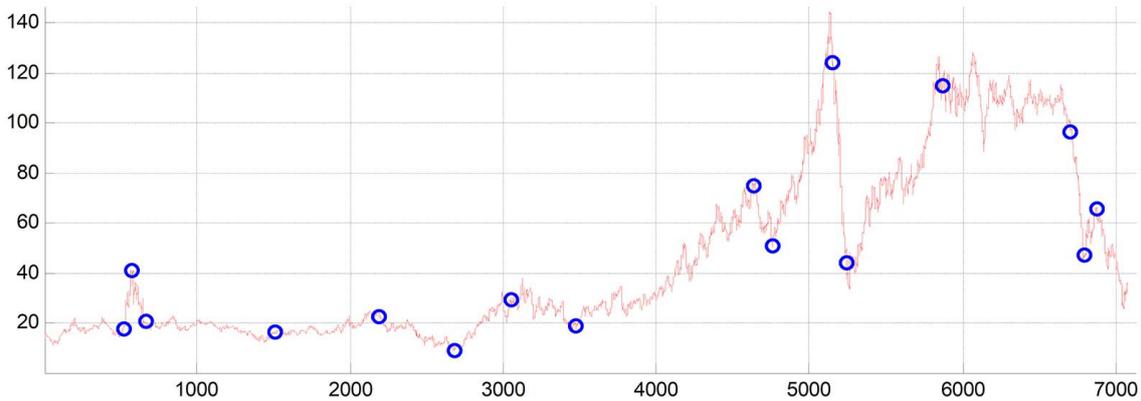
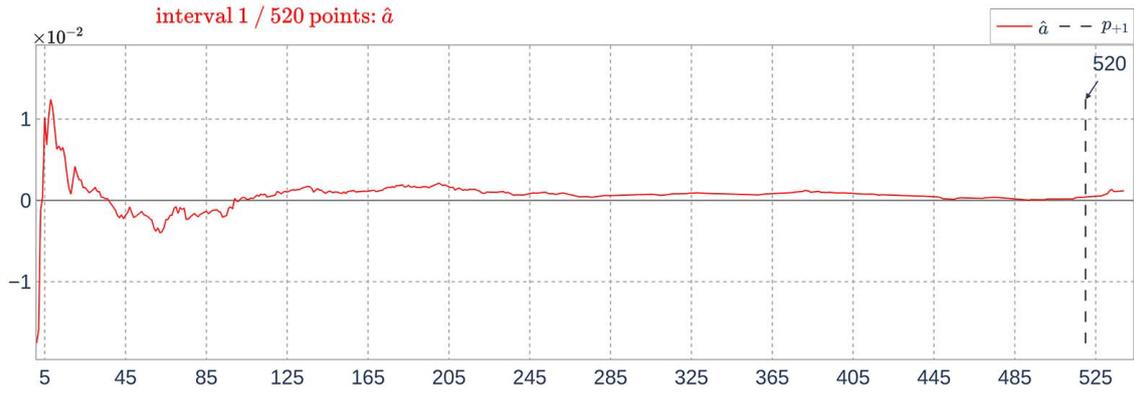
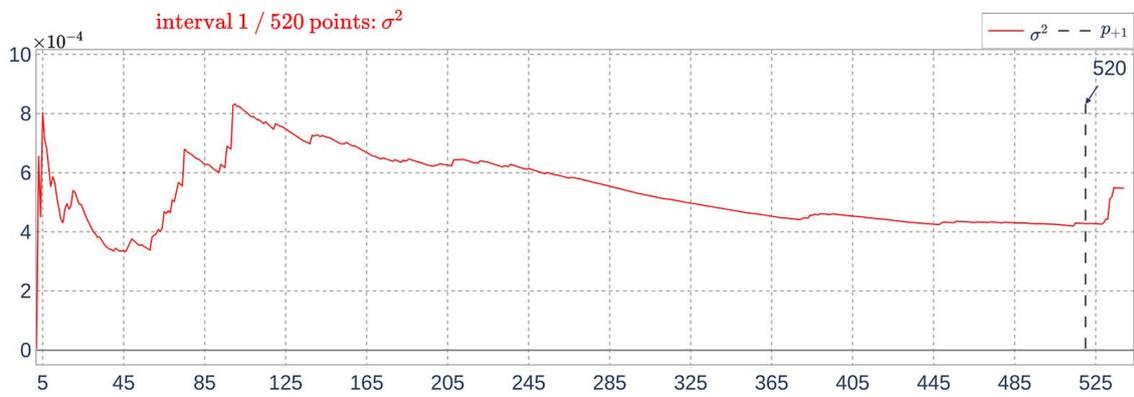
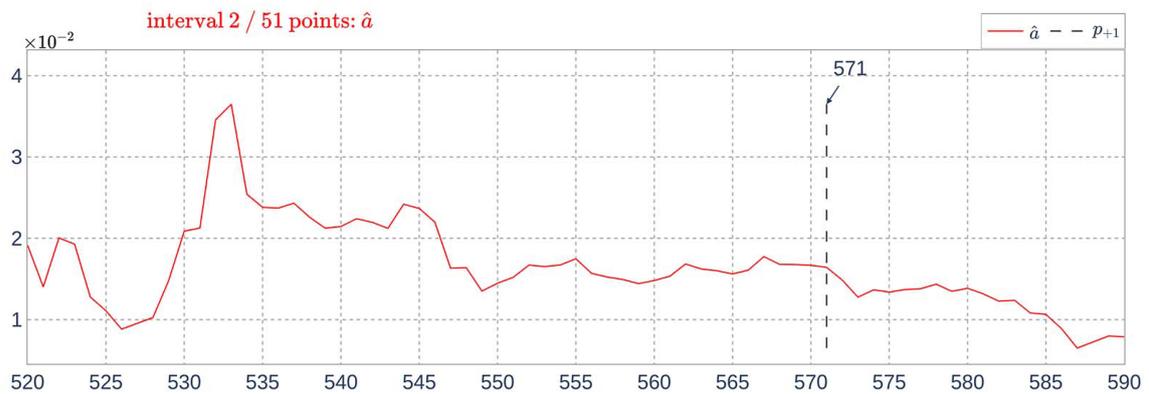


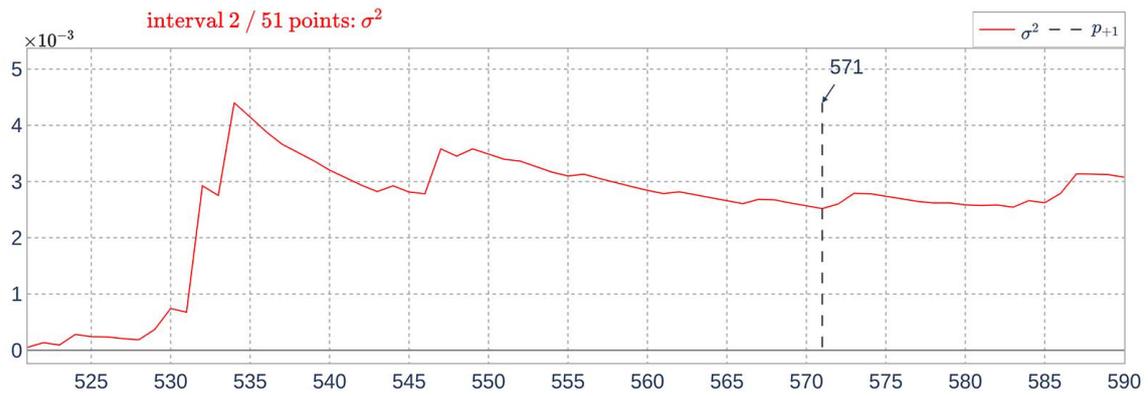
Рис. 1. Ежедневная статистика Platt's Dated Brent и точки разбиения (синие круги)

Приведенное выше стохастическое уравнение Ито имеет решение $S_t = S_0 e^{H(t)}$, $H(t) = at + \sigma w_t$, где $a = (\mu - \sigma^2/2)$, w_t – винеровский процесс (стандартный) [8, §3d; §12.2]. Согласно модели, $H(t + \Delta) = a(t + \Delta) + \sigma w_{t+\Delta}$, и, где $H(t + \Delta) - H(t) = a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}G$, где G – стандартная гауссовская с.в. Откуда $\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t}) = H(t+1) - H(t) = a + \sigma(w_{t+1} - w_t) := a + \sigma G = G_{a,\sigma^2}$ (равно по распределению). По этой формуле моделируется динамика цен. Но для моделирования необходимо определить параметры модели: a и σ . Их дает статистическая оценка по реальной динамике цен spot daily: Если P_t – реальные цены, а $\ln(P_t/P_0) = \hat{H}_t$, то \hat{H}_t – оценка H_t , и $\hat{h}_n = \hat{H}_n - \hat{H}_{n-1}$ – оценка $h_n = H(n) - H(n-1)$. Таким образом $\hat{h}_n = \ln \frac{P_n}{P_0} - \ln \frac{P_{n-1}}{P_0} = \ln \frac{P_n}{P_{n-1}}$, и оценки параметров: $\hat{a}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{h}_k = \bar{h}(n)$, $\hat{\sigma}^2(n) = s^2(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [\hat{h}_k - \bar{h}(n)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [\hat{h}_k - \bar{h}(n)]^2$.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Вычисление оценок параметров $a(n)$ и $\sigma^2(n)$ по возрастающему начальному интервалу $[0, n]$ на каждом стабильном периоде дает качественно одну и ту же картину. Приведем графики для одного длинного и одного короткого периода (напр. 1-го и 2-го), и самого длинного – 9-го (рис. 2 – 7).

Рис. 2. Параметр $a(t)$ Рис. 3. Параметр $\sigma^2(t)$ Рис. 4. Параметр $a(t)$, второй период

Рис. 5. Параметр $\sigma^2(t)$, второй периодРис. 6. Параметр $a(t)$, девятый периодРис. 7. Параметр $\sigma^2(t)$, девятый период

4. АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРОВ

Визуально наблюдается заметная стабилизация параметров. Однако качественной картины не достаточно. Нужно определить точный количественный размер колебаний, не сглаженный резким выбросом в начале стабильного периода. Для этого необходимо определить «точку отсечения». Для того чтобы ее найти, можно воспользоваться процедурой построения оптимальной функции [12] (оптимальной по средне квадратичному (нормированному по длине

интервала N , чтобы можно было сравнивать интервалы разной длины) относительно отклонению: $qd_{av}(P, S) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{S_t - P_t}{P_t}\right)^2}$. И за «точку отсечения» взять конечную точку базы [10], после которой оптимальная функция стабилизируется. Графики параметров модели, например, для третьего стабильного периода, выглядят следующим образом (рис. 8) – 11):

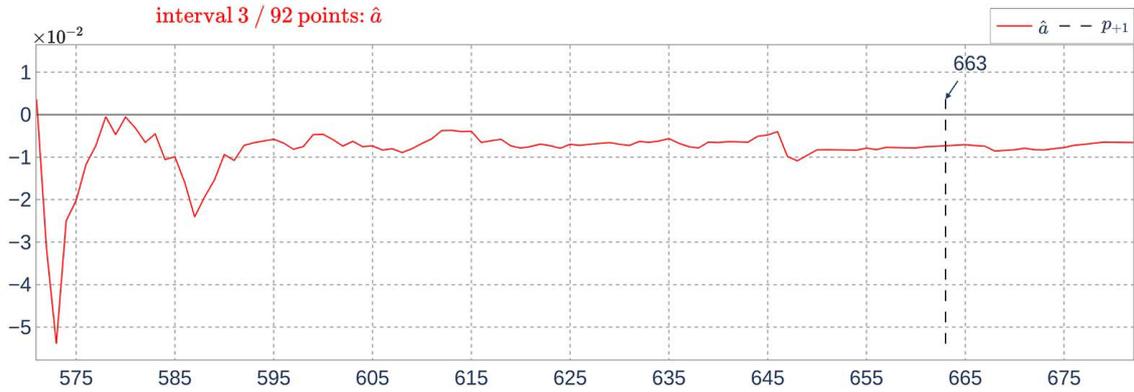


Рис. 8. График оценки параметра $a(t)$

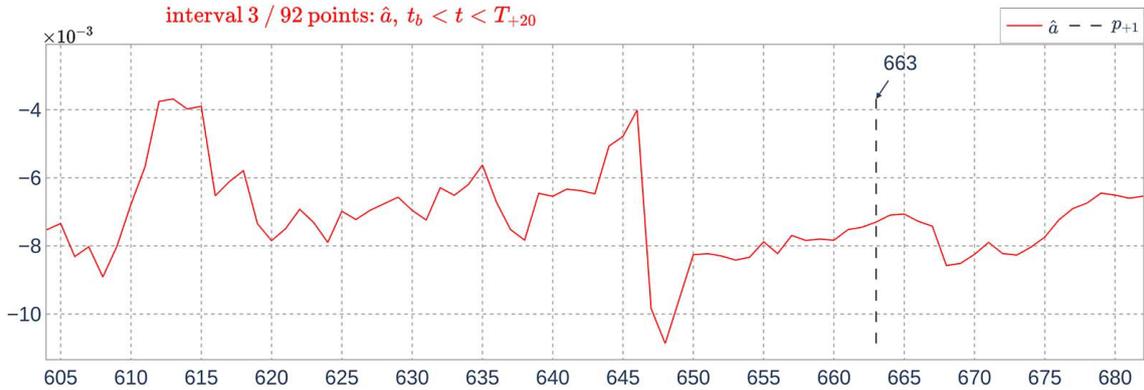


Рис. 9. График оценки параметра $a(t)$ от конца базы

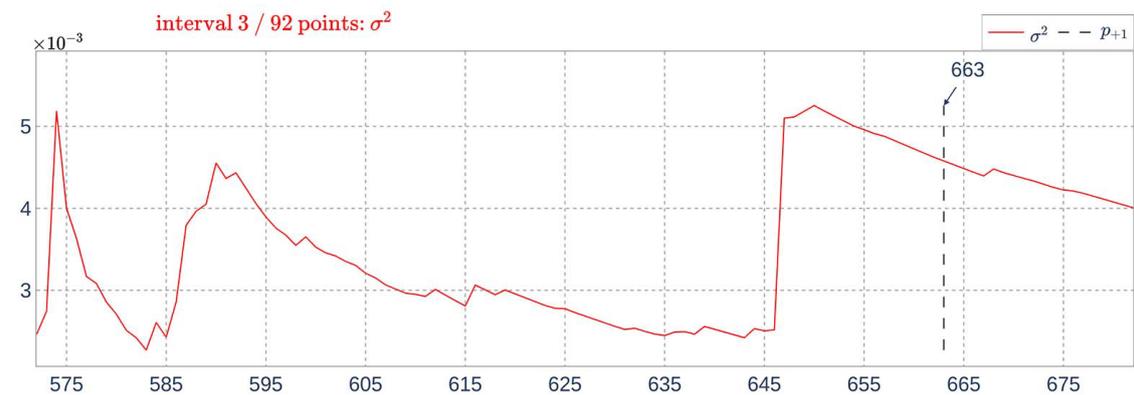


Рис. 10. График оценки параметра $\sigma^2(t)$

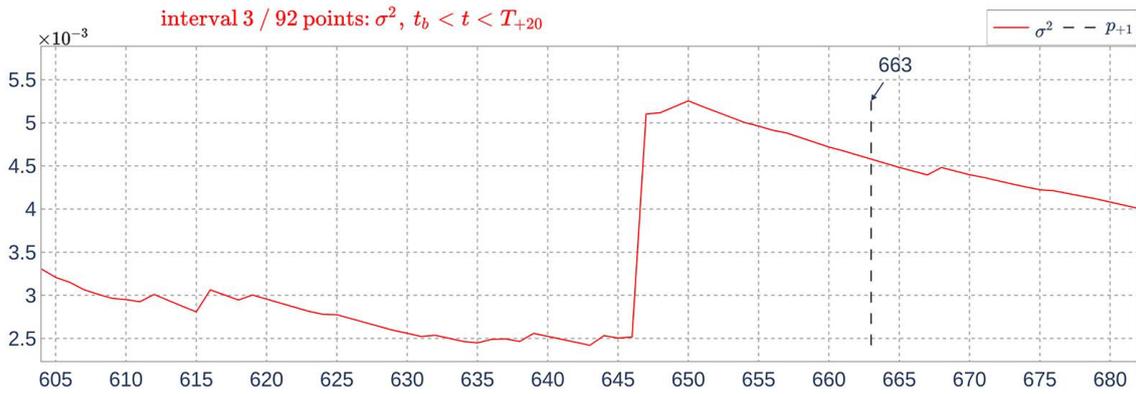


Рис. 11. График оценки параметра $\sigma^2(t)$ от конца базы

Графики на третьем периоде любопытны тем, что в отличие от большинства стабильных периодов, на нем колебания параметров, рассчитываемых нарастающим итогом с усреднением, к концу периода не уменьшаются. Для этого есть причины. Каковы же количественные значения колебаний для оценок параметров модели, без точного определения которых глубокий анализ модели невозможен? Для ответа определим необходимые характеристики колебаний и построим графики их динамики по времени.

1. $Sp_{t,T+20}(\hat{a}(n)), t_b < t \leq n \leq T + 20$, где $Sp_{t,u}(z_n) = \max_{[t,u]} z_n - \min_{[t,u]} z_n$ – функция от t . Это разброс (spread) абсолютных значений оценки сноса $a(t)$ в модели от t , за последней точкой базы t_b , до конца периода T (и на границе). Второй график $Sp_{t,T}(\hat{a}(n)), t_b < t \leq n \leq T$, до T – серого цвета. Так например, для первого периода (имеет среднюю длину, график сноса можно видеть выше), вид разброса следующий (рис. 12):

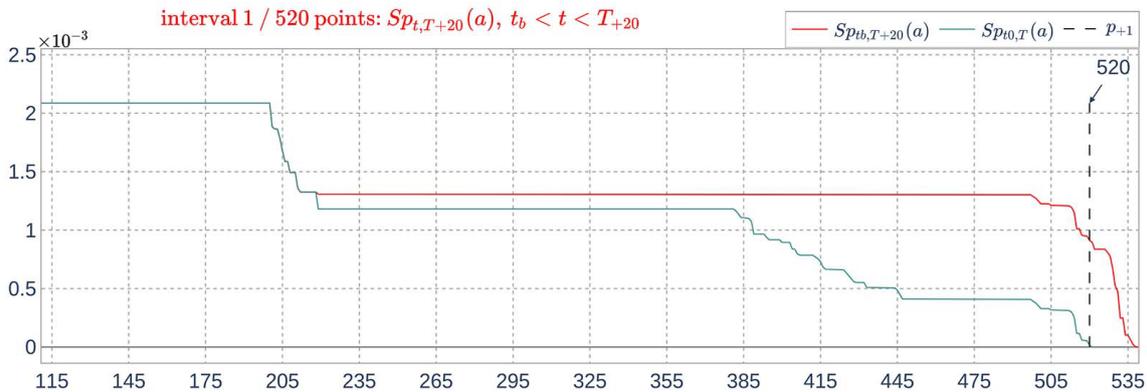


Рис. 12. Графики $Sp_{t,T+20}(\hat{a})$ и $Sp_{t,T}(\hat{a})$ (серый)

2. $sp_{t,T+20}(\hat{a}(n)), t_b < t \leq n \leq T + 20$, где $sp_{t,u}(z_n) = Sp_{t,u}z_n / \min_{[t,u]} |z_n|$. Это относительный разброс значений оценки сноса $a(t)$ в модели от t , за последней точкой базы t_b , до конца периода T и на границе. Второй график $sp_{t,T}(\hat{a}(n)), t_b < t \leq n \leq T$, до T – серого цвета. Для первого периода динамика относительного разброса имеет следующий вид (рис. 13):

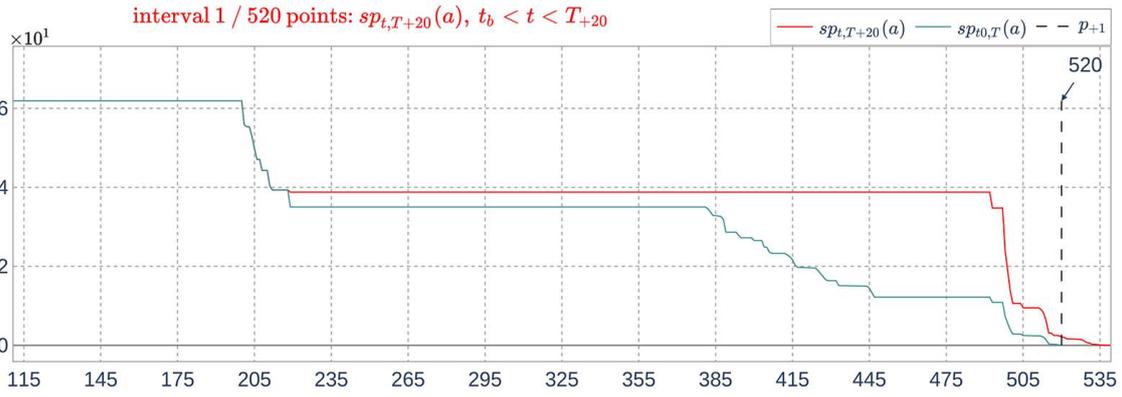


Рис. 13. Графики $sp_{t,T+20}(\hat{a})$ и $sp_{t,T}(\hat{a})$ (серый)

Интересно, что на этом периоде, несмотря на незначительный размах абсолютных оценок сноса, значение относительного размаха велико – это следствие того, что значения оценки $a(t)$ близки к нулю. Когда оцениваемый параметр далек от 0, такого эффекта не наблюдается. Для параметра $\sigma^2(t)$ графики, к примеру, на третьем периоде имеют такой вид (рис. 14 - 15): Конечно, стабилизация относительная, она не похожа на стабилизацию к асимптоте, как у

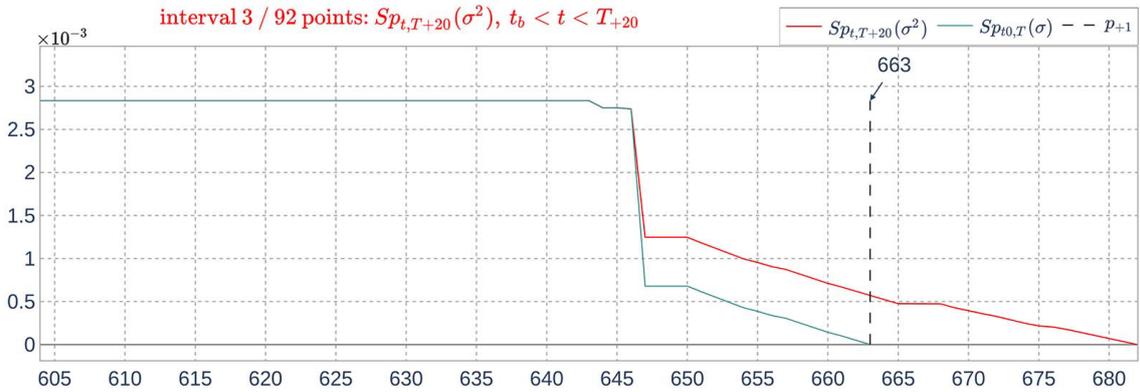


Рис. 14. Графики $Sp_{t,T+20}(\sigma^2)$ и $Sp_{t,T}(\sigma^2)$ (серый)

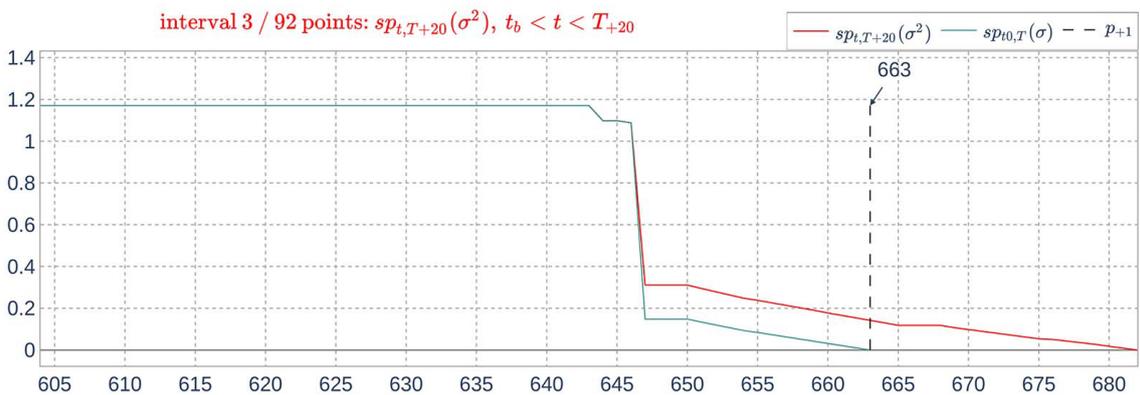


Рис. 15. Графики $sp_{t,T+20}(\sigma^2)$ и $sp_{t,T}(\sigma^2)$ (серый)

законов природных процессов, но в этом нет ничего неожиданного – здесь существенную роль играет субъективная компонента, так называемый «человеческий фактор». И тем не менее,

разброс после конца базы существенно уменьшается, что видно из следующей таблицы (по периодам).

N	$Sp(a(t_0))$	$Sp(a(t_b))$	$sp(a(t_0))$	$sp(a(t_b))$	$Sp(\sigma^2(t_0))$	$Sp(\sigma^2(t_b))$	$sp(\sigma^2(t_0))$	$sp(\sigma^2(t_b))$
1	0.030003	0.002087	> 100	61.900843	0.000827	0.000359	152.797549	0.854739
2	0.030005	0.017694	4.622529	2.726012	0.004348	0.001062	82.590841	0.421672
3	0.057552	0.00718	> 100	1.949922	0.002984	0.002834	1.314388	1.170569
4	0.035149	0.00095	> 100	> 100	0.002382	0.000157	178.071598	0.651067
5	0.009737	0.000969	> 100	> 100	0.000339	0.000119	72.96607	0.598025
6	0.022703	0.002082	> 100	7.329478	0.000568	0.000357	5.621717	1.143967
7	0.04857	0.003877	59.43804	1.683765	0.007867	0.000688	12.117214	1.059649
8	0.046927	0.005568	> 100	> 100	0.002621	0.000376	5.103444	0.640685
9	0.029079	0.000641	68.407274	0.812881	0.000338	0.000050	0.920375	0.115401
10	0.028756	0.004957	34.688795	3.133764	0.000413	0.000192	13.573673	0.765631
11	0.030844	0.001926	> 100	1.062497	0.001475	0.000076	5.390991	0.276519
12	0.031451	0.008257	7.867019	1.606467	0.001434	0.000926	5.841651	1.228498
13	0.06085	0.000874	> 100	0.788825	0.006660	0.000421	6517.34781	0.687961
14	0.01082	0.001498	> 100	> 100	0.000372	0.000110	12.954212	0.666201
15	0.020876	0.005854	35.817632	1.794715	0.000424	0.000332	9.596559	2.441286
16	0.017073	0.010214	42.611541	4.80544	0.000872	0.000305	613.304343	0.537022
17	0.026004	0.003176	12.298015	1.376313	0.000832	0.000287	8.062679	0.499703

Значения в таблице > 100 означают, что минимальные величины сноса близки к 0 (поэтому деление дает очень большие числа), что можно наблюдать по графику динамики сноса. В точности это показывают графики: $\hat{a}(t)$ и статистики $\hat{H}(t)$, которая, собственно, и определяет оценки сноса $a(t)$. Так например, для третьего периода график $\hat{a}(t)$ изображен на рис. 8, $\hat{H}(t)$ ниже на рис. 16.

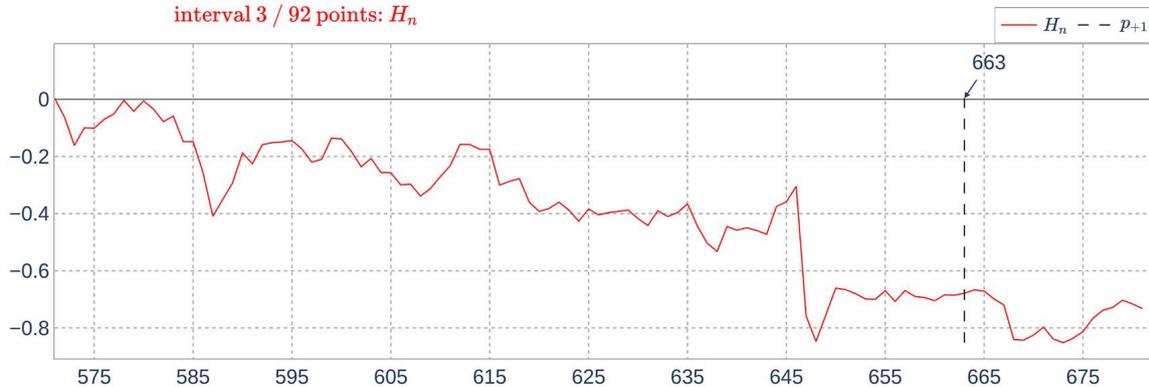


Рис. 16. Статистика $\hat{H}(t)$

При взгляде на графики Sp и sp может возникнуть мысль, что к концу периода снос и диффузия на рынке "успокаиваются" но это не так, что демонстрируют графики скользящих окон: $a_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon+1} \sum_{s=t-\epsilon}^{t+\epsilon} h_s$ и $\sigma_\epsilon^2(t) = \frac{1}{2\epsilon} \sum_{s=t-\epsilon}^{t+\epsilon} (\hat{h}_s - \bar{h})^2$, \bar{h} – среднее на $[t - \epsilon, t + \epsilon]$. Они примерно одинаковы на всех периодах и демонстрируют неупорядоченное движение. К примеру, посмотрим с самого начала статистики цен (рис. 17, 18).

Убывание характеристик Sp и sp имеет самую простую и прозаическую причину – уменьшение длины интервала наблюдений, именно поэтому они уменьшаются до 0. Полученные результаты (для всех периодов), и численные (табличные), и графические, дают достаточно



Рис. 17. $z_t = a_5(t), s > 0, t_b < t \leq T + 20$

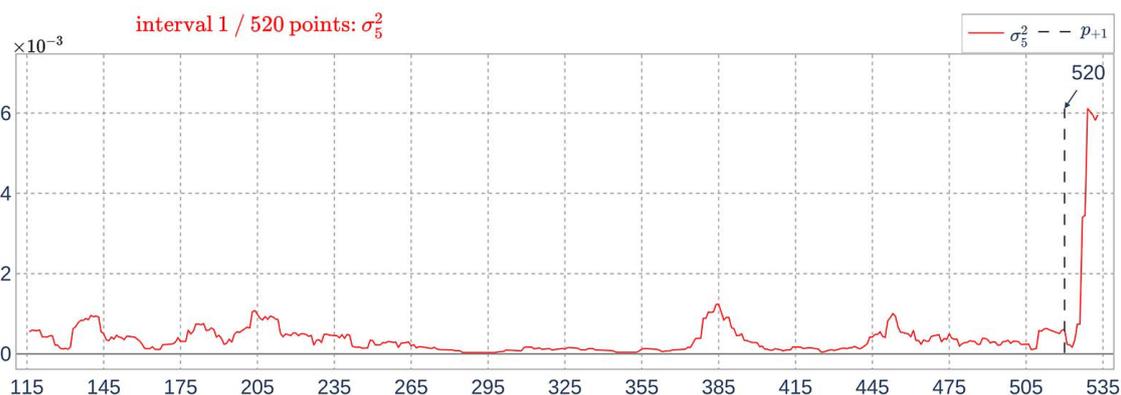


Рис. 18. $z_t = \sigma_5^2(t), s > 0, t_b < t \leq T + 20$

детальную картину поведения основных параметров BMS-модели со стохастическими переключениями для нефтегазовых рынков.

Картина относительной стабилизации параметров BMS-модели и полученные результаты о ее числовых характеристиках важны при построении точных адаптивных моделей динамики рынка, использующих разбиение на стабильные периоды. Однако разбиение на периоды, предложенное в [11, 12], использует уже известную информацию «из будущего». Разбиение по информации, не зависящей от будущего, то есть построение моментов остановки (не зависящих от будущего) с точки зрения общего анализа временных рядов соответствует поиску моментов «разладки» (разлома) временного ряда. С экономической точки зрения это будут моменты дестабилизации цен. Определение завершения стабильного периода по текущей динамике цен, т.е. выявление достаточного набора индикаторов дестабилизации – существенно более сложная задача. Она требует также и более глубокого анализа характеристик стабильных периодов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing.// Industrial Management Review. 1965. V.6. P. 13–31
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. :Наука. М. 1974.
3. Дэвис М. Линейное оценивание и стохастическое управление. :Наука. М. 1984
4. Балакришнан А. Теория фильтрации Калмана. :МИР. М. 1988.

5. Merton Robert C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates 684–673. November 1973. To be presented at the American Finance Association Meetings, New York, December 1973.
6. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. //Journal of Political Economy. V.81. N3. 1973. Pp.637–659.
7. Cox J.C., Ross R.A. Rubinstein M. Option Pricing: a Simplified Approach. //Journal of Financial Economics. Vol.7. N3. 1979.
8. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. :Фазис. М. 1998.
9. Жолков С.Ю. Об инвестиционном анализе нефтегазовых проектов, связанном с реальными опционами. Тр. V межд. конф. «Упр. разв. крупномасшт. систем (MLSD-2011)». Т.1. :ИПУ РАН. М. 2011. С.117–119.
10. Жолков С.Ю. О возможности точного моделирования цен нефтегазовых рынков. / Труды XIII Всерос. совещания по проблемам управления ВСПУ-2019 (17–20.07). :ИПУ РАН.2019. С.2000?2004.
11. Коршунов А.А. О модели стохастических динамических систем с квадратичным отклонением не более 9% и ее применении в инвестиционных проектах. //Журнал радиоэлектроники. N.12. Дек. 2015.
12. Жолков С.Ю. Универсальный алгоритм моделирования всей известной динамики нефтяных цен с отклонением менее 9%. / Тр. Межд. конф. «Теория активных систем-2016» (ТАС-2016). :ИПУ РАН. М. 2016. С.213–17.

Dynamics of parameters in stochastic BMS models for oil and gas markets

A.M. Shashev

The stochastic theory of asset portfolio management can be applied to build an optimal investment project for the development of oil and gas fields. Methods and quantitative estimates of adaptive BMS-models with stochastic switching are used, through which the minimum initial investment is found. The article presents graphs of the dynamics of the fundamental characteristics of BMS-models, which provide the construction of sufficiently accurate (with a normalized square deviation of no more than 9%) stochastic functions at each stability period, into which all spot daily price statistics from 1988 to the present can be divided. Graphs that show the nature and ranges of fluctuations in the parameters of BMS-models are provided, the statistical estimates of which for all stable periods were obtained from real trading data.

KEYWORDS: dynamical systems, stochastic theory of asset portfolio management, oil market price dynamics, BMS-models with stochastic switching, adaptive model.